quadrante

MATEMÁTICA 2

Eduardo Chavante | Diego Prestes

Ensino Médio | 2º ano

sm

quadrante

MATEMÁTICA 2

Ensino Médio | 2º ano

Eduardo Chavante

- Licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR).
- Professor da rede pública nos Ensinos Fundamental e Médio.
- Autor de livros didáticos para os Ensinos Fundamental e Médio.

Diego Prestes

- Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
- Especialista em Educação Matemática pela UEL.
- Licenciado em Matemática pela UEL.
- Atuou como professor na rede particular nos Ensinos Médio e Superior.
- Autor de livros didáticos para o Ensino Médio.

1ª edição
São Paulo
2016

Quadrante — Matemática — 2

Direção editorial Juliane Matsubara Barroso
Gerência editorial Roberta Lombardi Martins
Gerência de processos editoriais Marisa Iniesta Martin
Edição executiva Ana Paula Souza Nani
Edição: Kátia Takahashi, Larissa Calazans e Simone Politi Xavier
Colaboração técnico-pedagógica: Eduardo Wagner, Elenilton Vieira Godoy, Paulo Cezar Pinto Carvalho
Coordenação de controle editorial Flavia Casellato
Suporte editorial: Alzira Aparecida Bertholim Meana, Camila Cunha, Fernanda D'Angelo, Giselle Marangon, Mônica Rocha, Silvana Siqueira, Talita Vieira
Coordenação de revisão Cláudia Rodrigues do Espírito Santo
Coordenação de *design* Rafael Vianna Leal
Design: Leika Yatsunami, Tiago Stéfano
Coordenação de arte Ulisses Pires
Edição executiva de arte: Melissa Steiner
Coordenação de iconografia Josiane Laurentino
Produção editorial Scriba Projetos Editoriais
Edição executiva: Eduardo da Rosa Neto
Edição: Lucília Franco Lemos dos Santos
Assistência editorial: Daiane Gomes de Lima Carneiro, Leandro Figueira Ferreira, Ana Claudia Barretto, Thais Marcelle de Andrade, Victor Hugo dos Santos Gois
Preparação de texto: Ana Lúcia Pereira e Shirley Gomes
Revisão: Claudia Maietta
Edição de ilustrações: Maryane Silva
Iconografia: Túlio Esteves
Tratamento de imagens: José Vitor E. Costa
Diagramação: Leandro Pimenta

Capa Rafael Vianna Leal
Projeto gráfico Marcela Pialarissi e Rafael Hatadani
Imagem de capa Obra de Luiz Sacilotto, *Sem título*, 1993. Têmpera acrílica sobre tela, 90 cm x 110 cm. Coleção particular. Fotografia: Valter Sacilotto.
Editoração eletrônica Leonardo Mari
Fabricação Alexander Maeda
Impressão

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Chavante, Eduardo
Quadrante matemática, 2º ano : ensino médio /
Eduardo Chavante, Diego Prestes. – 1. ed. – São Paulo :
Edições SM, 2016. – (Coleção quadrante matemática)

Suplementado pelo manual do professor.
Bibliografia.
ISBN 978–85–418–1408–9 (aluno)
ISBN 978–85–418–1409–6 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Chavante, Eduardo.
II. Prestes, Diego. III. Título. IV. Série.

16-02602 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

1ª edição, 2016

Edições SM Ltda.
Rua Tenente Lycurgo Lopes da Cruz, 55
Água Branca 05036-120 São Paulo SP Brasil
Tel. 11 2111-7400
edicoessm@grupo-sm.com
www.edicoessm.com.br

Apresentação

Querido(a) aluno(a),

Preparamos este livro com dedicação a fim de proporcionar a você condições de ampliar o que aprendeu a respeito da Matemática, além de auxiliá-lo(a) em seu ingresso aos cursos de Educação Superior e a outros que você almejar.

Sem um leitor, este livro nada mais é que um apanhado de letras, números e símbolos. No entanto, em suas mãos, ele se torna uma poderosa ferramenta, capaz de expandir seu entendimento acerca do mundo em que estamos inseridos.

Neste material, você vai encontrar textos e atividades que relacionam a Matemática com as outras áreas, além de situações em que seu conhecimento matemático será posto à prova. Esta obra também apresenta assuntos matemáticos direcionados à sua formação cidadã, fornecendo oportunidades de reflexão sobre atitudes que podemos, e devemos, desenvolver para viver melhor em uma sociedade dinâmica e em plena transformação.

Bons estudos!

Os autores.

A matemática e a música possuem muitos aspectos em comum.

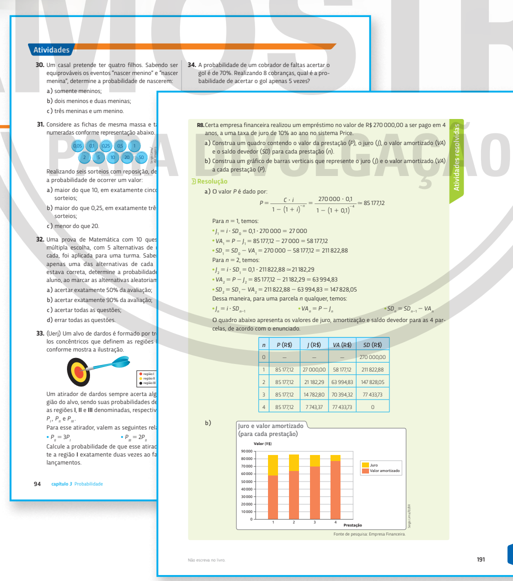
Os teóricos da música aplicam princípios da matemática tanto para compreender quanto para explicar a estrutura musical. Para isso, envolvem vários conceitos, como funções e progressão aritmética.

Djomas/Shutterstock.com/ID/BR

Conheça seu livro

Abertura de unidade

Nessa seção você, seus colegas e o professor terão a oportunidade de dialogar a respeito de temas relacionados com um dos capítulos que serão estudados naquela unidade.



Atividades

Nessa seção você será convidado a colocar em prática os conhecimentos que já possui e desafiado a perceber aspectos que podem ser melhorados. Algumas atividades estão indicadas com ícones.

Atividades resolvidas

Essas atividades complementam os conteúdos apresentados no capítulo e auxiliam no trabalho com as atividades que você deverá resolver.

Ícones

Atividades que exploram as diversas maneiras de usar a calculadora científica e o uso de ***software***.

Atividades para serem desenvolvidas com os colegas.

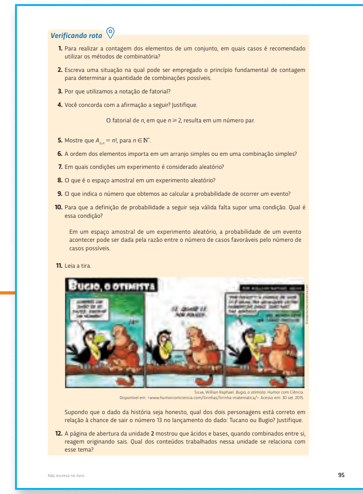
Atividades com maior grau de dificuldade e que estimulam diferentes estratégias de resolução.

Indica que as cores apresentadas nas imagens não correspondem às reais.

Indica que as imagens não são proporcionais entre si.

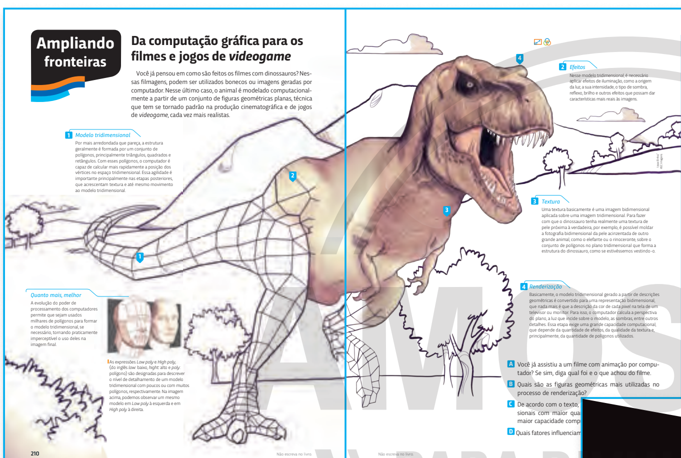
Valores em ação

Nessa seção você será convidado a refletir a respeito de diversos temas, como o cuidado com o seu próprio corpo, com o ambiente e o respeito ao próximo.



Verificando rota

Nessa seção você terá a oportunidade de rever os conceitos gerais desenvolvidos ao longo dos capítulos, verificando sua rota de aprendizagem.

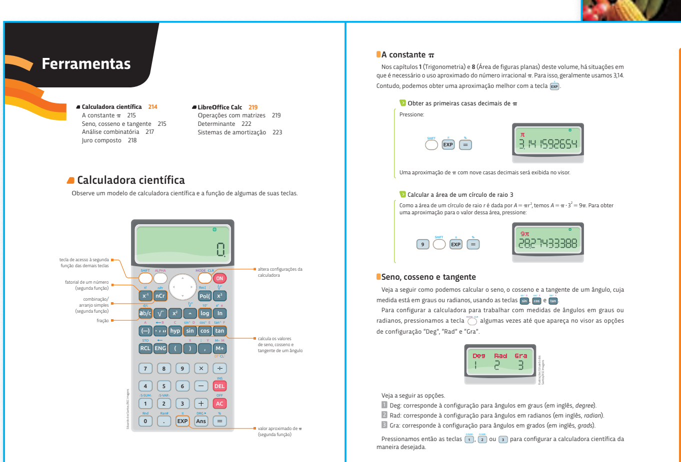


Ampliando fronteiras

A leitura dos textos apresentados nessa seção permite que você amplie as fronteiras do seu conhecimento em temas sobre a história e as diversas aplicações da Matemática.

Matemática em ação

Nessa seção você terá a oportunidade de colocar a Matemática em ação, dentro e fora da escola, e de perceber a sua relação com outras áreas do conhecimento.



Ferramentas

Nessa seção você vai aprender a utilizar a calculadora científica e a planilha eletrônica BrOffice Calc, ambas exploradas como ferramentas que aprofundam seus conhecimentos matemáticos.

Sumário

unidade 1

capítulo 1
Trigonometria

A meteorologia é a ciência que estuda a atmosfera terrestre. O tempo e o clima são aspectos decisivos para a nossa vida cotidiana, os meios de transporte, a agricultura, a engenharia zootécnica, o gerenciamento de recursos hídricos e até as decisões políticas relacionadas à poluição e aos impactos ambientais. Um meteorologista utiliza conhecimentos de trigonometria ao construir certos modelos matemáticos e efetuar análises, modelagens e previsões. Em muitos desses modelos são utilizadas as funções trigonométricas, assunto que será tratado nesta unidade.

Renata Mello/Tyba

Tempestade de raios na zona sul do Rio de Janeiro (RJ), em fevereiro de 2016.

Nesta unidade, você vai estudar que as razões trigonométricas podem ser associadas a uma circunferência de raio unitário e estabelecer funções trigonométricas que modelam vários fenômenos e comportamentos periódicos.

capítulo 1

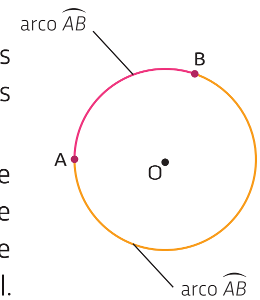
Trigonometria

Trigonometria na circunferência

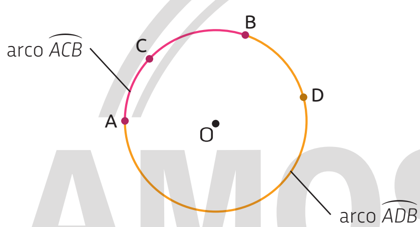
É provável que, em anos anteriores, você tenha estudado as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente relacionadas a ângulos de triângulos. Agora, veremos uma extensão desse assunto com relações trigonométricas associadas à circunferência.

Arcos de circunferência

Considere uma circunferência de centro *O* sobre a qual destacamos dois de seus pontos distintos, *A* e *B*. Esses pontos a dividem em duas partes, nomeadas de **arcos de circunferência** e indicados por $\overset{\frown}{AB}$.



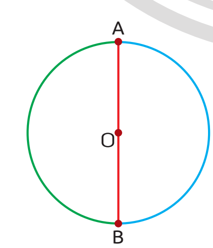
Essa nomenclatura gera uma ambiguidade que pode ser resolvida se nos referirmos ao arco menor $\overset{\frown}{AB}$ ou ao arco maior $\overset{\frown}{AB}$. Outra maneira de resolver essa situação é destacar mais um ponto sobre o arco a que pretendemos nos referir e indicá-lo com o auxílio desse ponto adicional.



Quando não houver dúvidas quanto ao arco referido, podemos indicá-lo apenas por $\overset{\frown}{AB}$.

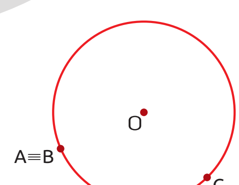
Temos dois casos particulares de arcos de circunferência:

- quando as extremidades *A* e *B* de um arco são simétricas em relação ao centro *O* da circunferência, $\overset{\frown}{AB}$ corresponde a um diâmetro. Dizemos que $\overset{\frown}{AB}$ é uma **semicircunferência** ou um arco de meia volta;

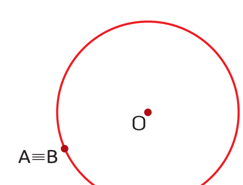


semicircunferência $\overset{\frown}{AB}$

- quando as extremidades de um arco *A* e *B* são coincidentes, dizemos que os arcos determinados são o **arco de uma volta** e o **arco nulo.**



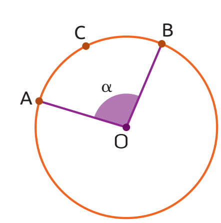
arco de uma volta $\overset{\frown}{ACB}$



arco nulo $\overset{\frown}{AB}$

Medida de um arco de circunferência

Ao construir arcos na circunferência, está implícita a existência de um ângulo central (o que possui vértice no centro da circunferência) correspondente a cada arco tomado. Por definição, a medida angular de um arco, ou simplesmente a medida de um arco, é igual à medida do ângulo central correspondente.

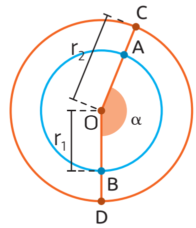


$\overset{\frown}{ACB} = A\hat{O}B = \alpha$

Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Indicaremos um arco e sua medida por um mesmo símbolo.

A medida do arco é diferente de seu comprimento (sua medida linear) porque não depende da medida do raio da circunferência, já o comprimento sim. Nas circunferências abaixo, temos $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = \alpha$, mas os comprimentos dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ são diferentes.

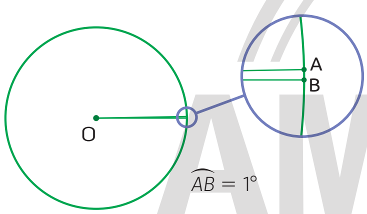


Lembre-se de que o comprimento da circunferência é dado por $C = 2\pi r$.

Nas circunferências acima, por que os comprimentos dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ são diferentes, uma vez que a medida de seus arcos são iguais?

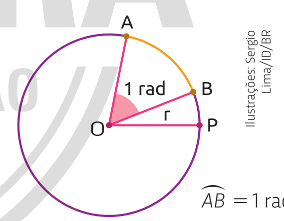
Geralmente adotamos as unidades de medidas grau $(^\circ)$ e radiano (rad) para indicar a medida de um arco.

- Ao dividir uma circunferência de centro O em 360 arcos iguais e tomar os pontos A e B, extremos de um desses 360 arcos, dizemos que o ângulo $A\hat{O}B$, e consequentemente o arco menor $\overset{\frown}{AB}$, corresponde a 1 grau, denotado por 1°. Assim, o arco de uma volta de circunferência corresponde a 360°.



O grau possui os submúltiplos minutos $(')$ e segundos $('')$: 1 grau equivale a 60 minutos $(1^\circ = 60')$; 1 minuto equivale a 60 segundos $(1' = 60'')$.

- Quando o comprimento de um arco é igual à medida do raio da circunferência (medida retificada do arco), dizemos que esse arco mede 1 radiano, denotado por 1 rad.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

O arco de comprimento r mede 1 rad, o de comprimento $2r$ mede 2 rad, e assim sucessivamente. Logo um arco de comprimento $2\pi r$ (arco de uma volta) mede 2π rad, ou seja, 2π rad corresponde a 360°.

Para converter em radianos a medida de um arco em graus, ou vice-versa, utilizamos uma regra de três simples, pois as medidas em graus e radianos são diretamente proporcionais. Por exemplo, para converter em radianos um ângulo de 45°, fazemos:

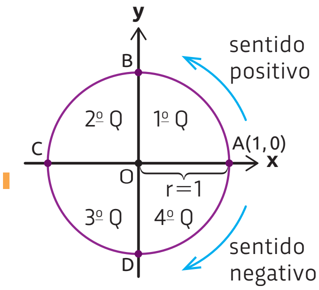
Medida em graus ($^\circ$)	Medida em radianos (rad)
360	2π
45	x

$$\frac{360}{45} = \frac{2\pi}{x} \Rightarrow 360x = 90\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Portanto, 45° correspondem a $\frac{\pi}{4}$ rad.

Circunferência trigonométrica

Seja um plano com um par de eixos ortogonais Ox e Oy que se intersectam no ponto O, determinando um sistema cartesiano ortogonal. Nele, considere uma circunferência de raio unitário (raio medindo uma unidade) e centro O coincidente com a origem do sistema. Os eixos ortogonais dividem a circunferência em quatro partes iguais, denominadas quadrantes. Ao determinar que todos os arcos tomados nessa circunferência terão origem no ponto $A(1, 0)$, sendo positivos no sentido anti-horário e negativos no sentido horário, temos uma **circunferência trigonométrica**, também chamada **ciclo trigonométrico**.



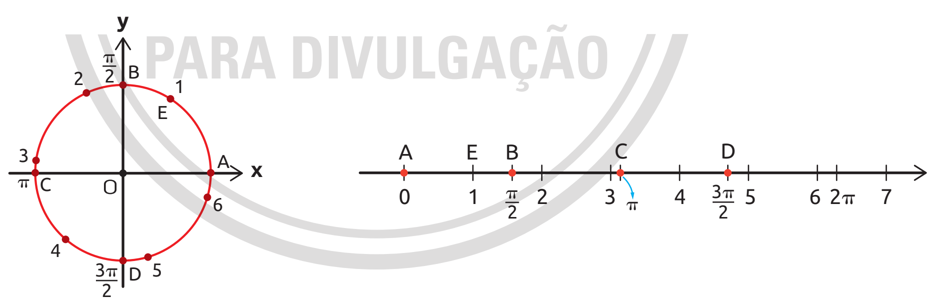
Nessa circunferência, 1º Q, 2º Q, 3º Q e 4º Q indicam os quadrantes da circunferência trigonométrica. Os pontos A, B, C e D correspondem à intersecção da circunferência com os eixos ortogonais.

> Quais são as coordenadas dos pontos B, C e D?

Como o raio da circunferência trigonométrica é unitário, seu comprimento é 2π unidades de medida, isto é, aproximadamente 6,28 $(2 \cdot 3{,}14)$. Considerando x o comprimento de um percurso pela circunferência a partir do ponto A, no sentido anti-horário, para cada número real x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, podemos associar um ponto P da circunferência de modo que:

- se $x = 0$, o ponto P coincide com o ponto A;
- se $x > 0$, é necessário realizar um percurso de comprimento x a partir do ponto A, no sentido anti-horário, e marcar o ponto P como ponto final do percurso.

Assim, podemos realizar a seguinte associação:



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

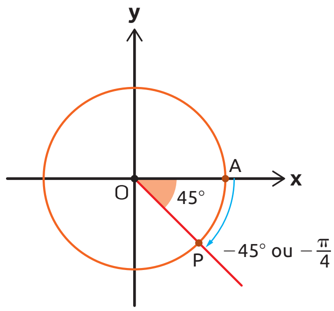
Na circunferência trigonométrica, o comprimento e a medida de um arco em radianos são numericamente iguais porque a circunferência trigonométrica tem raio unitário. De acordo com isso, denotaremos a medida de um arco em radianos sem a indicação rad, para simplificar a notação. Desse modo, o arco:

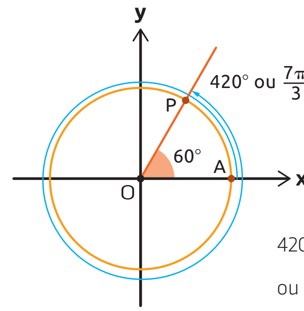
> Observe que, ao indicar a medida de um arco, o valor de π radianos corresponde a 180°.

- $\overset{\frown}{AE}$ tem comprimento 1 (medida do raio da circunferência) e sua medida é 1;
- $\overset{\frown}{AB}$ tem comprimento $\frac{\pi}{2}$ (aproximadamente 1,57) e sua medida é $\frac{\pi}{2}$ correspondente a 90°;
- $\overset{\frown}{AC}$ tem comprimento π (aproximadamente 3,14) e sua medida é π correspondente a 180°;
- $\overset{\frown}{AD}$ tem comprimento $\frac{3\pi}{2}$ (aproximadamente 4,71) e sua medida é $\frac{3\pi}{2}$ correspondente a 270°.

> Qual é o comprimento do arco nulo? E sua medida em graus?

A cada ponto P da circunferência trigonométrica, podemos associar arcos trigonométricos $\overset{\frown}{AP}$ que sejam negativos ou maiores do que um arco de uma volta.



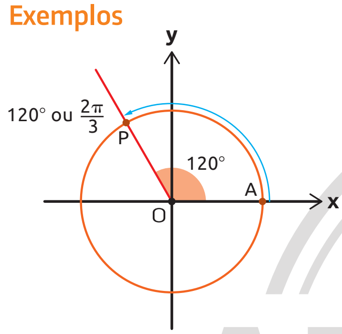


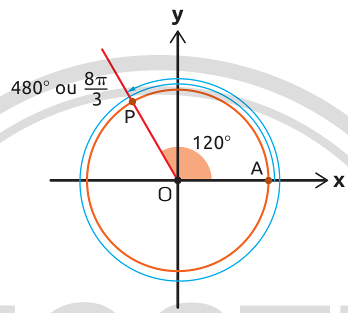
$420° = 60° + 360°$

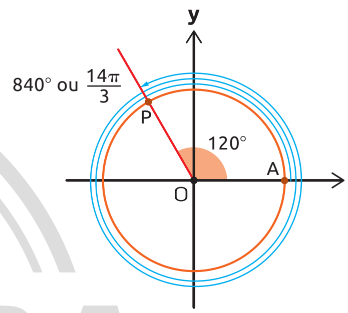
ou $\frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$

Desse modo, um mesmo ponto P da circunferência trigonométrica pode ser associado a infinitos arcos.

Exemplos







Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Os arcos indicados acima na circunferência trigonométrica têm a mesma extremidade P. Por isso, são nomeados de **arcos côngruos**.

Dois ou mais arcos de uma circunferência trigonométrica são côngruos ou congruentes entre si quando possuem a mesma origem e a mesma extremidade.

Um arco de 120° subentende um ângulo central de 120°.

Observando a representação desses arcos, é possível perceber que:

- na primeira circunferência, temos um arco de 120° ou $\frac{2\pi}{3}$;
- na segunda circunferência, temos um arco de $480° = 120° + 360°$ ou $\frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi$, que corresponde a 120° ou $\frac{2\pi}{3}$ mais uma volta inteira, ou seja, 360° ou 2π;
- na terceira circunferência, temos um arco de $840° = 120° + 2 \cdot 360°$ ou $\frac{14\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$, que corresponde a 120° ou $\frac{2\pi}{3}$ mais duas voltas inteiras, ou seja, $2 \cdot 360°$ ou $2 \cdot 2\pi$.

Assim, um arco de 120° ou $\frac{2\pi}{3}$ mais uma quantidade k de voltas inteiras tem a mesma extremidade P dos arcos apresentados anteriormente. Escrevemos a medida desse arco da seguinte maneira:

$$120° + k \cdot 360° \text{ ou } \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

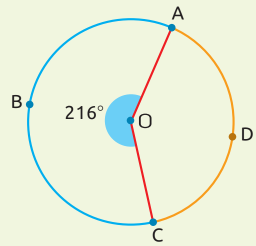
Quando k é negativo, a medida do arco também será negativa. Isso significa que o arco deve ser traçado no sentido horário a partir da origem (1, 0).

Em uma circunferência trigonométrica, as medidas dos arcos côngruos a um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $0 \leqslant \alpha < 360°$ ou $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, podem ser escritas como:

$$\alpha + k \cdot 360° \text{ ou } \alpha + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Dizemos que $\overset{\frown}{AP}$ é a 1ª **determinação positiva** dos arcos côngruos a ele.

R1. Calcule o comprimento dos dois arcos destacados na circunferência de 2 cm de raio.



Sergio Lima/ID/BR

Resolução

O comprimento da circunferência é dado por:

$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \simeq 12{,}56$

Logo o comprimento dessa circunferência é aproximadamente 12,56 cm.

Como a medida do ângulo central da circunferência é 360° e $\overset{\frown}{ABC} = 216°$, fazemos:

Ângulo central (°)	Comprimento (cm)
360	12,56
216	x

$\dfrac{360}{216} = \dfrac{12{,}56}{x} \Rightarrow 360x = 216 \cdot 12{,}56 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{2\,712{,}96}{360} \Rightarrow x \simeq 7{,}54$

Portanto, o comprimento do arco $\overset{\frown}{ABC}$ é aproximadamente 7,54 cm.

Determinando a diferença entre o comprimento da circunferência e o comprimento do arco $\overset{\frown}{ABC}$, obtemos $y = 12{,}56 - 7{,}54 = 5{,}02$.

Portanto, o comprimento do arco $\overset{\frown}{CDA}$ é aproximadamente 5,02 cm.

R2. Converta a medida 40° 30′ em radianos.

Resolução

Primeiro, convertemos a medida de minutos em graus. Como 60′ = 1°, então, 30′ = 0,5°. Por isso, 40° 30′ equivalem a 40,5°. Utilizando regra de três simples, temos:

Medida em graus (°)	Medida em radianos (rad)
360	2π
40,5	x

$\dfrac{360}{40{,}5} = \dfrac{2\pi}{x} \Rightarrow 360x = 81\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{81\pi}{360} \Rightarrow x = \dfrac{9\pi}{40}$

Portanto, 40° 30′ correspondem a $\dfrac{9\pi}{40}$.

R3. Converta a medida $\dfrac{8\pi}{25}$ em graus.

Resolução

Sabendo que π corresponde a 180°, temos:

$\dfrac{8\pi}{25} = \dfrac{8 \cdot 180}{25} = 57{,}6$

Logo $\dfrac{8\pi}{25}$ correspondem a 57,6°.

Também podemos converter a parte decimal do valor apresentado em minutos:

Medida em graus (°)	Medida em minutos (′)
1	60
0,6	x

$\dfrac{1}{0{,}6} = \dfrac{60}{x} \Rightarrow x = 0{,}6 \cdot 60 \Rightarrow x = 36$

Portanto, $\dfrac{8\pi}{25}$ corresponde a 57° 36′.

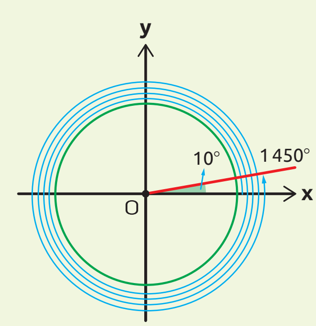
R4. Escreva a 1ª determinação positiva e a quantidade de voltas completas na circunferência dos arcos a seguir. Determine ainda a expressão geral da medida dos arcos côngruos a eles.

a) 1 450° b) $\dfrac{15\pi}{4}$

Resolução

a) A 1ª determinação positiva corresponde ao resto da divisão de 1 450° por 360° e o quociente é a quantidade de voltas completas na circunferência. Ou seja,

$$\begin{array}{r|l} 1\ 4\ 5\ 0 & 3\ 6\ 0 \\ \underbrace{1\ 0}_{\text{1ª determinação positiva}} & \underbrace{4}_{\text{quantidade de voltas completas}} \end{array}$$



Sergio Lima/ID/BR

Portanto, 1 450° = 10° + 4 · 360°.

A expressão geral é dada por $10° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) Vamos calcular, inicialmente, a quantidade de voltas completas na circunferência para o arco que mede $\frac{15\pi}{4}$.

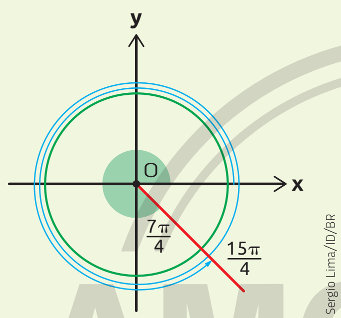
$$\frac{\frac{15\pi}{4}}{2\pi} = \frac{15\pi}{4} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{15}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 8 \\ \hline 7 & 1 \end{array}$$

quantidade de voltas completas

Subtraindo uma volta completa desse arco, obtemos:

$$\frac{15\pi}{4} - 2\pi = \frac{15\pi - 8\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$



Portanto, a 1ª determinação positiva do arco $\frac{15\pi}{4}$ é $\frac{7\pi}{4}$.

A expressão geral é dada por $\frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

R5. (UEL-PR) Uma família viaja para Belém (PA) em seu automóvel. Em um dado instante, o GPS do veículo indica que ele se localiza nas seguintes coordenadas: latitude 21°20′ Sul e longitude 48°30′ Oeste. O motorista solicita a um dos passageiros que acesse a internet em seu celular e obtenha o raio médio da Terra, que é de 6 730 km, e as coordenadas geográficas de Belém, que são latitude 1°20′ Sul e longitude 48°30′ Oeste. A partir desses dados, supondo que a superfície da Terra é esférica, o motorista calcula a distância *D*, do veículo a Belém, sobre o meridiano 48°30′ Oeste.

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor da distância *D*, em km.

a) $D = \frac{\pi}{9} \cdot 6\,730$

b) $D = \frac{\pi}{18} \cdot (6\,730)^2$

c) $D = \frac{\pi}{9} \cdot \sqrt{6\,730}$

d) $D = \frac{\pi}{36} \cdot 6\,730$

e) $D = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cdot 6\,730$

Resolução

Para determinar a distância *D*, vamos calcular a diferença entre as latitudes do automóvel e de Belém, ou seja, $21°20' - 1°20' = 20°$. Assim, devemos determinar o comprimento de um arco de 20° sobre a superfície da Terra. Considerando que o raio da Terra é igual a 6 730 km, o comprimento de um dos seus meridianos é dado por $C = 2\pi \cdot 6\,730 = 13\,460\pi$.

Utilizando regra de três simples, temos:

Ângulo central (°)	Comprimento (cm)
360	13 460π
20	*D*

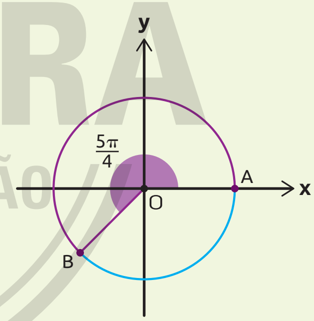
$$\frac{360}{20} = \frac{13\,460\pi}{D} \Rightarrow 360D = 20 \cdot 13\,460\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \frac{269\,200\pi}{360} \Rightarrow D = \frac{\pi}{9} \cdot 6\,730$$

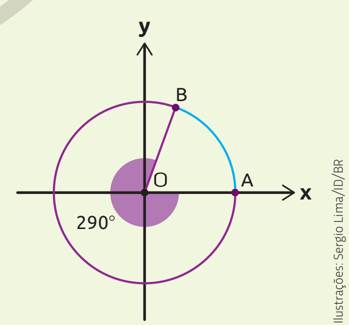
Portanto, a alternativa correta é **a**.

R6. Determine a expressão geral da medida dos arcos côngruos a $\overset{\frown}{AB}$ em destaque.

a)



b)



Resolução

a) Como $\frac{5\pi}{4}$ é a 1ª determinação positiva do arco, a expressão geral é dada por $\frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

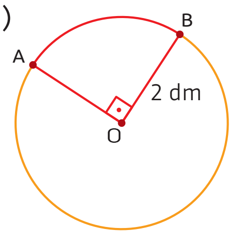
b) A 1ª determinação positiva de $-290°$ equivale a $360° - 290° = 70°$. Dessa maneira, a expressão geral é dada por $70° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Atividades

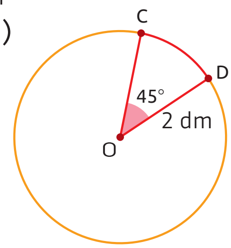
Nas atividades das páginas **16** e **17**, sempre que necessário, considere $\pi \simeq 3{,}14$.

1. Em cada item, determine o comprimento e a medida em graus dos arcos em destaque.

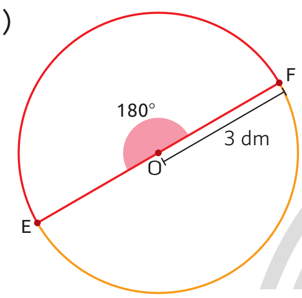
a)



c)



b)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

2. Expresse em radianos a medida de cada arco.

a) $\overset{\frown}{AB} = 125°$

b) $\overset{\frown}{CD} = 5°\,45'\,36''$

c) $\overset{\frown}{EF} = 15°$

d) $\overset{\frown}{GH} = 90°$

3. Expresse em graus a medida de cada arco.

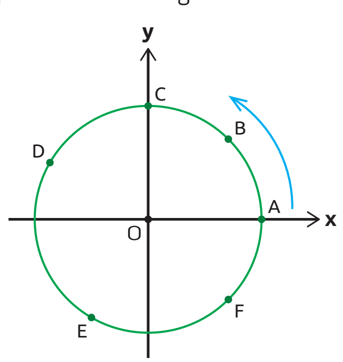
a) $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{\pi}{3}$

b) $\overset{\frown}{CD} = \dfrac{\pi}{4}$

c) $\overset{\frown}{EF} = \dfrac{893}{1800}\pi$

d) $\overset{\frown}{GH} = \dfrac{\pi}{6}$

4. O ponto *A* é extremidade de todos os arcos representados no ciclo trigonométrico, e o sentido está indicado pela seta na imagem abaixo.

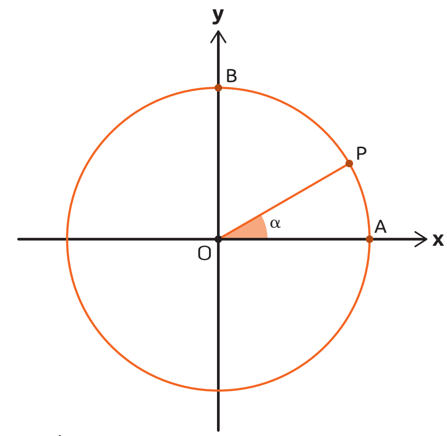


Sergio Lima/ID/BR

Associe cada um dos arcos à sua respectiva medida em radianos, considerando a 1ª determinação positiva dos arcos.

$\dfrac{4\pi}{3}$ $\quad \dfrac{\pi}{4}$ $\quad \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \dfrac{5\pi}{6}$ $\quad \dfrac{7\pi}{4}$

5. Observe a imagem abaixo, em que $OP = 2$ cm e $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.



Sergio Lima/ID/BR

Determine:

a) o comprimento da circunferência;

b) o comprimento do arco $\overset{\frown}{AP}$;

c) o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$.

6. Qual é a 1ª determinação positiva dos arcos abaixo?

a) $\dfrac{5\pi}{2}$

b) 900°

c) 2 520°

d) $\dfrac{15\pi}{4}$

7. A imagem abaixo representa uma roleta igualmente dividida em setores, utilizada para sortear a categoria de perguntas que as equipes participantes de uma gincana escolar deverão responder.

Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

Sabendo que a posição inicial da roleta é sempre a linha que separa as categorias Conhecimentos Gerais e Língua Portuguesa, qual categoria deverá ser respondida se uma das equipes girar, no sentido horário, essa roleta:

a) 1 850°?

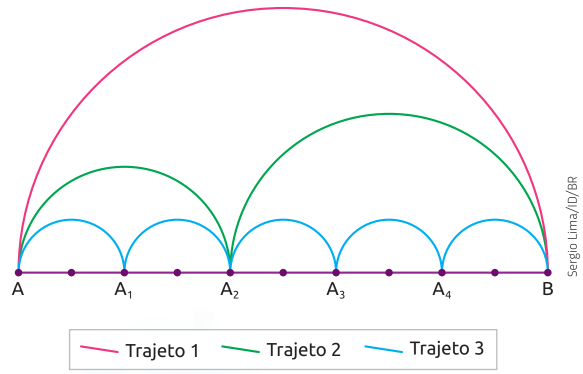
b) 2 350°?

c) 4 452°?

d) 4 790°?

8. Em um experimento, foi registrado o trajeto de um corpo do ponto *A* ao ponto *B* de três modos diferentes. Veja o esquema ao lado representando os três trajetos em diferentes cores.

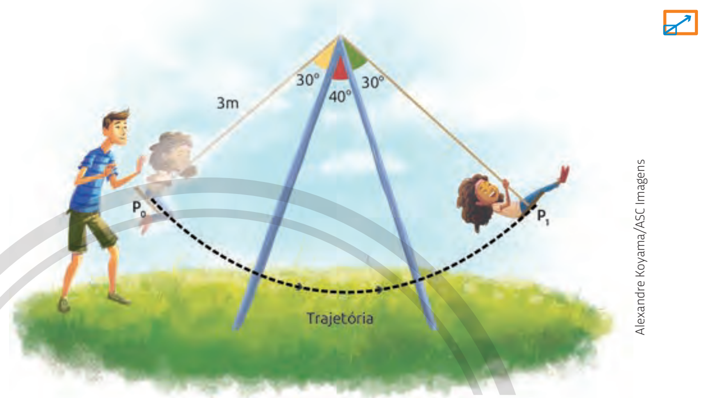
Considerando que o trajeto entre dois pontos distintos descreve uma semicircunferência e sabendo que $\overline{AB}$ foi dividido em dez partes iguais, qual é o menor trajeto percorrido por este corpo? Justifique.



Sergio Lima/ID/BR

9. **Desafio** Um balanço, sendo solto de um ponto P_0, percorre uma trajetória pendular até o ponto P_1, conforme mostra a imagem ao lado.

Desprezando o atrito e as forças de resistência que envolvem esse movimento na primeira oscilação, calcule a distância aproximada percorrida de P_0 a P_1.



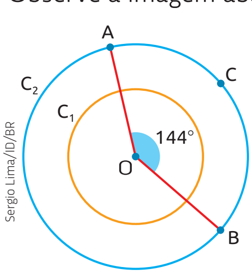
Alexandre Koyama/ASC Imagens

10. Para cada medida de arco a seguir, determine:
- o arco congruente à 1ª determinação positiva;
- a expressão geral da medida dos arcos côngruos a ele.

a) 405°   b) $\frac{28\pi}{3}$ c) $-\frac{34\pi}{6}$ d) $-3\,600°$

11. Sendo a soma das medidas dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ igual a $\frac{8}{6}\pi$ e a medida de $\overset{\frown}{AB}$ é igual ao triplo da medida de $\overset{\frown}{CD}$ mais 5°, determine a medida dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ em radianos.

12. Observe a imagem abaixo.

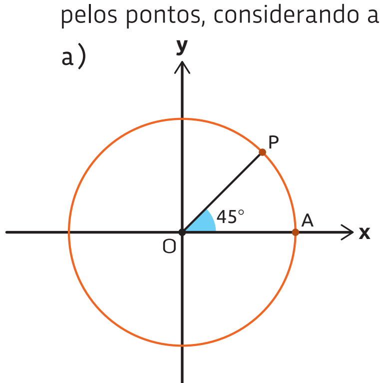


Sergio Lima/ID/BR

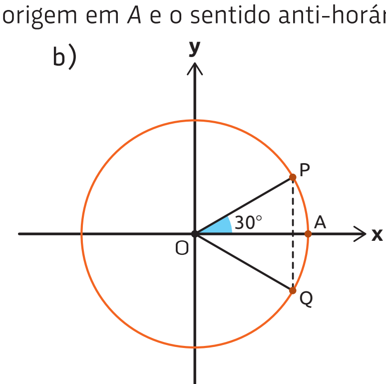
Sabendo que o comprimento de C_1 é igual a 6π cm e que o comprimento de C_2 é $\frac{5}{3}$ do comprimento de C_1, determine o comprimento do arco $\overset{\frown}{ACB}$.

13. Determine a expressão geral, em radianos, das medidas dos arcos de extremidades indicadas pelos pontos, considerando a origem em *A* e o sentido anti-horário.

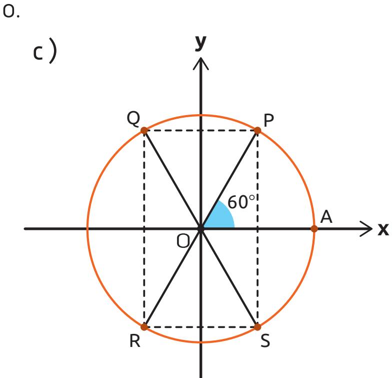
a)



b)



c)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Seno, cosseno e tangente de um arco trigonométrico

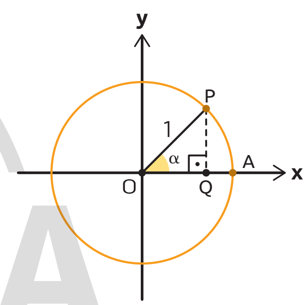
Ao estudar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente relacionadas a ângulos internos de triângulos retângulos, foram definidos sen α, cos α e tg α para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Agora, veremos os valores de sen α, cos α e tg α de um ângulo α, para $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

> Nesta coleção, utilizaremos a notação sen, cos e tg para indicar seno, cosseno e tangente, respectivamente. Em geral, nas calculadoras e em *software* matemático, é utilizada a notação internacional *sin*, *cos* e *tan*.

Seno e cosseno de um arco trigonométrico

No triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo α é a razão entre as medidas do cateto oposto a α e da hipotenusa. Por sua vez, o cosseno de um ângulo agudo α é a razão entre as medidas do cateto adjacente a α e da hipotenusa.

Considere P um ponto da circunferência trigonométrica correspondente à extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α.

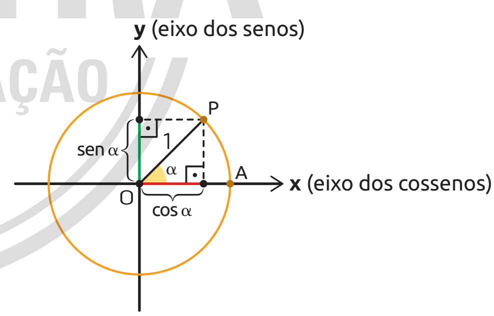


Do triângulo retângulo OPQ, temos que:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{1} = PQ$$

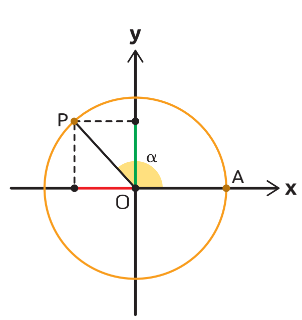
$$\cos\alpha = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} = OQ$$

Desse modo, sen α corresponde à ordenada do ponto P e o cosα corresponde à abscissa do ponto P. Por esse motivo, o eixo das ordenadas é chamado eixo dos senos e o das abscissas é chamado eixo dos cossenos.



O seno e o cosseno de um arco cuja extremidade P pertence aos demais quadrantes são definidos como a ordenada e a abscissa dessa extremidade, respectivamente.

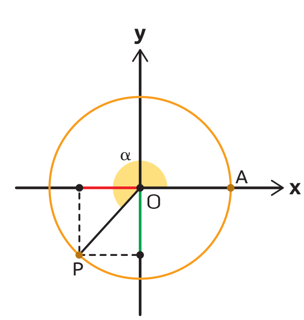
- 2º quadrante



A ordenada de P é positiva e a abscissa de P é negativa, logo:

sen $\alpha > 0$ e cos $\alpha < 0$

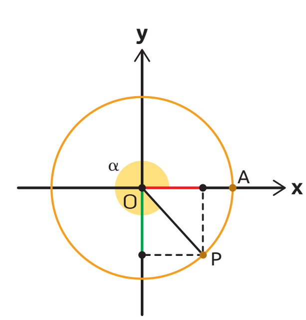
- 3º quadrante



A ordenada de P é negativa e a abscissa de P é negativa, logo:

sen $\alpha < 0$ e cos $\alpha < 0$

- 4º quadrante



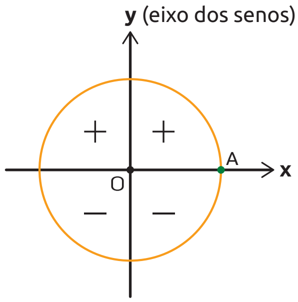
A ordenada de P é negativa e a abscissa de P é positiva, logo:

sen $\alpha < 0$ e cos $\alpha > 0$

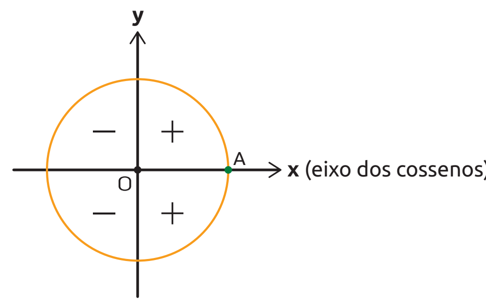
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

De maneira resumida, podemos construir os seguintes esquemas:

- Sinais do seno



- Sinais do cosseno



Tangente de um arco trigonométrico

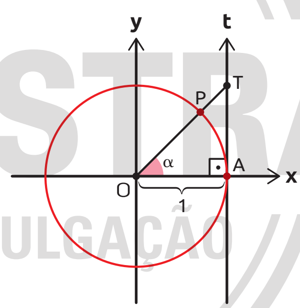
No triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo α é a razão entre as medidas do cateto oposto a α e do cateto adjacente a ele.

Para representar geometricamente o valor correspondente à tangente de um arco, vamos acrescentar uma reta *t* tangente à circunferência trigonométrica no ponto *A*, com a mesma orientação do eixo *Oy*.

Considere *P* um ponto da circunferência trigonométrica correspondente à extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α.

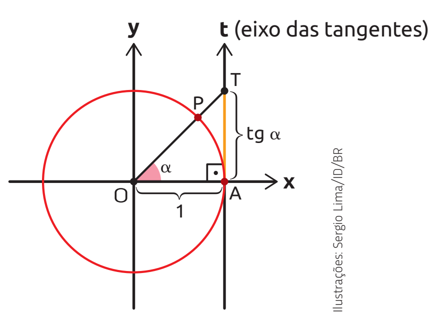
Do triângulo retângulo *OTA*, temos que:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{TA}{AO} = \frac{TA}{1} = TA$$



Logo $\text{tg}\,\alpha$ corresponde à medida algébrica de $\overline{TA}$, em que *T* é o ponto de intersecção da reta *t* com a reta que contém *OP*. Por esse motivo, a reta *t* é chamada eixo das tangentes.

Para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e para $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ a reta que contém $\overline{OP}$ será paralela à reta *t*, não havendo um ponto de intersecção *T* entre elas. Assim, para esses arcos, a tangente não está definida.



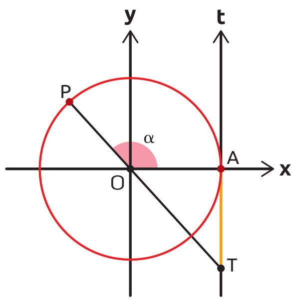
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

A tangente não está definida para arcos de medida α, tal que $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

A medida algébrica de um segmento de reta orientado é um número real que pode ser positivo, negativo ou nulo.

A tangente de um arco cuja extremidade P pertence aos demais quadrantes é definida como a medida algébrica de $\overline{TA}$, em que T é a intersecção da reta que contém $\overline{OP}$ com a reta t.

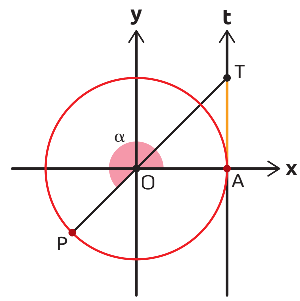
- 2º quadrante



A medida algébrica de $\overline{TA}$ é menor do que zero, logo:

$$\text{tg}\,\alpha < 0$$

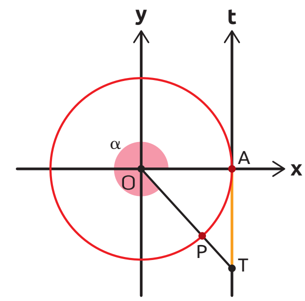
- 3º quadrante



A medida algébrica de $\overline{TA}$, é maior do que zero, logo:

$$\text{tg}\,\alpha > 0$$

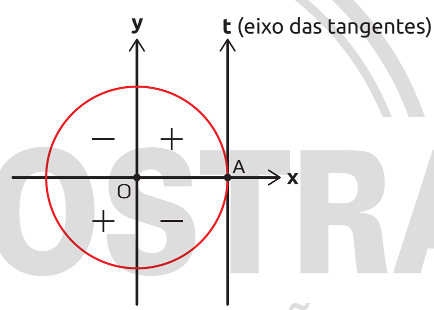
- 4º quadrante



A medida algébrica de $\overline{TA}$ é menor do que zero, logo:

$$\text{tg}\,\alpha < 0$$

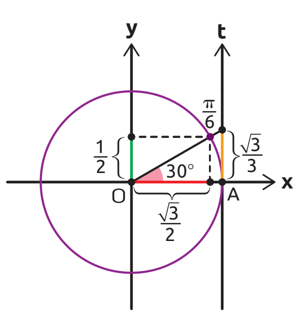
De maneira resumida, podemos construir o seguinte esquema para os sinais da tangente:



Ângulos notáveis

Agora, veremos o valor correspondente ao seno, ao cosseno e à tangente de alguns ângulos chamados **notáveis**, que recebem este nome por aparecerem com frequência no estudo da Trigonometria.

$30° \text{ ou } \dfrac{\pi}{6}$

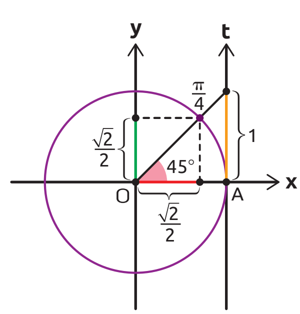


$$\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$45° \text{ ou } \dfrac{\pi}{4}$

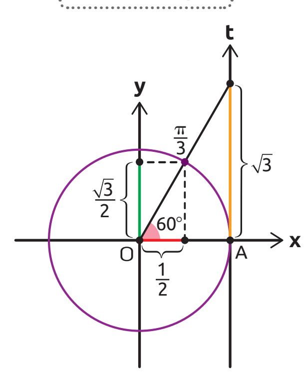


$$\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$$

$60° \text{ ou } \dfrac{\pi}{3}$



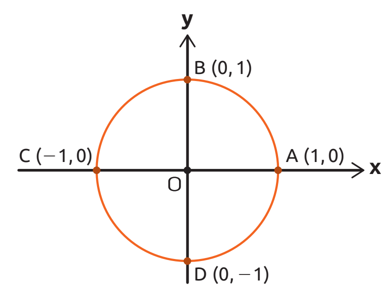
$$\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

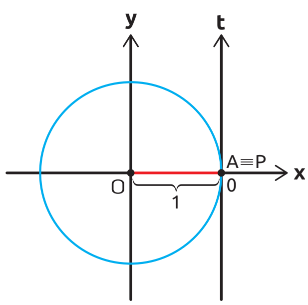
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Como a circunferência trigonométrica tem raio unitário, as coordenadas *A*, *B*, *C* e *D* dos pontos de intersecção da circunferência trigonométrica com os eixos ortogonais são as indicadas na figura ao lado.



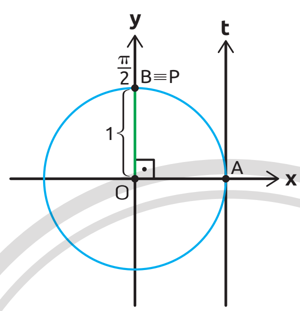
Assim, podemos determinar os valores do seno, do cosseno e da tangente dos arcos cujas extremidades *P* coincidem com esses pontos de intersecção, quando existirem.

0° ou 0



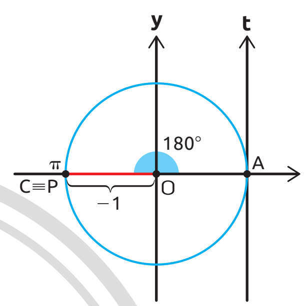
$\text{sen}\, 0 = 0$
$\cos 0 = 1$
$\text{tg}\, 0 = 0$

90° ou $\frac{\pi}{2}$



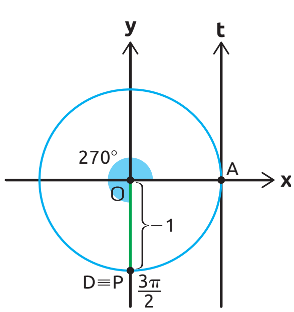
$\text{sen}\, \frac{\pi}{2} = 1$
$\cos \frac{\pi}{2} = 0$
$\text{tg}\, \frac{\pi}{2}$ não está definida

180° ou π



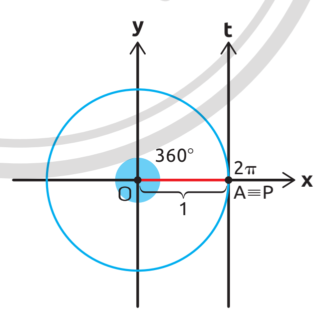
$\text{sen}\, \pi = 0$
$\cos \pi = -1$
$\text{tg}\, \pi = 0$

270° ou $\frac{3\pi}{2}$



$\text{sen}\, \frac{3\pi}{2} = -1$
$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$
$\text{tg}\, \frac{3\pi}{2}$ não está definida

360° ou 2π



$\text{sen}\, 2\pi = 0$
$\cos 2\pi = 1$
$\text{tg}\, 2\pi = 0$

Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Organizando esses valores em um único quadro, temos:

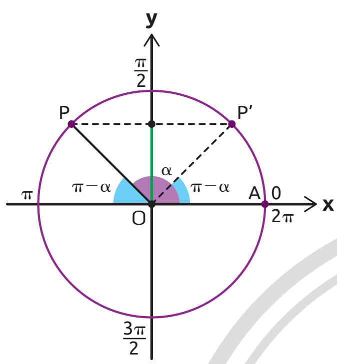
α	0° ou 0	30° ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou $\frac{\pi}{4}$	60° ou $\frac{\pi}{3}$	90° ou $\frac{\pi}{2}$	180° ou π	270° ou $\frac{3\pi}{2}$	360° ou 2π
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	não está definida	0	não está definida	0

Redução ao 1º quadrante

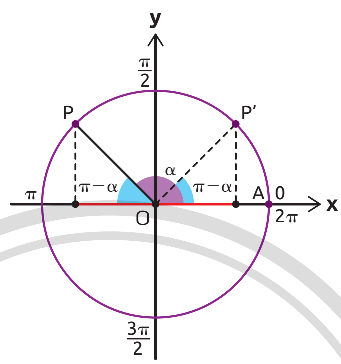
Vamos determinar o valor do seno, do cosseno e da tangente de arcos em qualquer quadrante, relacionando-os com os respectivos valores do 1º quadrante.

Arcos do 2º quadrante

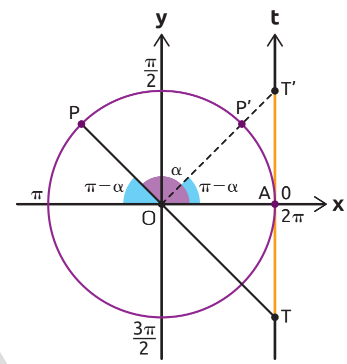
Considerando P um ponto da circunferência trigonométrica correspondente à extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, tal que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, temos:



$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}(\pi - \alpha)$



$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$

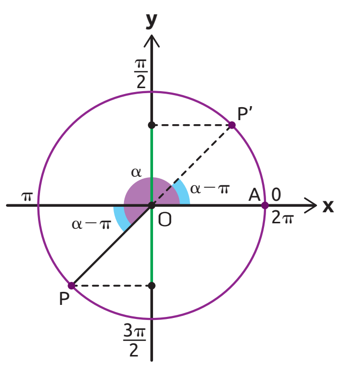


$\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}(\pi - \alpha)$

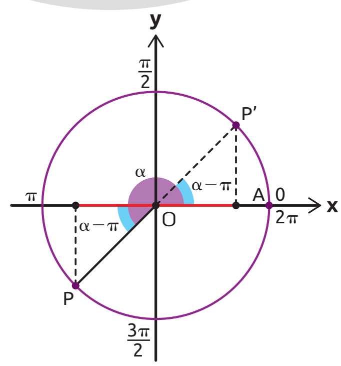
Nesse caso, P' é simétrico a P em relação ao eixo Oy.

Arcos do 3º quadrante

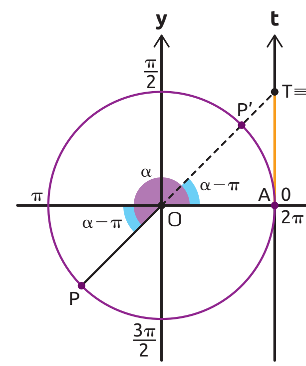
Considerando P um ponto da circunferência trigonométrica correspondente à extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, tal que $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, temos:



$\text{sen}\,\alpha = -\text{sen}(\alpha - \pi)$



$\cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi)$



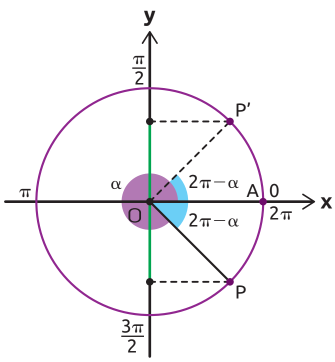
$\text{tg}\,\alpha = \text{tg}(\alpha - \pi)$

Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

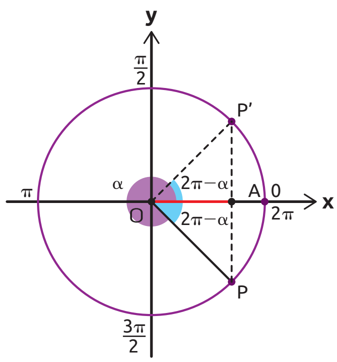
Nesse caso, P' é simétrico a P em relação ao centro da circunferência O.

Arcos do 4º quadrante

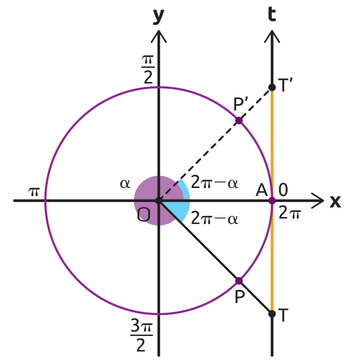
Considerando P um ponto da circunferência trigonométrica correspondente à extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, tal que $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, temos que:



$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(2\pi - \alpha)$



$\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$



$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)$

Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Nesse caso, P' é simétrico a P em relação ao eixo Ox.

As relações aqui obtidas valem para qualquer arco α, sendo necessário apenas obter a 1ª determinação positiva desse arco.

Atividades resolvidas

R7. Calcule o valor de:

a) $\cos 1140°$

b) $\operatorname{sen}\frac{19\pi}{4}$

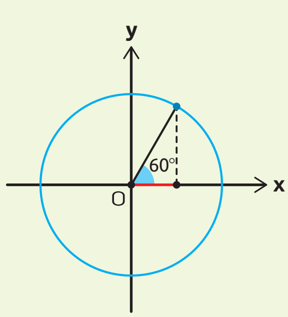
Resolução

a) Para calcular o valor de $\cos 1140°$, inicialmente, obtemos a 1ª determinação positiva do arco de 1140°.

$$\begin{array}{r|l} 1140 & 360 \\ \hline 60 & 3 \end{array}$$

$\underbrace{60}_{\text{1ª determinação positiva}}$ $\underbrace{3}_{\text{quantidade de voltas completas}}$

Dessa maneira, sabemos que $\cos 1140° = \cos 60°$ e que a extremidade do arco de 60° fica no 1º quadrante.



Sendo $\cos 60° = \frac{1}{2}$, então $\cos 1140° = \frac{1}{2}$.

b) Para calcular o valor de $\operatorname{sen}\frac{19\pi}{4}$, inicialmente obtemos a 1ª determinação positiva do arco de $\frac{19\pi}{4}$.

$$\frac{\frac{19\pi}{4}}{2\pi} = \frac{19\pi}{4} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{19}{8}$$

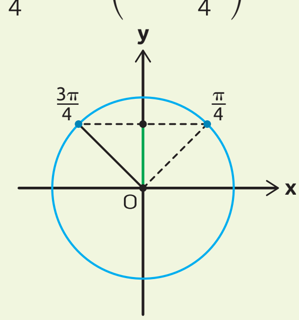
$$\begin{array}{r|l} 19 & 8 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$$

$\underbrace{2}_{\text{quantidade de voltas completas}}$

Então, $\frac{19\pi}{4} - 2 \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{4}$.

Como a extremidade do arco de $\frac{19\pi}{4}$ encontra-se no 2º quadrante, fazemos:

$$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Sendo $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

R8. Verifique que a relação $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ é válida para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$.

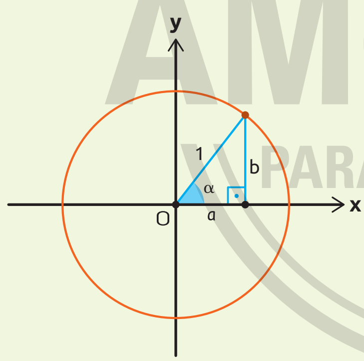
Resolução

Para os casos em que $\alpha \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, sabemos que $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, pois é possível verificar efetuando os cálculos.

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\text{sen}\,\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$	1	1	1	1	1

Se $\alpha \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, existe um triângulo retângulo com hipotenusa 1 e catetos $a = |\cos\alpha|$ e $b = |\text{sen}\,\alpha|$, como mostra a figura. Pelo teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = 1^2$. (I)

Assim, $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.



Além disso, $\cos\alpha = \frac{a}{1} \Rightarrow \cos\alpha = a$ (II) e $\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{1} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = b$ (III).

Utilizando as expressões **II** e **III**, temos que

$$a^2 = \cos^2\alpha \text{ e } b^2 = \text{sen}^2\alpha.$$

Assim, da expressão **I** concluímos:

$$|a|^2 + |b|^2 = |1|^2 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Portanto, $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

A relação $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ é válida para qualquer ângulo α.

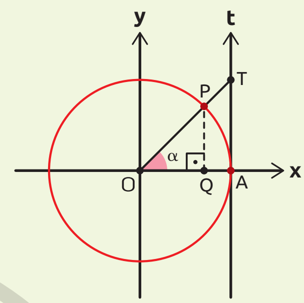
R9. Verifique que a relação $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ é válida para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$ com $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$.

Resolução

Para os casos em que α é igual a 0, π ou 2π, sabemos que $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$, pois

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0}{\cos\alpha} = 0$$

Considerando que $\alpha \notin \{0, \pi, 2\pi\}$ e sabendo que $\text{tg}\,\alpha$ corresponde à medida algébrica de $\overline{TA}$, ou seja, $\text{tg}\,\alpha = TA$, representamos a seguinte imagem.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Como $\triangle PQO$ é semelhante a $\triangle TAO$, pois os ângulos correspondentes são congruentes, concluímos que $\frac{|PQ|}{|OQ|} = \frac{|TA|}{|OA|}$.

Sendo $|PQ| = |\text{sen}\,\alpha|$, $|OQ| = |\cos\alpha|$ e $|OA| = 1$, temos:

$$\frac{|\text{sen}\,\alpha|}{|\cos\alpha|} = \frac{|TA|}{1} \Rightarrow |TA| = \frac{|\text{sen}\,\alpha|}{|\cos\alpha|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\text{tg}\,\alpha| = \frac{|\text{sen}\,\alpha|}{|\cos\alpha|}$$

Analisando o sinal do quociente de $\text{sen}\,\alpha$ por $\cos\alpha$ em cada quadrante e comparando com o sinal da $\text{tg}\,\alpha$ nos mesmos quadrantes, obtemos:

1º Q	$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$
2º Q	$\frac{\text{sen}\,\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha$
3º Q	$\frac{-\text{sen}\,\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$
4º Q	$\frac{-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha$

Como os sinais são iguais em cada quadrante, temos que $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ é válida no intervalo $[0, 2\pi]$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

A relação $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ é válida para todo $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Atividades

14. Em cada item, verifique se o valor do cosseno é positivo ou negativo para o arco indicado.

a) $3\,120°$ b) $\frac{37\pi}{6}$ c) $-1\,665°$ d) $-\frac{25\pi}{4}$

15. Identifique a qual quadrante pertence α em cada caso a seguir.

a) $\text{sen}\,\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$
b) $\text{sen}\,\alpha < 0$, $\text{tg}\,\alpha = 1$
c) $\cos\alpha > 0$, $\text{tg}\,\alpha > 0$
d) $\text{sen}\,\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$
e) $\text{sen}\,\alpha > 0$, $\text{tg}\,\alpha = -1$
f) $\cos\alpha < 0$, $\text{tg}\,\alpha > 0$

16. Determine o valor do seno, do cosseno e da tangente para os arcos a seguir.

a) $\frac{13\pi}{6}$
b) $-1\,620°$
c) $\frac{7\pi}{4}$
d) $4\,050°$
e) $\frac{4\pi}{3}$
f) $-\frac{19\pi}{6}$

17. Conhecendo o valor de $\text{sen}\alpha$, com α no intervalo apresentado, calcule $\cos\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$ nos itens abaixo.

a) $\text{sen}\,\alpha = -\frac{3}{5}$, com $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

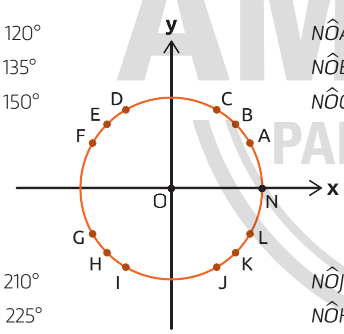
b) $\text{sen}\,\alpha = \frac{12}{15}$, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

c) $\text{sen}\,\alpha = -\frac{5}{13}$, com $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

18. Na circunferência trigonométrica abaixo, cada ponto representa a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico.

$N\hat{O}D = 120°$
$N\hat{O}E = 135°$
$N\hat{O}F = 150°$

$N\hat{O}A = 30°$
$N\hat{O}B = 45°$
$N\hat{O}C = 60°$



$N\hat{O}G = 210°$
$N\hat{O}H = 225°$
$N\hat{O}I = 240°$

$N\hat{O}J = 300°$
$N\hat{O}K = 315°$
$N\hat{O}L = 330°$

Sergio Lima/ID/BR

a) Que ponto é simétrico ao ponto *A* em relação ao eixo *Oy*?

b) Que ponto é simétrico ao ponto *B* em relação ao eixo *Ox*?

c) Que ponto é simétrico ao ponto *C* em relação ao centro da circunferência?

19. Desafio Determine o valor de *A* em cada expressão.

a) $A = \dfrac{-\text{sen}\,2x + \cos\frac{x}{2} + \text{sen}\,5x}{\cos 4x - \text{tg}\,3x}$, para $x = 60°$.

b) $A = \dfrac{\text{sen}\,4x + \cos 5x + \text{sen}\,x - \text{sen}\,6x}{\cos 2x + \text{tg}\,3x - \text{sen}\,2x}$, para $x = 45°$.

20. (EsPCEx-SP) O valor de $(\cos 165° + \text{sen}\,155° + \cos 145° - \text{sen}\,25° + \cos 35° + \cos 15°)$ é

a) $\sqrt{2}$ b) -1 c) 0 d) 1 e) $\frac{1}{2}$

21. Existe algum quadrante em que $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$ são simultaneamente positivos? E simultaneamente negativos? Justifique no caderno.

22. Em grupo Junte-se a um colega e verifiquem se a desigualdade $\cos x + \text{sen}\,x > 0$ é sempre verdadeira para qualquer valor de x. Justifiquem.

Funções trigonométricas

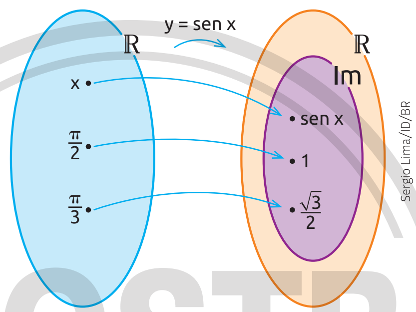
Originalmente, o objetivo da Trigonometria estava relacionado à determinação dos elementos de um triângulo. Mas, com sua evolução, surgiu a necessidade de se atribuir a ideia de função de uma variável real às noções de seno, cosseno e tangente.

As funções trigonométricas são periódicas e podem ser adaptadas para descrever fenômenos de natureza periódicos, oscilatórios ou vibratórios, como o som, os batimentos cardíacos, o movimento dos planetas e das marés, entre outras aplicações.

Periódico: que reaparece em intervalos regulares; que apresenta regularidade.

Função seno

Seno do número real x é o seno do arco de x radianos. Assim, para $x = \frac{\pi}{4}$ associamos o valor $\frac{\sqrt{2}}{2}$, pois $\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



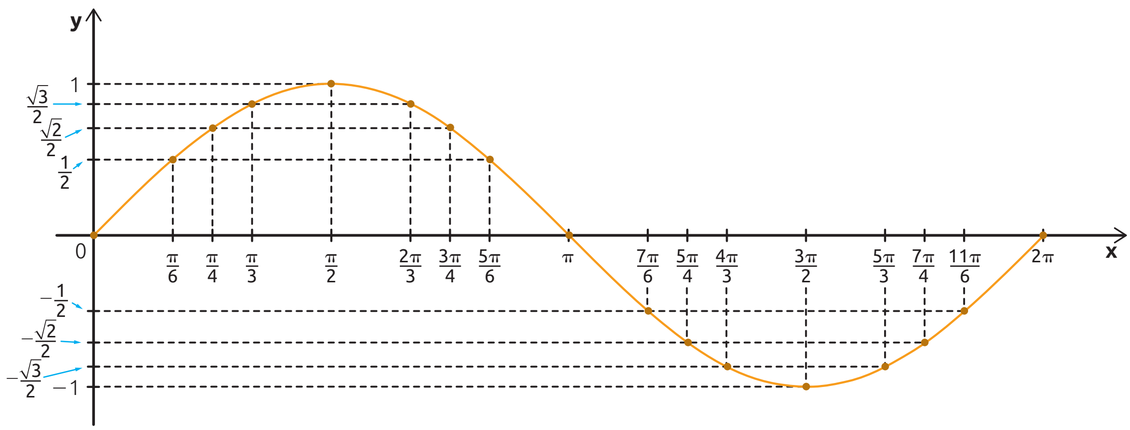
Denominamos função seno a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao correspondente seno de x, isto é, $f(x) = \text{sen}\,x$.

Para esboçar o gráfico que representa a função seno, atribuímos valores a x, determinamos os valores correspondentes para $y = f(x)$ e obtemos os pares ordenados (x, y).

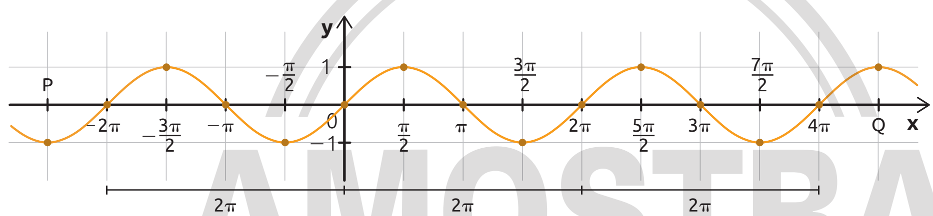
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \text{sen}\,x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
(x, y)	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$	$(\pi, 0)$

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \text{sen}\,x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
(x, y)	$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$	$(2\pi, 0)$

Esboçando o gráfico de f, temos:



O gráfico da função seno é constituído por infinitos pontos que formam uma curva chamada **senoide**. Estendido para valores de x menores do que zero e maiores do que 2π, o gráfico da função seno pode ser representado da seguinte maneira:



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Na imagem acima, qual é a abscissa do ponto P? E a abscissa do ponto Q?

O gráfico da função seno se repete periodicamente a cada intervalo de comprimento 2π, pois:

$$\text{sen}\, x = \text{sen}\left(x + 2k\pi\right), \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Observe que $2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, corresponde a uma quantidade k de voltas completas.

Dizemos que o gráfico da função seno é **periódico** e que seu período é 2π.

De maneira prática, para determinar o período observando o gráfico, é preciso verificar o deslocamento horizontal necessário para que o comportamento da curva "comece a se repetir".

Observando o gráfico da função seno, nota-se que seus valores variam de -1 até 1, ou seja, $-1 \leqslant \text{sen}\, x \leqslant 1$. Portanto, a imagem da função seno é o intervalo real $\left[-1, 1\right]$.

Gilles Personne nasceu em Roberval, França, em 1602 e faleceu em Paris em 1675. Entre as obras desse geômetra e físico francês, existem contribuições significativas para a Matemática, das quais podemos destacar o primeiro esboço de um arco da curva senoide em 1635.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

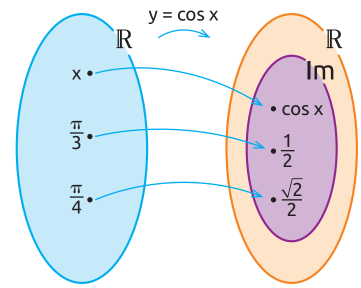
Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Função cosseno

Cosseno do número real x é o cosseno do arco de x radianos.

Assim, por exemplo, para $x = \frac{\pi}{6}$ associamos o valor $\frac{\sqrt{3}}{2}$, pois $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

> Denominamos função cosseno à função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao correspondente cosseno de x, isto é, $g(x) = \cos x$.



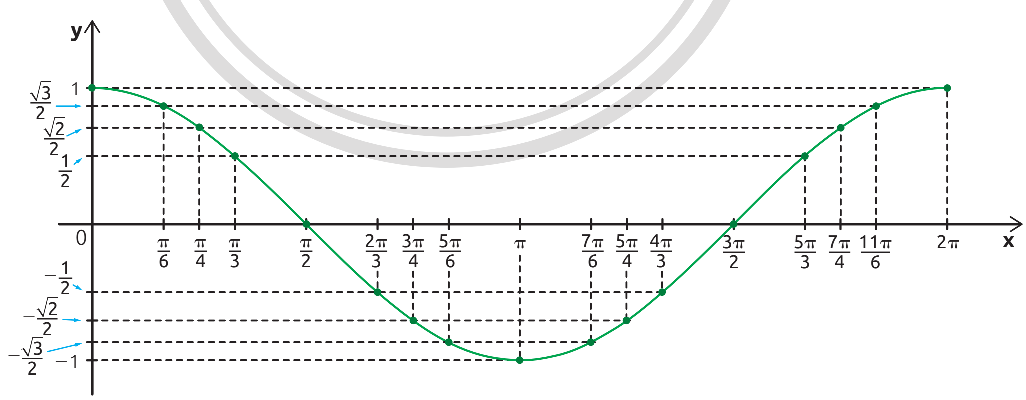
Sergio Lima/ID/BR

Para esboçar o gráfico que representa a função cosseno, atribuímos valores a x, determinamos os valores correspondentes para $y = g(x)$ e obtemos os pares ordenados (x, y).

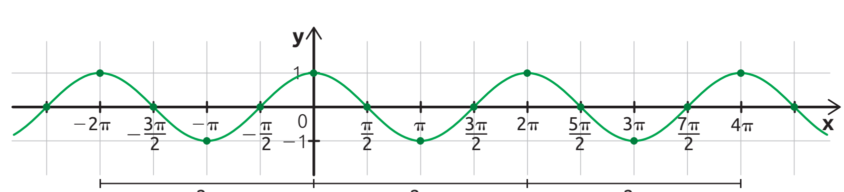
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
(x, y)	$(0, 1)$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(\pi, -1)$

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \cos x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
(x, y)	$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(2\pi, 1)$

Esboçando o gráfico de g, temos:



O gráfico da função cosseno é constituído por infinitos pontos, formando uma curva que pode ser estendida para valores de x menores do que zero e maiores do que 2π. Assim, o gráfico da função cosseno pode ser representado da seguinte maneira:



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

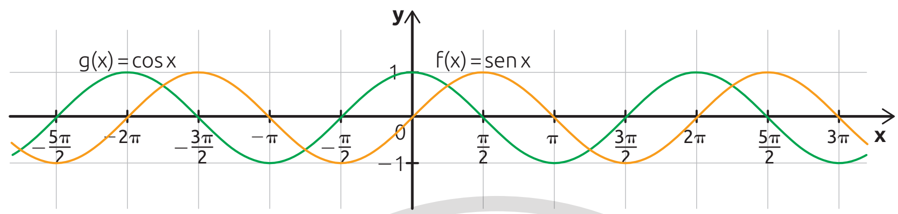
O gráfico da função cosseno também se repete periodicamente a cada intervalo de comprimento 2π, pois:

$$\cos x = \cos(x + 2k\pi), \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Dizemos que o gráfico da função cosseno é **periódico** e que seu período é 2π.

Observando esse gráfico, nota-se que seus valores variam de -1 até 1, ou seja, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Portanto, a imagem da função cosseno é o intervalo real $[-1, 1]$.

Pode-se demonstrar que $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, desse modo o gráfico da função cosseno é congruente ao gráfico da função seno, porém transladado $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda.



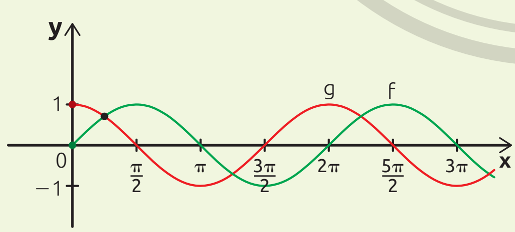
Sergio Lima/ID/BR

De acordo com os gráficos dessas funções, podemos afirmar que, para $k \in \mathbb{Z}$, a função definida por:

- $f(x) = \operatorname{sen} x$ é crescente para $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ e decrescente para $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$;
- $g(x) = \cos x$ é crescente para $x \in [-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$ e decrescente para $x \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$.

Determine os intervalos para os quais a função seno é maior do que zero e os intervalos para os quais a função cosseno é menor do que zero, com $k \in \mathbb{Z}$.

R10. Analise o gráfico da função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e o da função $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \cos x$.



Sergio Lima/ID/BR

a) Para qual valor de x o gráfico de cada função começa a se repetir? Por que isso ocorre?

b) No intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, quais as coordenadas x e y do ponto em que os gráficos das funções f e g se intersectam?

c) Existe algum ponto nessas curvas que seja ponto de máximo do gráfico de f e de g simultaneamente? E ponto de mínimo? Justifique.

Resolução

a) A partir de $x = 2\pi$. Isso ocorre porque o seno e o cosseno são funções periódicas e o período de ambas as funções é 2π.

b) Seno e cosseno admitem o mesmo valor de x e y no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ quando $x = \frac{\pi}{4}$, ou seja, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

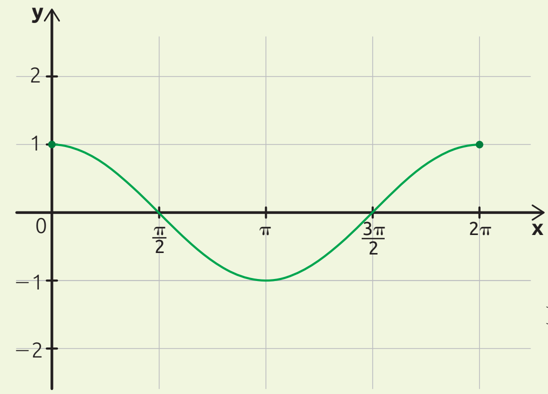
c) Como o valor máximo de $\operatorname{sen} x$ é 1, para satisfazer a relação $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, o cosseno precisa ser 0. Da mesma maneira, como o valor máximo de $\cos x$ é 1, para satisfazer a relação $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ devemos ter $\operatorname{sen} x = 0$. Logo não é possível coincidir o ponto de máximo do gráfico de f com o ponto de máximo do gráfico de g. De modo análogo, tomando o valor mínimo de cada função e elevando ao quadrado na equação, recaímos nos casos anteriormente citados.

Atividades resolvidas

R11. Observe o gráfico da função $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos x$.

a) Para quais valores de x a função f atinge seu valor máximo?

b) Indique o intervalo para o qual a função f é decrescente e o intervalo para o qual é crescente.



Sergio Lima/ID/BR

Resolução

a) Como $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, o ponto de máximo do gráfico de f ocorre quando y é 1. Nesse caso, a imagem será 1 quando x for 0 ou 2π.

Portanto, a função $f(x)$ atinge seu valor máximo em $x = 0$ ou $x = 2\pi$.

b) No intervalo $[0, \pi]$ a função f é decrescente, pois para todo x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$ temos $\cos x_1 > \cos x_2$.

No intervalo $[\pi, 2\pi]$ a função f é crescente, pois para todo x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$ temos $\cos x_1 < \cos x_2$.

Atividades

23. Sejam as funções

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$;
- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \cos x$.

Determine:

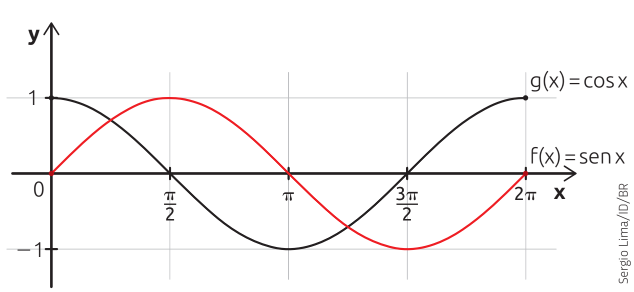
a) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

b) $g(\pi)$

c) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + g\left(\frac{\pi}{3}\right)$

d) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)$

24. Seja $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \cos x$. Observe a representação gráfica dessas funções.



Sergio Lima/ID/BR

Determine para quais valores de x as funções f e g assumem valores iguais.

25. Em cada item, determine o maior subconjunto $A \subset [0, 2\pi]$, tal que a fórmula dada defina uma função de A em $[0, 2\pi]$.

a) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

b) $g(x) = \sqrt{1 - \cos x}$

26. Esboce o gráfico das funções a seguir.

a) $f: \left[\frac{7\pi}{2}, 5\pi\right] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$.

b) $g: \left[-\frac{15\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \cos x$.

c) $h: [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = |\operatorname{sen} x|$.

d) $p: [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$, definida por $p(x) = |\cos x|$.

27. Representando os gráficos de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em um mesmo sistema de coordenadas, obtemos apenas um ponto de intersecção. Sabendo que $f(x) = \operatorname{sen} x$, identifique g entre as alternativas a seguir.

a) $g(x) = \cos x$

b) $g(x) = x - 1$

c) $g(x) = x^2$

d) $g(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

Funções do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$

Vamos estudar agora funções utilizadas para criar modelos matemáticos que representam situações cuja característica é ser periódica, isto é, que se repetem de maneira regular.

As funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas respectivamente por

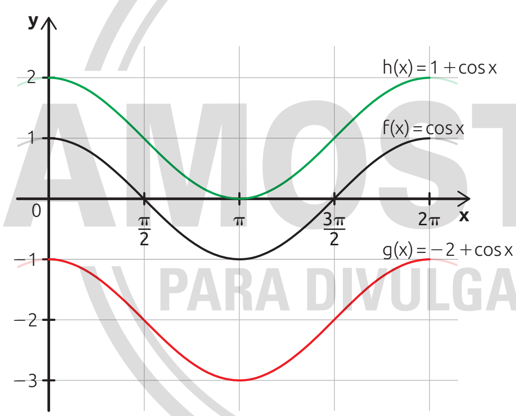
$f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$, com $a, d \in \mathbb{R}$ e $b, c \in \mathbb{R}^*$

são chamadas **funções do tipo trigonométricas**.

As funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = \cos x$, são casos particulares de funções do tipo trigonométricas, pois são obtidas quando $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$.

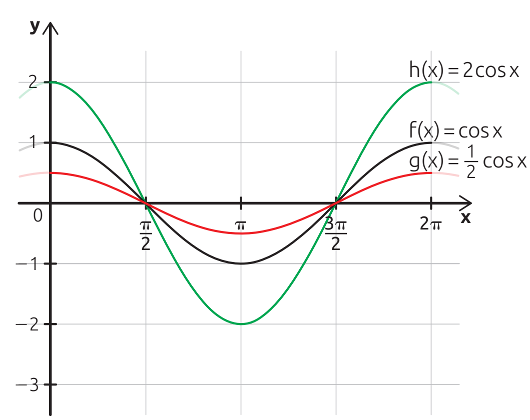
As constantes a, b, c e d das funções do tipo trigonométricas alteram algumas características dos gráficos das funções seno e cosseno, estudadas anteriormente. Em relação aos gráficos das funções seno e cosseno:

- a translada o gráfico da função em $|a|$ unidades verticalmente para cima se $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$. Por exemplo:



Os gráficos das funções h e g são congruentes ao gráfico da função f, porém o gráfico de h é transladado 1 unidade para cima e o gráfico de g é transladado 2 unidades para baixo. Assim, $Im(h) = [0, 2]$, $Im(g) = [-3, -1]$ e o período de ambas é 2π.

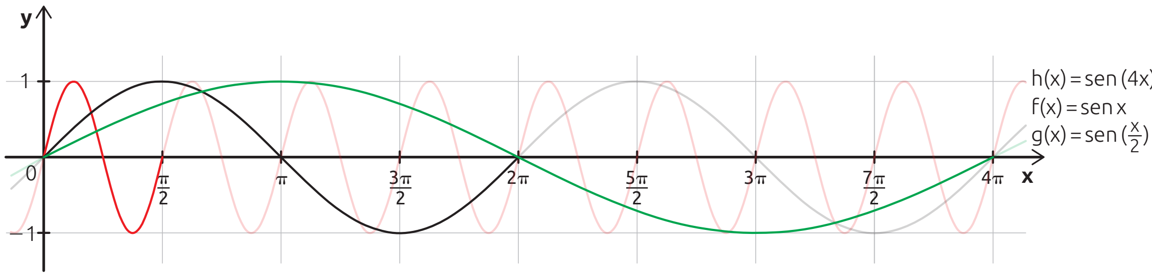
- b amplia verticalmente o gráfico da função se $|b| > 1$ ou comprime verticalmente se $|b| < 1$. Por exemplo:



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

O gráfico de h é ampliado verticalmente e o gráfico de g é comprimido verticalmente. Assim, $Im(h) = [-2, 2]$, $Im(g) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ e o período de ambas é 2π.

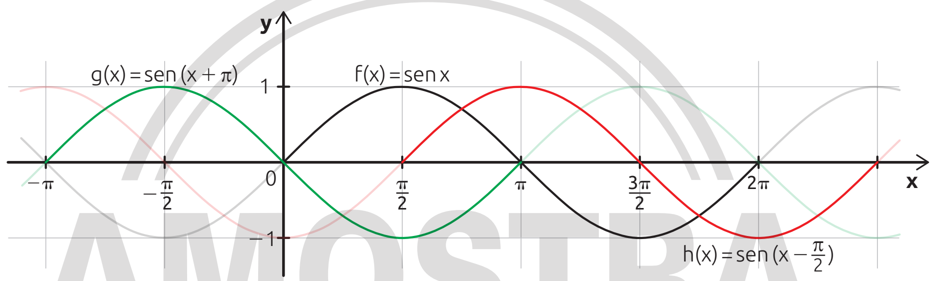
- c amplia o período da função se $|c| < 1$ e comprime o período se $|c| > 1$. Por exemplo:



O gráfico de h é comprimido horizontalmente e o gráfico de g é ampliado horizontalmente. Assim, a imagem de ambas é $[-1, 1]$, o período de h é $\frac{\pi}{2}$ e o período de g é 4π.

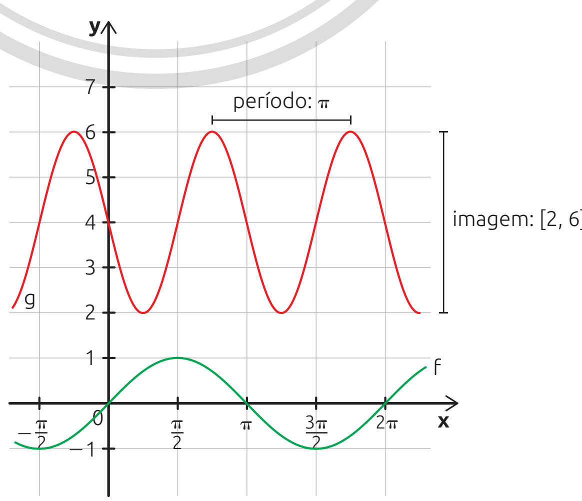
O período de uma função do tipo trigonométrica é $p = \frac{2\pi}{|c|}$.

- d translada horizontalmente o gráfico da função em $\left|\frac{d}{c}\right|$ unidades para a esquerda se $d > 0$ ou para a direita se $d < 0$. Por exemplo:



Os gráficos das funções h e g são congruentes ao gráfico da função f, porém o gráfico de h é transladado horizontalmente $\frac{\pi}{2}$ unidades para a direita e o gráfico de g é transladado horizontalmente π unidades para a esquerda. Assim, a imagem de ambas é $[-1, 1]$ e o período de ambas é 2π.

Observe os gráficos das funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \text{sen}\, x$, e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = 4 + 2\text{sen}(2x + \pi)$, em um mesmo plano cartesiano.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Em relação ao gráfico da função f, o gráfico da função g foi transladado 4 unidades para cima $(a > 0)$, ampliado verticalmente $(|b| > 1)$, comprimido horizontalmente $(|c| > 1)$ e transladado horizontalmente $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda $(d > 0)$.

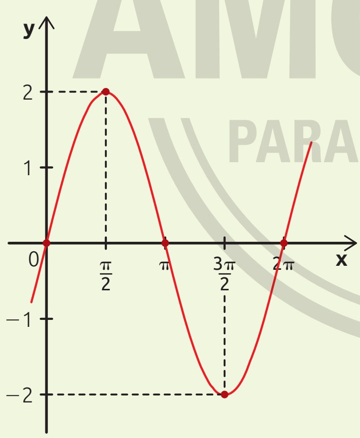
R12. Esboce o gráfico da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \cdot \text{sen}(x)$ e determine o seu conjunto imagem.

Resolução

Inicialmente, vamos construir um quadro com alguns valores de $x \in \mathbb{R}$.

x	$\text{sen}(x)$	$2 \cdot \text{sen}(x)$
0	0	$2 \cdot 0 = 0$
$\frac{\pi}{2}$	1	$2 \cdot 1 = 2$
π	0	$2 \cdot 0 = 0$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$2 \cdot (-1) = -2$
2π	0	$2 \cdot 0 = 0$

Indicando os pontos $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$, $(\pi, 0)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, -2\right)$ e $(2\pi, 0)$ no plano cartesiano e esboçando o gráfico, temos:



Sergio Lima/ID/BR

O conjunto imagem da função f é dado por $Im(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$.

R13. (Acafe) Com o objetivo de auxiliar os maricultores a aumentar a produção de ostras e mexilhões, um engenheiro de aquicultura fez um estudo sobre a temperatura da água na região do sul da ilha, em Florianópolis. Para isso, efetuou medições durante três dias consecutivos, em intervalos de 1 hora. As medições iniciaram às 5 horas da manhã do primeiro dia $(t = 0)$ e os dados foram representados pela função periódica $T(t) = 24 + 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$, em que t indica o tempo (em horas) decorrido após o início da medição e $T(t)$, a temperatura (em °C) no instante t.

O período da função, o valor da temperatura máxima e o horário em que ocorreu essa temperatura no primeiro dia de observação valem, respectivamente:

a) 6 h, 25,5 °C e 10h.

b) 12 h, 27 °C e 10h.

c) 12 h, 27 °C e 15h.

d) 6 h, 25,5 °C e 15h.

Resolução

O período da função T é dado por:

$$p = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|} = 12$$

Logo, o período é de 12 h.

A temperatura máxima ocorre quando $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$, visto que $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$.

Assim:

$$24 + 3 \cdot 1 = 27$$

Logo, a temperatura máxima é 27 °C.

Para determinar o horário em que ocorreu a temperatura 27 °C no primeiro dia de observação, fazemos:

$$T(t) = 24 + 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$27 = 24 + 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$1 = \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$$

Para $1 = \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$ é necessário que $\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} = 0 + 2k\pi$. Então:

$$\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi$$

$$\pi t + 2\pi = 12k\pi$$

$$t + 2 = 12k$$

$$t = 12k - 2, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 1$, segue que $t = 12 \cdot 1 - 2 = 10$, isto é, a temperatura máxima ocorreu 10 h após o início das medições. Assim, o horário que ocorreu a temperatura de 27 °C foi às 15 h, pois $5 + 10 = 15$.

Portanto, a alternativa correta é **c**.

Atividades

28. Sejam as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = -3 + 5\,\text{sen}(2x)$ e $g(x) = 4\cos(3x - \pi)$. Determine:

a) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b) $g\left(\frac{\pi}{3}\right)$

c) $D(f)$

d) $Im(g)$

e) período de f

f) período de g

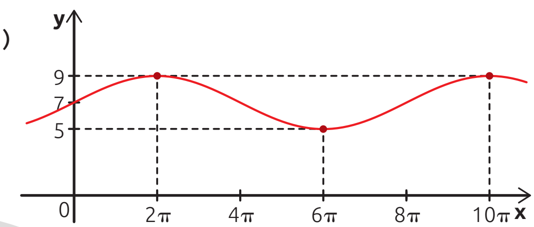
29. Identifique e relacione cada gráfico a sua respectiva lei de formação. Para isso, escreva em seu caderno a letra e o símbolo correspondentes.

a) $f(x) = -4 + 2\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

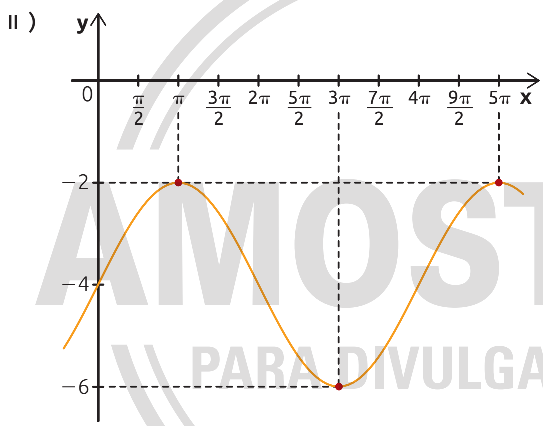
b) $g(x) = 7 - 2\,\text{sen}\left(\frac{1}{4}x - \pi\right)$

c) $h(x) = -4\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

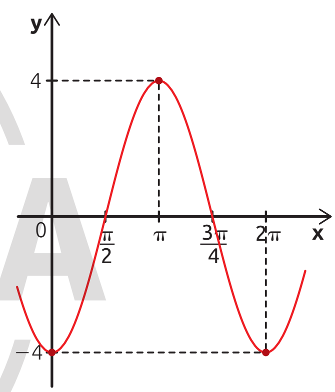
I)



II)



III)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

30. Determine o período e a imagem das funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dadas suas leis de formação.

a) $q(x) = 5\,\text{sen}\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$

b) $r(x) = 3 - \cos\left(2\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $s(x) = -4 + 2\,\text{sen}\left(\frac{3}{2}x + \pi\right)$

31. Esboce o gráfico de cada função definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada sua lei de formação.

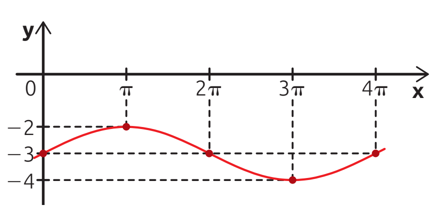
a) $q(x) = \cos(2x)$

b) $r(x) = -3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

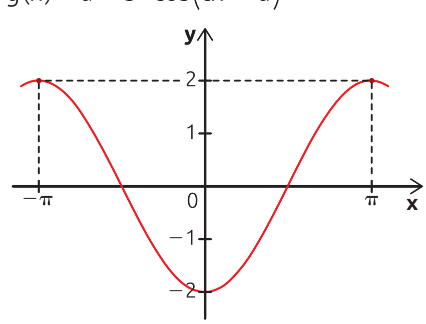
c) $s(x) = 2 - 2\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

32. Sabendo que as funções f e g a seguir estão definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, determine as constantes a, b, c e d, com $a, d \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ e $c \in \mathbb{R}^*_+$. Em seguida, escreva a lei de formação de cada função.

a) $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$



b) $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

33. Calcule o valor máximo das funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dadas suas leis de formação.

a) $f(x) = 8 + 19\cos(2x - 5)$

b) $g(x) = -1 - 4\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x - 3\right)$

34. (Enem/Inep) Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por $y = a \cdot \text{sen}\left[b(x + c)\right]$, em que os parâmetros *a*, *b*, *c* são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda.
O(s) único(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s) é(são)

a) *a* b) *b* c) *c* d) *a* e *b* e) *b* e *c*

35. No dia 28 de setembro de 2015, uma equipe de estudiosos modelou aproximadamente as marés do Porto de Cabedelo, na Paraíba, pela função $h\colon [0, 24] \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = 1{,}3 + 1{,}4 \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{6}t - \dfrac{41\pi}{60}\right)$, em que *h* representa a altura da maré, em metros, e *t*, o tempo, em horas. Sabendo que as marés alta e baixa ocorrem duas vezes ao dia, resolva o que se pede.


Rogério Reis/Pulsar Imagens

Silos de armazenagem no estuário do rio Paraíba, no Porto de Cabedelo (PB), em fevereiro de 2013.

Marés são movimentos periódicos do nível do mar influenciados pela ação do Sol e da Lua sobre partículas líquidas dos oceanos.

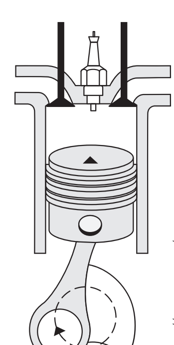
Estuário: embocadura larga de um rio, sensível ao efeito das marés.

a) Qual foi a altura máxima que as marés atingiram nesse dia? E a altura mínima?

b) Qual é o período dessa função?

36. (UFPR) O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro, como ilustra a figura. Suponha que em um instante *t*, em segundos, a altura $h(t)$ do pistão, em centímetros, possa ser descrita pela expressão:

$$h(t) = 4\,\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{0{,}05}\right) + 4$$


UFPR/Fac-símile: ID/BR

a) Determine a altura máxima e a mínima que o pistão atinge.

b) Quantos ciclos completos esse pistão realiza, funcionando durante um minuto?

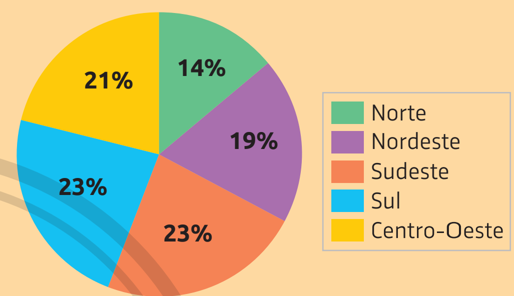
Hipertensão arterial

O coração humano, ao funcionar regularmente, produz um movimento periódico de contração e relaxamento que bombeia o sangue e irriga os órgãos. Quando é transportado pelo corpo por esse bombeamento, o sangue gera uma pressão arterial, que é autorregulada pelo próprio sistema circulatório.

Um tipo de resistência das artérias ou o aumento de volume de sangue, entre outros fatores, podem provocar o desequilíbrio da pressão, conhecido como hipertensão arterial ou pressão alta, considerada uma das doenças mais comuns do mundo. O último levantamento realizado pelo Ministério da Saúde, em 2013, registrou que a hipertensão arterial atinge 21,4% da população brasileira de 18 anos ou mais, o que corresponde a 31,3 milhões de pessoas.

Apesar de ser considerada uma doença "silenciosa", quando a hipertensão atinge níveis muito altos (acima de 200/110) pode-se perceber alguns sintomas como: dores no peito ou de cabeça, tonturas, zumbido no ouvido, fraqueza, visão embaçada e sangramento nasal.

Distribuição da população brasileira com 18 anos ou mais hipertensa, em 2013, por região



Fonte de pesquisa: Pesquisa Nacional de Saúde – 2013. Disponível em: <ftp://ftp.ibge.gov.br/PNS/2013/pns2013.pdf> . Acesso em: 21 jan. 2016.

Para detectar a hipertensão arterial de maneira segura e eficaz é necessário realizar exames de pressão regularmente.

A De acordo com o Ministério da Saúde, qual a porcentagem de indivíduos com diagnóstico de hipertensão arterial na região em que você mora?

B A variação da pressão arterial (em mmHg) de uma pessoa em função do tempo (em s) é dada pela função $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right)$$

e seu gráfico está representado ao lado.

Observando a lei de formação e a representação gráfica, determine o argumento e o período dessa função.

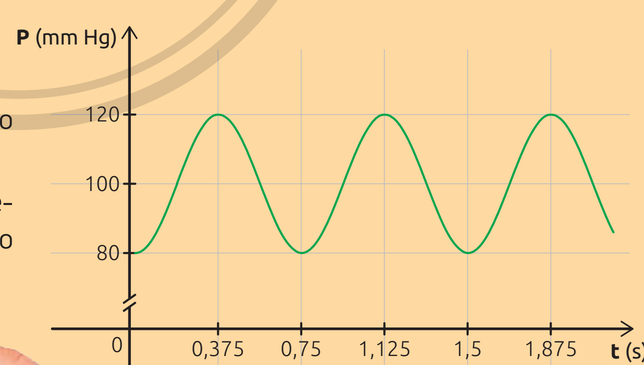


Ilustração: Sergio Lima/ID/BR

mmHg: abreviação de milímetro de mercúrio. É a unidade de medida padronizada para medir pressões (atmosférica, arterial e outras).

Os aparelhos portáteis digitais para medir pressão arterial (esfigmomanômetros) são muito práticos e podem ser usados em casa, desde que tragam o selo do Inmetro e sejam calibrados periodicamente. Na fotografia, a pressão indicada é 120/80 mmHg ou 12 x 8, valor considerado normal. A hipertensão é a elevação desse valor por um período prolongado.

Fotomontagem de Maryane Vioto criada com a fotografia Andrei Shumskiy/Shutterstock.com/ID/BR

Equações trigonométricas

Resolver uma equação trigonométrica significa determinar os valores que a satisfazem.
Veja como resolver alguns tipos de equações trigonométricas.

R14. Resolva as equações.

a) $\cos(3x) = 1$ para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

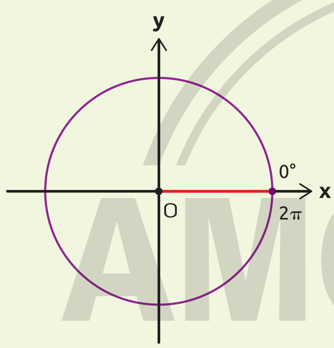
b) $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$

c) $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{3}$ para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

d) $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$ para $x \in \mathbb{R}$

Resolução

a) Considerando $3x = z$, obtemos $\cos z = 1$.
Nesse caso, $z = 0 + 2k\pi \Rightarrow z = 2k\pi$ ou $z = 2\pi + 2k\pi$.



Sendo assim, $3x = 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{3}$ ou

$3x = 2\pi + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}(1 + k)$.

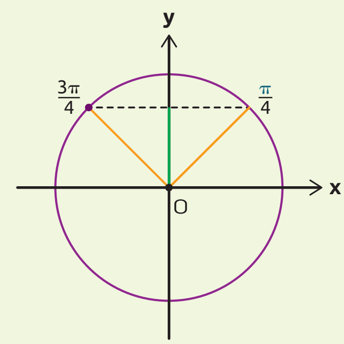
Analisando os valores inteiros positivos que k pode assumir, temos:

- para $k = 0$, $x = 0$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3}$.
- para $k = 1$, $x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$.
- para $k = 2$, $x = \dfrac{4\pi}{3}$ ou $x = 2\pi$.
- para $k = 3$, $x = 2\pi$ ou $x = \dfrac{8\pi}{3}$.

Como $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, o conjunto solução é $S = \left\{0, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$.

b) Fazendo $x + \dfrac{\pi}{6} = t$, obtemos $\operatorname{sen} t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Nesse caso, $t = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $t = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$.



Logo, $x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$

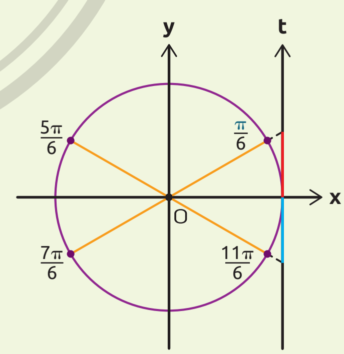
ou $x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi$.

Como $x \in \mathbb{R}$, o conjunto solução é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) Como a tangente está elevada ao quadrado, fazemos:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, temos:

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{6}$

$\operatorname{tg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \dfrac{5\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{11\pi}{6}$

Logo o conjunto solução é

$S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$.

d) Considere sen $x = y$. Então

$$2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\,x - 1 = 0 \Rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0$$

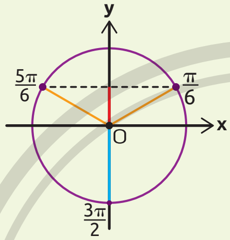
Aplicando a fórmula resolutiva da equação de 2º grau, temos:

$$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -\dfrac{4}{4} = -1 \\ y_2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Substituindo y por sen x, temos:

- sen $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$
- sen $x = -1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$



Sergio Lima/ID/BR

Portanto, o conjunto solução é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

R15. Determine os valores reais de m para os quais a equação sen $x = 3 - 4m$ tem solução.

Resolução

Como sen $x = 3 - 4m$, temos que:

$$-1 \leqslant \text{sen}\,x \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant 3 - 4m \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overbrace{-4}^{-1-3} \leqslant \overbrace{-4m}^{3-3-4m} \leqslant \overbrace{-2}^{1-3}$$

Dividindo todos os membros da inequação por -4, obtemos $\dfrac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$.

Portanto, a equação tem solução para os valores reais m tais que $\dfrac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$.

Atividades

37. Determine para quais valores de x a igualdade é satisfeita nos itens abaixo.

a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, com $0 \leqslant x \leqslant \pi$

b) $\text{sen}\,x = 0$, com $0 < x \leqslant \pi$

c) $\cos x = \dfrac{1}{2}$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

d) $\text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, com $0 \leqslant x \leqslant \pi$

38. Resolva as equações abaixo.

a) $\cos(2x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, com $\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$

b) $\text{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{2}$, com $x \in \mathbb{R}$

c) $\text{sen}(4x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, com $x \in \mathbb{R}$

d) $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 1$, com $0 \leqslant x \leqslant \pi$

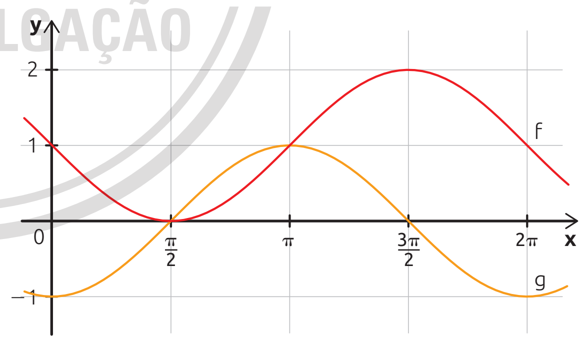
39. Determine a solução real das seguintes equações no primeiro quadrante.

a) $\text{sen}(2x) - \sqrt{3}\cos(2x) = 0$

b) $\text{sen}\,x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$

40. Observe o gráfico das funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 1 - \text{sen}\,x$ e $g(x) = -\cos x$.



Sergio Lima/ID/BR

Determine para quais valores de x o gráfico da função f intersecta o gráfico da função g.

41. Determine os valores reais de m para os quais cada equação tem solução.

a) $\text{sen}\,x = 2m - 5$

b) $4m - \cos x = -2$

c) $m - \text{sen}\,x = -2$

d) $\cos x = 7 - 2m$

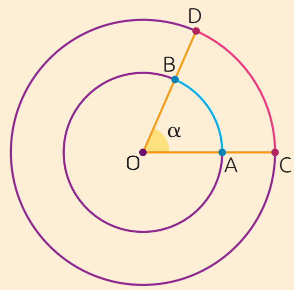
42. Determine os possíveis valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem as equações modulares abaixo.

a) $|\text{sen}(3x)| = 1$

b) $|\cos(x - \pi)| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Verificando rota

1. Observe, abaixo, os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ em duas circunferências concêntricas com raios diferentes. Justifique por que a medida desses arcos são iguais.



2. O que são arcos côngruos?

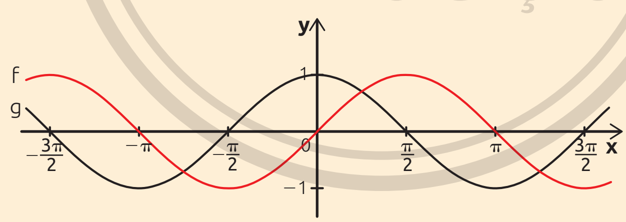
3. Copie o quadro a seguir no caderno, completando-o com os sinais das razões trigonométricas de acordo com o quadrante.

	1º quadrante	2º quadrante	3º quadrante	4º quadrante
sen x	positivo			
cos x				
tg x				

4. Vimos no capítulo **1** que as funções trigonométricas são periódicas. Em sua opinião, o que significa uma função ser periódica? Caso necessário, pesquise em um dicionário o significado do termo "periódico".

5. Cite fenômenos físicos da natureza que podem ser descritos por funções do tipo trigonométricas.

6. Estão representados a seguir os gráficos das funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = \cos x$. Identifique semelhanças e diferenças entre o gráfico das funções f e g.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

7. De acordo com o que estudamos, as constantes a, b, c e d alteram algumas características dos gráficos das funções do tipo trigonométricas.

a) Qual constante interfere no período de uma função do tipo trigonométrica, comprimindo-o ou dilatando-o?

b) Para modificar a imagem de uma função do tipo trigonométrica ampliando ou comprimindo o gráfico verticalmente, qual constante devemos alterar?

8. Por suas características, o gráfico da função cosseno pode ser considerado uma translação horizontal da curva senoide. Dadas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = \cos x$, que alterações deveríamos fazer na lei de formação de f para que o gráfico dessa função coincidisse com o gráfico da função g? Como ficaria a lei de formação dessa função?

9. A página de abertura da unidade **1** apresentou a meteorologia como assunto inicial, informando como o tempo e o clima influenciam o nosso cotidiano. Qual dos conteúdos trabalhados durante esta unidade se relaciona com esse tema?

Ampliando fronteiras

Não se vê, mas se mede

Geralmente os filmes de batalhas no espaço sideral surpreendem pelos impressionantes efeitos especiais e sons estrondosos de tiros e explosões. No entanto, você sabia que o som não se propaga no vácuo?

Ondas sonoras

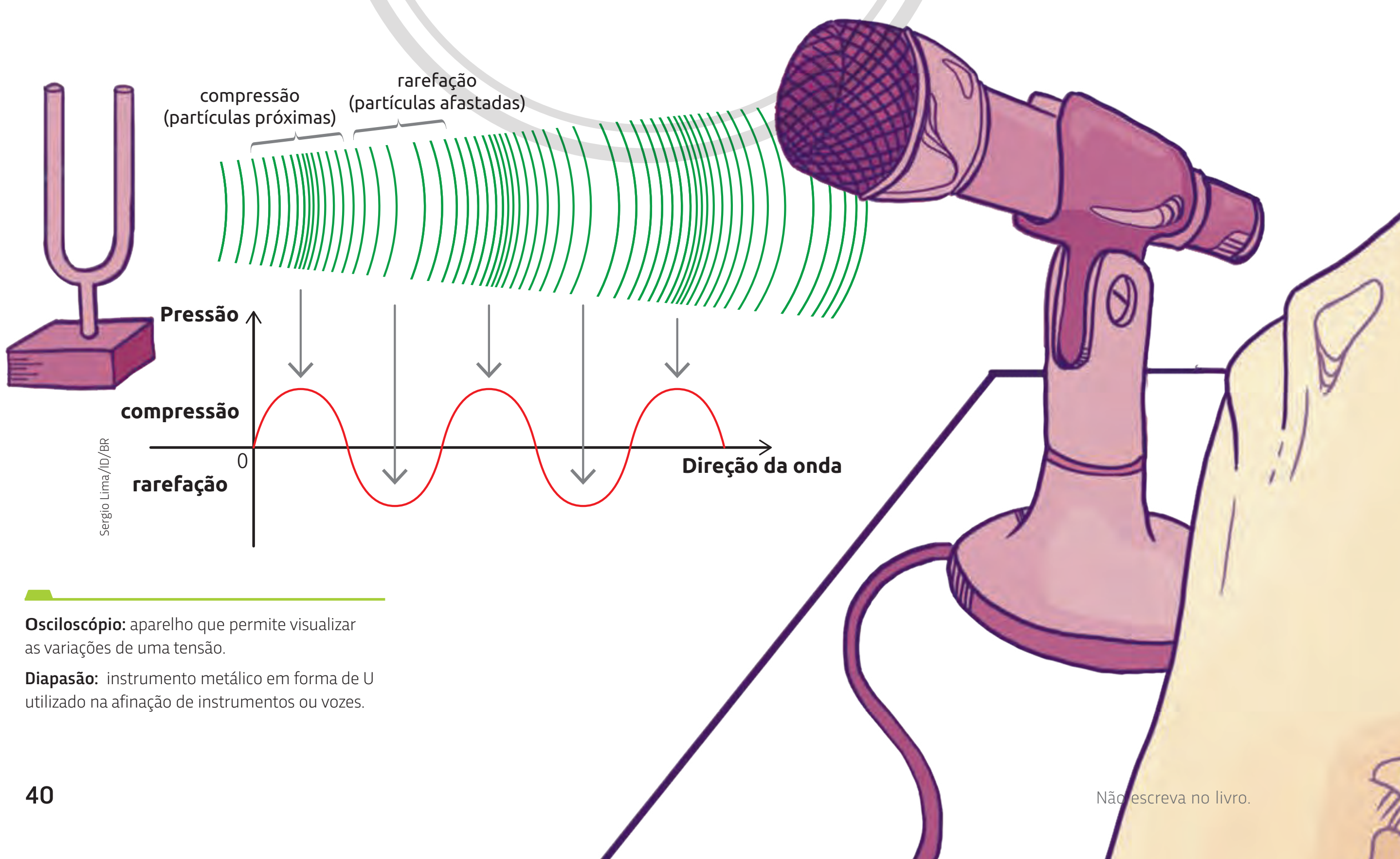
O som é uma vibração no meio material, que pode ser sólido, líquido ou gasoso. Quando a superfície de um tambor ou a corda de um violão vibra, um grupo de partículas do ar também vibra, o qual, por sua vez, provoca a vibração de outro grupo. Com isso, o som é propagado por meio de ondas mecânicas longitudinais denominadas ondas sonoras, que consistem em compressões e rarefações que o ar sofre.

Embora não possamos vê-la, um osciloscópio capta e converte as ondas sonoras em sinais elétricos, exibindo em seu visor um gráfico do sinal elétrico em função do tempo ou um espectro sonoro da onda. Veja a comparação de duas ondas sonoras no visor do osciloscópio.

Frequência sonora

A quantidade dessas ondas é uma grandeza denominada frequência, cuja unidade para um segundo é o Hertz (Hz). Se o movimento gera uma onda por segundo, por exemplo, dizemos que a frequência é de 1 Hz. No ouvido humano, sentimos as ondas entre 20 e 20 000 Hz vibrarem em nosso tímpano, que as converte em impulsos elétricos reconhecidos pelo cérebro.

Uma onda sonora pura tem uma única frequência, produzida, por exemplo, por um diapasão. Os sons emitidos por outros instrumentos, como tambor ou violão, são complexos porque têm duas ou mais frequências diferentes e sobrepostas.



Sergio Lima/ID/BR

Osciloscópio: aparelho que permite visualizar as variações de uma tensão.

Diapasão: instrumento metálico em forma de U utilizado na afinação de instrumentos ou vozes.

A Se colocarmos um despertador dentro de um recipiente fechado a vácuo podemos escutá-lo tocar? Justifique.

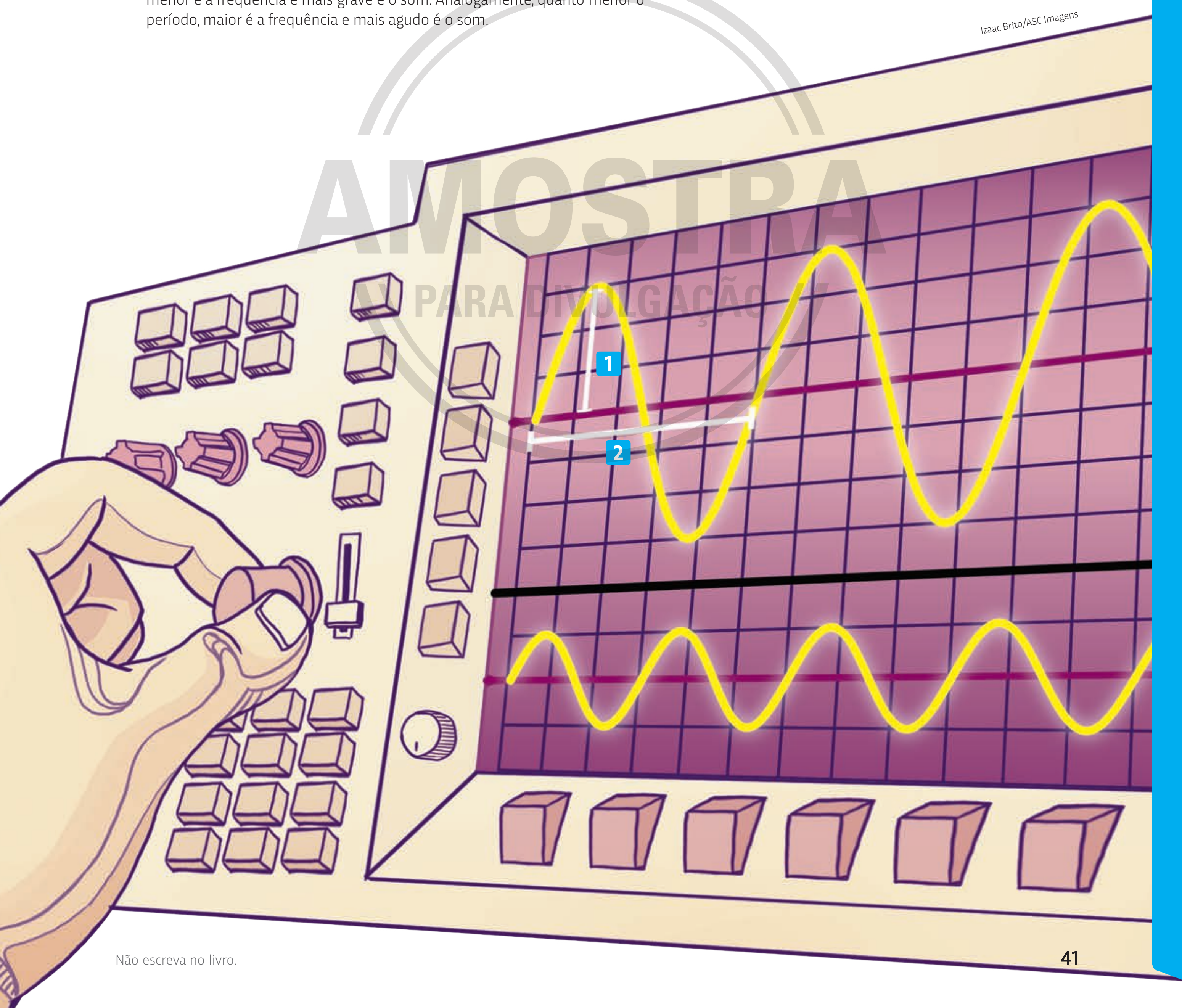
B No visor do osciloscópio são apresentados dois espectros sonoros. Qual deles representa o som mais agudo e fraco? E o som mais grave e forte?

C Se a malha quadriculada apresentada no visor do osciloscópio é de tal maneira que o comprimento horizontal de cada quadradinho representa 0,001 segundo, calcule a frequência de cada onda sonora. Nesse caso, elas podem ser captadas pelo ouvido humano? Justifique.

1 **Amplitude:** propriedade do som que pode ser fraco ou forte, referindo-se à sua intensidade; quanto maior a amplitude, maior o volume.

2 **Período:** tempo compreendido entre duas vibrações; quanto maior o período, menor é a frequência e mais grave é o som. Analogamente, quanto menor o período, maior é a frequência e mais agudo é o som.

Izaac Brito/ASC Imagens



unidade 2

- **capítulo 2** Análise combinatória
- **capítulo 3** Probabilidade

O sal é uma substância resultante da ligação iônica entre um cátion, proveniente de uma base, e um ânion, proveniente de um ácido. Historicamente importante, na Antiguidade, o sal servia de moeda de troca nas transações comerciais e já foi motivo de guerras e pretexto para a dominação de povos. Como existem na natureza muitas bases e muitos ácidos, podemos combinar vários elementos para formar sais, sendo o cloreto de sódio – $NaC\ell$ –, ou sal de cozinha, o mais conhecido deles. Combinar elementos é uma ideia que está associada ao assunto de Combinatória, apresentado nesta unidade.

Extração de sal nas salinas de Porto do Mangue (RN), em 2015.

Nesta unidade, você vai conhecer alguns métodos que facilitam a contagem para estabelecer quantidades, sem necessariamente contar os elementos um a um, e também vai utilizar a probabilidade para resolver situações com o raciocínio combinatório e analisar fenômenos científicos e sociais.

capítulo

2 Análise combinatória

Princípio fundamental da contagem

Ao estudar análise combinatória, ou simplesmente combinatória, empregamos métodos para a contagem de elementos de um conjunto finito que apresentam certas regularidades. Em um problema desse tipo, a contagem de elementos ocorre de acordo com as condições dadas e, muitas vezes, não é necessário ou não é viável que se explicite todos os elementos a serem contados.

A situação a seguir exemplifica o **princípio fundamental da contagem**.

Para assistir a uma peça de teatro, Rogério precisa comprar o ingresso em um dos 4 guichês do teatro e passar por uma das 2 catracas disponíveis. Então, há duas escolhas a serem feitas: primeiro ele escolhe o guichê, tendo 4 opções, e, depois, escolhe a catraca, tendo 2 opções. Podemos esquematizar todas essas possibilidades em um diagrama denominado **diagrama de árvore** ou **árvore de possibilidades**.

Alexandre Koyama/ASC Imagens

guichê 1 — catraca 1 → (guichê 1, catraca 1)
guichê 1 — catraca 2 → (guichê 1, catraca 2)
guichê 2 — catraca 1 → (guichê 2, catraca 1)
guichê 2 — catraca 2 → (guichê 2, catraca 2)
guichê 3 — catraca 1 → (guichê 3, catraca 1)
guichê 3 — catraca 2 → (guichê 3, catraca 2)
guichê 4 — catraca 1 → (guichê 4, catraca 1)
guichê 4 — catraca 2 → (guichê 4, catraca 2)

Outra maneira de esquematizar essas possibilidades é organizando as escolhas em linhas e colunas.

guichê \ catraca	1	2
1	(guichê 1, catraca 1)	(guichê 1, catraca 2)
2	(guichê 2, catraca 1)	(guichê 2, catraca 2)
3	(guichê 3, catraca 1)	(guichê 3, catraca 2)
4	(guichê 4, catraca 1)	(guichê 4, catraca 2)

Há, no total, $4 \cdot 2 = 8$ modos de Rogério escolher um guichê e uma catraca. Esse resultado está de acordo com o princípio fundamental da contagem, que diz:

Se há x opções de escolha para realizar A_1 e, realizado A_1, y opções de escolha para realizar A_2, qualquer que tenha sido a primeira escolha, então há $x \cdot y$ modos de se realizar sucessivamente A_1 e A_2.

O princípio fundamental da contagem também é conhecido como **princípio da multiplicação** e vale quando é preciso tomar n decisões. Nesse caso, se há x_i opções de escolha para realizar A_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, então há $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ modos de se realizar sucessivamente $A_1, A_2, \ldots, A_n$ com essas escolhas.

Exemplos:

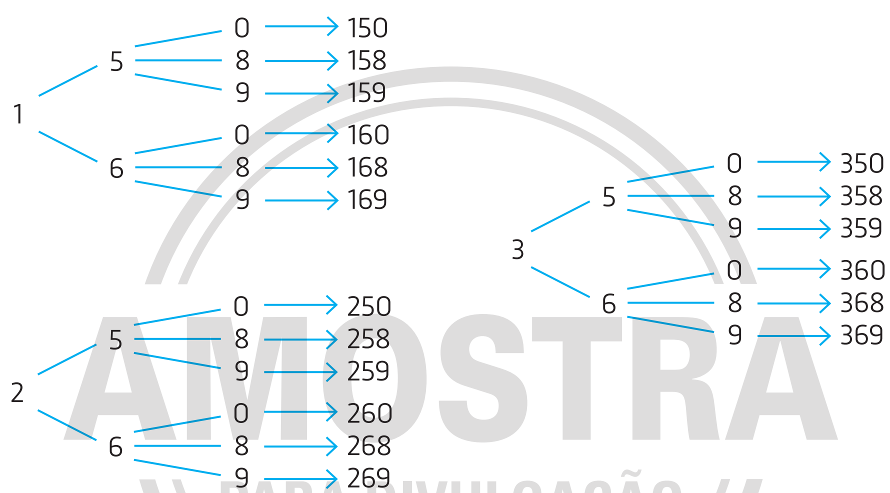
a Vamos contar a quantidade de números de três algarismos em que:

- o 1º algarismo é 1, 2 ou 3;
- o 2º algarismo é 5 ou 6;
- o 3º algarismo é 0, 8 ou 9.

Observe duas maneiras de se fazer essa contagem.

1ª maneira: escrevendo todos os números que satisfazem as condições dadas.

Esses números podem ser determinados com o auxílio de um diagrama de árvore.



São, portanto, 18 números.

2ª maneira: utilizando o princípio fundamental da contagem.

Há 3 modos de escolher o primeiro algarismo, 2 modos de escolher o segundo e 3 de escolher o terceiro. Logo, há $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ números que satisfazem as condições dadas.

b Suponha que, em determinado país, as placas dos veículos devam ser compostas por 3 letras, escolhidas entre as 26 letras do alfabeto, e 3 algarismos, escolhidos entre os de 0 a 9, nessa ordem. Uma possível placa teria a inscrição QMG 177, por exemplo. Para determinar a quantidade máxima de placas diferentes, considere o esquema a seguir, em que cada traço corresponde a uma escolha.

São 26 opções para cada letra e 10 opções para cada algarismo, logo, a quantidade de placas diferentes é $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17\,576\,000$.

Nesses exemplos, cada escolha é independente das demais. No problema das placas dos veículos, por exemplo, tanto faz escolher primeiro uma letra ou um algarismo. Porém, isso nem sempre acontece, como se pode observar nos exemplos a seguir.

c Deseja-se pintar 5 faixas retangulares em um muro, dispostas como mostra a figura.

Ronaldo Lucena/ASC Imagens

A cor de cada faixa deve ser escolhida entre verde, amarelo e azul, sendo 2 faixas vizinhas quaisquer com cores diferentes. Ao pintá-las, ordenadamente, de cima para baixo, temos as seguintes escolhas:

- a primeira faixa pode ser pintada de verde, amarelo ou azul, ou seja, há 3 opções de escolha;
- para cada faixa seguinte, pode-se escolher entre as duas cores diferentes da cor escolhida na faixa anterior, de modo que serão 2 opções em cada uma dessas faixas.

Logo, há $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ modos diferentes de se escolher as cores para pintar o muro.

d Vamos determinar a quantidade de números de três algarismos distintos. Para formar um desses números, escolhemos cada um de seus três algarismos um a um.

- Para o primeiro algarismo, temos 9 opções de escolha, pois não podemos escolher o zero.
- Para o segundo algarismo, temos 9 opções de escolha, pois não podemos escolher um algarismo igual ao primeiro, mas podemos incluir o zero.
- Para o terceiro algarismo, temos 8 opções de escolha, pois não podemos escolher um algarismo igual ao primeiro ou igual ao segundo.

Logo, há $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ números de três algarismos distintos.

e Vamos determinar a quantidade de números pares de três algarismos distintos.

Para que o número seja par, seu último algarismo deve ser 0, 2, 4, 6 ou 8, ou seja, há 5 opções. Porém, a quantidade de opções para o primeiro algarismo depende se o zero foi ou não escolhido para o último algarismo. Assim, há dois casos:

1º caso: se o zero for o último algarismo, então:

- há 1 opção para o último algarismo: 0;
- há 9 opções para o primeiro algarismo, pois o zero não pode ser escolhido;
- há 8 opções para o segundo algarismo, pois já foram escolhidos dois algarismos.

Logo, há $1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$ números de três algarismos distintos terminados em 0.

2º caso: se o zero não for o último algarismo, então:

- há 4 opções para o último algarismo: 2, 4, 6 e 8;
- há 8 opções para o primeiro algarismo, pois o zero e o algarismo escolhido no passo anterior não podem ser escolhidos agora;
- há 8 opções para o segundo algarismo, pois já foram escolhidos dois algarismos.

Logo, há $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$ números de três algarismos distintos terminados em 2, 4, 6 ou 8.
Assim, há $72 + 256 = 328$ números pares de três algarismos distintos.

Ao adicionar as quantidades obtidas nos dois casos, usamos o chamado **princípio aditivo da contagem** ou **princípio da adição**. A soma é justificada porque todo número procurado satisfaz apenas a condição do 1º caso ou do 2º caso.

R1. Uma escola oferece aos alunos duas atividades extracurriculares: esporte e cultura. No caso de esporte, os alunos podem escolher entre xadrez, basquete e atletismo; no caso de cultura, entre clube de teatro e clube de literatura. Sabendo que cada aluno deve escolher uma modalidade de esporte e uma de cultura, determine, utilizando o diagrama de árvores, quantas possibilidades de escolha cada aluno terá.

Resolução

- xadrez
  - clube de teatro → xadrez e clube de teatro
  - clube de literatura → xadrez e clube de literatura
- basquete
  - clube de teatro → basquete e clube de teatro
  - clube de literatura → basquete e clube de literatura
- atletismo
  - clube de teatro → atletismo e clube de teatro
  - clube de literatura → atletismo e clube de literatura

Portanto, cada aluno terá 6 possibilidades de escolha das atividades extracurriculares.

R2. O professor lançou um desafio aos alunos: eles deveriam determinar a quantidade máxima de tentativas para acertar a senha do seu celular, formada pelos 4 algarismos do número 1987.

a) Qual a quantidade máxima de tentativas que se pode fazer para acertar a senha, sabendo que 1987 não é a senha do celular?

b) Se nessa senha fosse possível repetir qualquer um dos algarismos do número 1987, qual seria a quantidade de possibilidades para acertá-la?

Resolução

a) Para determinar a quantidade máxima de tentativas, considere o esquema, em que cada traço corresponde a uma escolha.

São 4 opções para cada algarismo, de maneira que não podemos repeti-los, pois serão usados os 4 na senha. Assim, o total de possibilidades é $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Porém, como o número 1987 não é a senha do celular, devemos excluir essa opção. Portanto, será 23 a quantidade máxima de tentativas.

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{\text{algarismos}}$$

b) Considerando um esquema, conforme apresentado no item anterior, temos:

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{\text{algarismos}}$$

São 4 opções para cada algarismo, já que podemos repeti-los. Assim, o total de possibilidades é $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$.

Atividades

1. Nadar, pedalar e correr são desafios de uma modalidade de triatlo de longas distâncias. Dos muitos inscritos para essa competição, apenas três podem subir ao pódio.

Charlie Crowhurst/Getty Images

Atletas comemorando vitória no pódio em Barcelona, Espanha, ao final da competição feminina de triatlo de longas distâncias, em 4 de outubro de 2015.

a) Sabendo que *A*, *B* e *C* são as três primeiras atletas a concluírem a prova, construa um diagrama de árvore e represente todas as possibilidades de pódio com essas atletas.

b) Nessas condições, quantas são as possibilidades de pódio?

2. Com 4 saias, 4 blusas e 2 casacos, Paula afirma que leva em sua bagagem roupas suficientes para se arrumar de 10 maneiras distintas, no máximo, utilizando em cada vez uma saia, uma blusa e um casaco. Paula está correta? Justifique.

3. A empada é um alimento que pode ser recheado, por exemplo, com espinafre e ricota, frango, berinjela, queijo de minas e tomate seco, e pode ser feita com diversos tipos de massas, como a tradicional massa podre, massa folhada e integral.

a) Construa um quadro e represente as possibilidades de produzir uma empada com uma massa e um recheio usando as opções dadas no texto.

b) De acordo com o item **a**, quantos tipos diferentes de empada podem ser produzidos?

4. Em uma cantina, o cliente pode escolher o sabor do suco e se ele será batido com água ou leite. Observe as opções de sabores oferecidos.

abacaxi	manga	caju	clorofila
couve	melancia	goiaba	coco
maçã	limão	amora	maracujá
banana	beterraba	cupuaçu	morango
mamão	pêssego	uva	framboesa
cenoura	graviola	acerola	melão

Quantas possibilidades de sucos essa cantina oferece?

5. Um restaurante está fazendo uma seleção para contratar um *chef* de cozinha, um cozinheiro e um gerente. De quantas maneiras essa contratação pode ser feita, sabendo que 5 pessoas se candidataram a *chef* de cozinha, 10 a cozinheiro e 15 a gerente?

6. (Enem/Inep) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez, um aluno é sorteado e dá sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

7. Utilizando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos são os números que podemos formar com:

a) 2 algarismos?

b) 3 algarismos distintos?

c) 4 algarismos?

8. Determine a quantidade de números de:

a) 3 algarismos, que podem ser formados com os algarismos 2, 3, 5, 7 e 8.

b) 4 algarismos, que podem ser formados com os algarismos 1 e 4.

9. Considere os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5. Determine a quantidade de múltiplos de 5 que podemos formar com 3 algarismos.

10. Com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9, podemos formar quantos números naturais de 2 ou 4 algarismos distintos?

11. (Enem/Inep) O *designer* português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem estar associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

DESIGNER cria código para ajudar daltônicos a identificar cores. *Folha de S. Paulo*, São Paulo, 7 out. 2011. Disponível em: <www1.folha.uol.com.br/equilibrioesaude/2011/10/986936-designer-cria-codigo-para ajudar-daltonicos-a-identificar-cores.shtml>. Acesso em: 18 dez. 2015 (adaptado).

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

a) 14 b) 18 c) 20 d) 21 e) 23

12. Renata abriu um restaurante que oferece 5 tipos de carne, 4 tipos de massa, 6 tipos de salada e 4 tipos de sobremesa. De quantas maneiras diferentes podemos escolher uma refeição composta por uma opção de cada?

13. Desafio Para desbloquear certa fechadura eletrônica é necessário digitar uma senha formada por 3 algarismos distintos em um dispositivo e, em seguida, digitar em outro dispositivo uma senha formada por 3 letras distintas entre as 26 letras do alfabeto. Qual é a quantidade de senhas possíveis para essa fechadura?

14. (Uneb-BA) Danos de Alimentos Ácidos

O esmalte dos dentes dissolve-se prontamente em contato com substâncias cujo pH (medida da acidez) seja menor do que 5,5. Uma vez dissolvido, o esmalte não é reposto, e as partes mais moles e internas do dente logo apodrecem. A acidez de vários alimentos e bebidas comuns é surpreendentemente alta; as substâncias listadas a seguir, por exemplo, podem causar danos aos seus dentes com contato prolongado.

BREWER, Sarah. *Viva mais e viva bem*: 10 passos para uma vida longa e saudável. v. 1. Rio de Janeiro: Coquetel, 2013. p. 64 (Conteúdo original por Eddison Sadd Editions).

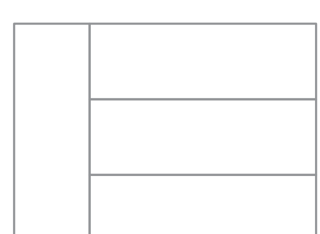
Comida/Bebida	pH
suco de limão/lima	1,8 – 2,4
café preto	2,4 – 3,2
vinagre	2,4 – 3,4
refrigerante de cola	2,7
suco de laranja	2,8 – 4,0
maçã	2,9 – 3,5
uva	3,3 – 4,5
tomate	3,7 – 4,7
maionese/molho de salada	3,8 – 4,0
chá preto	4,0 – 4,2

Considere que em um laboratório foram verificadas, por um técnico, duas amostras de alimentos que constam do quadro e verificado, por ele, que o pH dessas substâncias era, respectivamente, 3,2 e 4,2.

Nessas condições, de posse desse quadro, pode-se afirmar que o número de maneiras distintas que esse técnico tem para tentar identificar, de maneira correta, quais foram os dois alimentos examinados é igual a:

1) 9 2) 10 3) 12 4) 14 5) 15

15. Tendo 5 cores disponíveis para colorir a bandeira a seguir, determine a quantidade de maneiras diferentes que essa bandeira pode ser colorida, de modo que retângulos adjacentes (vizinhos) recebam cores diferentes e cada retângulo seja colorido de uma cor.



Sergio Lima/ID/BR

Fatorial

Veremos agora, uma maneira simplificada de indicar o produto de números naturais consecutivos. Acompanhe o desenvolvimento da situação.

Na segunda-feira, uma turma de Ensino Médio deverá ter aulas das seguintes disciplinas: Matemática, História, Biologia, Química e Língua Portuguesa. De quantos modos é possível ordenar essas aulas, escolhendo uma disciplina para cada um dos 5 horários de aula disponíveis?

		Dia da semana				
Horário		SEG	TER	QUA	QUI	SEX
Aula 1	07:30					
Aula 2	08:20					
Aula 3	09:10					
Aula 4	10:20					
Aula 5	11:10					

Ronaldo Lucena/ASC Imagens

Nessa situação, há 5 modos de escolher a disciplina para a primeira aula, 4 modos para a segunda aula, 3 para a terceira, 2 para a quarta e 1 modo para a última aula. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, há $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ modos de escolher as 5 disciplinas.

Em problemas de combinatória, é comum aparecer produtos de números naturais consecutivos, como na expressão $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Nesses casos, utilizamos a notação de **fatorial** para simplificar a escrita. Assim, a expressão $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ é representada pelo símbolo $5!$, denominado fatorial de 5 ou 5 fatorial.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 2$, definimos $n!$, denominado fatorial de n ou n fatorial, como o produto:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Definimos também $0! = 1$ e $1! = 1$.

Observe que:

$3! = 3 \cdot 2!$

$10! = 10 \cdot 9!$

Em geral, $n! = n \cdot (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Por motivos que podem ser justificados, o fatorial do número zero é, por definição, igual a 1. Precisamos garantir que a propriedade $n! = n \cdot (n-1)!$ seja válida para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Com essa propriedade, também podemos definir $n!$ por recorrência: basta definir $0! = 1$ e, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, definimos $n! = n \cdot (n-1)!$, ou seja:

- $1! = 1 \cdot 0!$
- $2! = 2 \cdot 1!$
- $3! = 3 \cdot 2!$
- $4! = 4 \cdot 3!$

$\vdots$

- $n! = n \cdot (n-1)!$

Assim, a partir de $0! = 1$, definido inicialmente, podemos obter $1!$; a partir de $1!$, obtemos $2!$; e assim por diante.

De qual(is) número(s) natural(is) o fatorial é igual a ele mesmo?

Permutações simples e arranjos simples

Em combinatória, há alguns procedimentos de raciocínio repetidos em diferentes problemas e, por isso, são tomados como modelos em determinadas situações. Porém, não significa que esses procedimentos resolverão qualquer tipo de problema de combinatória. Além disso, apenas a memorização de fórmulas não terá eficácia se o resolvedor não compreender o problema proposto ou se ele não souber o que deve ser feito para resolvê-lo.

A seguir, estudaremos os conceitos de permutação simples e de arranjo simples.

Permutação simples

A ideia que serve de modelo para a permutação simples é a ordenação em fila de n elementos distintos. Quando queremos ordená-los em fila, há n modos de escolher o primeiro elemento da fila, $(n-1)$ modos de escolher o segundo, $(n-2)$ de escolher o terceiro, e assim por diante, até o último, que poderá ser escolhido de 1 modo. Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, há $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ modos de ordenar os n elementos.

Cada possível ordem dos elementos é chamada **permutação simples** e, como acabamos de ver, a quantidade de permutações simples de n elementos distintos é igual a $n!$ e denotada por P_n.

A quantidade de permutações simples de n elementos distintos é o número $P_n = n!$.

Exemplos

a Ao permutar as letras de uma palavra qualquer, obtemos um **anagrama** dessa palavra. Os anagramas da palavra ERA, por exemplo, são: ERA, EAR, REA, RAE, AER e ARE. Como são 3 letras distintas a ser permutadas, a quantidade de anagramas é $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Permutar: trocar a ordem.

b Em um grupo de pessoas, há 2 homens e 4 mulheres. De quantos modos pode-se organizá-las em fila deixando as mulheres juntas?
Neste caso, consideramos, inicialmente, que as mulheres correspondem a uma só pessoa. Se fossem 3 pessoas, haveria $P_3 = 3!$ modos de organizá-las em fila, porém, para cada um desses modos, pode-se permutar as 4 mulheres entre si de $P_4 = 4!$ modos. Logo, a quantidade total de modos é $P_3 \cdot P_4 = 3! \cdot 4! = 6 \cdot 24 = 144$.

A noção de permutação de um conjunto finito de elementos pode ser formalizada com o uso de funções bijetoras. Nessa abordagem, cada função bijetora $f: X \to X$ corresponde a uma permutação do conjunto X, sendo $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito. Uma função $f: X \to X$ é determinada quando se escolhe a imagem de cada elemento $x_i \in X$.

- A imagem de x_1 pode ser escolhida de n modos.
- Como f deve ser injetora, a imagem de x_2 deve ser diferente da imagem de x_1, logo, há $(n-1)$ modos de escolher $f(x_2)$.
- Da mesma maneira, as imagens de $x_3, x_4, \ldots, x_n$ podem ser escolhidas, respectivamente, de $(n-2), (n-3), \ldots, 1$ modos.

Logo, se X é um conjunto com n elementos, a quantidade de funções bijetoras $f: X \to X$ que é possível definir é $P_n = n!$.

Observe que, ao exigir que a função $f: X \to X$ seja injetora, obrigatoriamente f será sobrejetora e, portanto, bijetora. Isso ocorre apenas quando X é um conjunto finito.

Arranjo simples

Suponha que, de uma pilha com 8 livros, deve-se escolher 5 livros para serem colocados em determinada ordem em uma prateleira.

Nesta situação:

Alexandre Koyama/ASC Imagens

- o primeiro livro pode ser escolhido de 8 modos;
- o segundo livro pode ser escolhido de 7 modos;
- o terceiro livro pode ser escolhido de 6 modos;
- o quarto livro pode ser escolhido de 5 modos;
- o quinto livro pode ser escolhido de 4 modos.

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, há $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$ maneiras de se colocar 5 livros na prateleira, cada um escolhido entre os 8 livros iniciais. Nesse problema de contagem, há um conjunto com n elementos $(n = 8)$, mas deseja-se ordenar em fila os elementos de subconjuntos com p elementos $(p = 5)$. Esse é um modelo para o agrupamento chamado **arranjo simples**.

Cada modo de se ordenar em fila p elementos de um conjunto de n elementos, com $p \leqslant n$ é denominado **arranjo simples de *n* elementos tomados *p* a *p***. A quantidade desses arranjos é denotada por $A_{n,p}$.

De acordo com o exemplo apresentado, tem-se $A_{8,5} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

De modo semelhante, utilizando o princípio fundamental da contagem, temos:

- $A_{n,1} = n$
- $A_{n,2} = n \cdot (n-1)$
- $A_{n,3} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$

$\vdots$

- $A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)]}_{p \text{ fatores}}$

$\vdots$

- $A_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_n$

Definimos $A_{n,0} = 1$.

Observe que um arranjo de n elementos tomados n a n corresponde a uma permutação de n elementos.

Exemplos:

a Utilizando apenas os algarismos 1, 2, 3 e 4, quantos números naturais de dois algarismos distintos podem ser formados?

Resolvemos esse problema com a aplicação direta do princípio fundamental da contagem, pois basta observar que o primeiro algarismo pode ser escolhido de 4 modos e o segundo algarismo de 3 modos. Logo, podem ser formados $4 \cdot 3 = 12$ números.

Outra maneira de resolver é observando que se trata de determinar a quantidade de arranjos simples de 4 elementos tomados 2 a 2, ou seja, a resposta é $A_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$. Observe no diagrama de árvore abaixo essas 12 possibilidades.

$$\begin{array}{cccc}
 & 2 \rightarrow 12 & & 1 \rightarrow 31 \\
1 & 3 \rightarrow 13 & 3 & 2 \rightarrow 32 \\
 & 4 \rightarrow 14 & & 4 \rightarrow 34 \\
 & 1 \rightarrow 21 & & 1 \rightarrow 41 \\
2 & 3 \rightarrow 23 & 4 & 2 \rightarrow 42 \\
 & 4 \rightarrow 24 & & 3 \rightarrow 43
\end{array}$$

b Uma construtora vai construir 8 casas. Sabendo que há 15 opções de planta para cada casa e que uma mesma planta não poderá ser utilizada mais de uma vez, escreva uma expressão para calcular de quantas maneiras as 8 casas podem ser construídas de acordo com essas opções de planta.

Podemos obter essa expressão com o princípio fundamental da contagem, pois, para a primeira casa, há 15 opções de planta; para a segunda, há 14 opções; para a terceira, há 13 opções, e assim por diante. Então, obtemos a expressão:

$$\underbrace{A_{15,8}}_{\substack{\text{15 elementos} \\ \text{tomados 8 a 8}}} = \underbrace{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}_{\text{8 fatores}}$$

Essa expressão pode ser simplificada utilizando-se fatoriais, multiplicando-a por $\frac{7!}{7!}$.

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = \frac{15!}{7!}$$

Portanto, $A_{15,8} = \frac{15!}{7!}$ expressa a quantidade de maneiras possíveis de se construir as casas de acordo com as diferentes escolhas de plantas.

O exemplo **b** acima ilustra como podemos obter uma fórmula para $A_{n,p}$ utilizando fatoriais. Assim, temos:

$$A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)]}_{p \text{ fatores}} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Esses são os p primeiros fatores de $n!$. Os outros fatores são:

$$(n-p), (n-p-1), \ldots, 1$$

Se multiplicarmos a expressão por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, não alteramos o seu valor e obtemos:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Portanto, $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Para $n, p \in \mathbb{N}$, com $p \leqslant n$, a quantidade de arranjos simples de n elementos tomados p a p é o número $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Na prática, o uso de fatoriais para escrever a fórmula simplifica a sua escrita, e em algumas situações simplifica também os cálculos. Observe duas maneiras de se calcular $A_{8,3}$.

- $A_{8,3} = \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6}_{3 \text{ fatores}} = 336$
- $A_{8,3} = \dfrac{8!}{(8-3)!} = \dfrac{8!}{5!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

Para $n \in \mathbb{N}^*$, qual é o valor de $A_{n,1}$? Escreva no caderno um problema de contagem que possua esse número como resposta.

Atividades resolvidas

R3. Simplifique as expressões a seguir.

a) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$

b) $\dfrac{(n+1)! - n!}{n! - (n-1)!}$

Resolução

a) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n^2 - n$

b) $\dfrac{(n+1)! - n!}{n! - (n-1)!} = \dfrac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)! - n \cdot (n-1)!}{n \cdot (n-1)! - (n-1)!} = \dfrac{\cancel{(n-1)!} \cdot \left[n \cdot (n+1) - n\right]}{\cancel{(n-1)!} \cdot (n-1)} =$

$= \dfrac{n^2 + n - n}{n - 1} = \dfrac{n^2}{n-1}$

R4. Resolva as equações.

a) $\dfrac{(n-1)! \cdot (n+1)!}{(n!)^2} = 2$

b) $(n!)^2 + 4n! = 5$

Resolução

a) $\dfrac{(n-1)! \cdot (n+1)!}{(n!)^2} = 2 \Rightarrow \dfrac{(n-1)! \cdot (n+1)\cancel{n!}}{n!\cancel{n!}} = 2 \Rightarrow \dfrac{(n-1)! \cdot (n+1)}{n!} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\cancel{(n-1)!} \cdot (n+1)}{n\cancel{(n-1)!}} = 2 \Rightarrow \dfrac{n+1}{n} = 2 \Rightarrow 2n = n + 1 \Rightarrow n = 1$

b) Neste caso, podemos simplificar os fatoriais substituindo $n!$ por uma incógnita auxiliar. Assim, considere $n! = x$.

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 6}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4-6}{2} = -5 \text{ (não convém)} \\ x_2 = \dfrac{-4+6}{2} = 1 \end{cases}$$

Portanto, como $n! = 1$, temos $n = 0$ ou $n = 1$.

R5. (UPE) A vendedora de roupas está arrumando os cabides da vitrine de uma loja. Ela deve pendurar 5 camisas, 3 bermudas e 2 casacos na vitrine, de modo que cada peça fique uma do lado da outra sem sobreposição.

Quantas são as disposições possíveis nessa arrumação, de modo que as peças de um mesmo tipo fiquem sempre juntas, lado a lado na vitrine?

a) 30
b) 120
c) 1440
d) 4 320
e) 8 640

Resolução

Há $P_5 = 5! = 120$ modos de arrumar as camisas, $P_3 = 3! = 6$ modos de arrumar as bermudas e $P_2 = 2! = 2$ de organizar os casacos. Então, há $120 \cdot 6 \cdot 2 = 1440$ modos de organizar as peças, porém ainda podemos trocar os grupos (camisas, bermudas e casacos) de lugar. Logo temos $P_3 = 3! = 6$ modos de organizar esses grupos. Dessa maneira, temos $1440 \cdot 6 = 8\,640$ disposições possíveis para essa arrumação.

Portanto, a alternativa correta é **e**.

R6. Em uma sala de aula, um aluno será escolhido como presidente da turma e outro como vice-presidente. O presidente assume algumas responsabilidades para determinadas situações que o professor seleciona e o vice-presidente assume as mesmas tarefas, porém, na ausência do presidente.

Sabendo que a turma tem 30 alunos, quantas maneiras existem para eleger o presidente e o vice-presidente da turma?

Resolução

Há 30 modos de escolher o presidente e 29 modos de escolher o vice-presidente. Logo, a quantidade de maneiras de eleger o presidente e o vice-presidente é dada por $30 \cdot 29 = 870$ maneiras diferentes.

Outra maneira de resolver essa atividade é utilizar a ideia de arranjo simples:

$$A_{30,2} = \frac{30!}{(30-2)!} = \frac{30!}{28!} = \frac{\overbrace{30 \cdot 29}^{\text{2 fatores}} \cdot \cancel{28!}}{\cancel{28!}} = 870$$

Portanto, existem 870 maneiras de eleger um presidente e um vice-presidente entre os 30 alunos da turma.

Atividades

16. Determine o valor das expressões abaixo.

a) $8! + 3 - 7!$

b) $\dfrac{12! \cdot 8!}{11! \cdot 9!}$

c) $\dfrac{7!}{2!} \cdot \dfrac{3!}{6!}$

d) $\dfrac{156!}{0!} \cdot \dfrac{1!}{155!} + \left(\dfrac{6!}{60}\right)^2$

17. Simplifique as expressões a seguir.

a) $\dfrac{n!}{(n+1)!}$

b) $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!}$

c) $\dfrac{(n+2)!}{(n-3)!} \cdot \dfrac{(n-2)!}{(n+1)!}$

18. Determine o(s) valor(es) de n nas equações abaixo.

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!} = 10$

b) $(n!)^2 + n! = 6$

c) $\dfrac{(n+2)(n-1)!}{n!} = \dfrac{4}{3}$

19. Considere um conjunto que tenha k elementos distintos. Quantas permutações há entre esses elementos?

20. Calcule quantos são os anagramas da palavra:

a) LÁPIS;

b) LÁPIS, iniciando com **L** e terminando com **S**;

c) LÁPIS, em que as letras **I** e **S** aparecem juntas e nessa ordem.

21. De quantas maneiras distintas uma família com 5 pessoas pode se sentar em um sofá de 5 lugares?

22. Seis pessoas vão formar uma fila para comprar ingressos em um cinema. Entre elas, há um casal e este ficará junto. Sabendo disso, determine de quantas maneiras distintas essas pessoas poderão ser distribuídas na fila.

23. Podemos permutar os elementos de um conjunto de 5 040 maneiras distintas. Determine a quantidade de elementos desse conjunto.

24. Calcule:

a) $A_{2,2}$

b) $A_{5,2}$

c) $A_{10,8}$

25. Considere os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Quantos números com 3 algarismos distintos é possível formar, de modo que esses números sejam maiores do que 450?

26. Observe o cofre ao lado.

Sergio Lima/ASC Imagens

Caso uma pessoa tente abri-lo e supondo que sua senha seja formada por 4 algarismos distintos, determine quantas tentativas, no máximo, ela deverá fazer para conseguir abrir o cofre.

27. Dos números de 3 algarismos distintos formados pelos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos deles são divisíveis por 5?

28. Uma turma do 3º ano do Ensino Médio com 25 alunos terá 3 representantes para a comissão de formatura, composta por um presidente, um vice-presidente e um tesoureiro. De quantas maneiras distintas essa comissão poderá ser formada?

29. Em certa corrida automobilística competirão 20 pilotos, dos quais serão selecionados os 8 melhores colocados. Supondo que todos os pilotos terminem a corrida, quantas são as possibilidades de classificação desses 8 competidores?

30. **Desafio** (Uece) Se os conjuntos X e Y possuem, respectivamente, cinco e oito elementos, quantas funções, $f\colon X \to Y$, injetivas e distintas, podem ser construídas?

a) 6 680

b) 6 700

c) 6 720

d) 6 740

Combinação simples

Intuitivamente, os problemas de contagem que envolvem a ideia de combinação, em geral, estão associados à escolha de subconjuntos. Acompanhe o desenvolvimento de uma situação.

Daniele dispõe de 5 frutas diferentes e pretende utilizar 3 delas para fazer uma salada. De quantas maneiras distintas ela pode escolher as 3 frutas que vão compor sua salada?

Vamos resolver esse problema nomeando as frutas de **A**, **B**, **C**, **D** e **E**. Ao selecionar 3 delas, a ordem não é importante, de modo que **ABC** e **BAC**, por exemplo, correspondem ao mesmo grupo. Uma estratégia para representar todos os possíveis grupos, sem repeti-los, é escrever as 3 frutas de cada grupo em ordem alfabética. Assim, os grupos são:

ABC, **ABD**, **ABE**, **ACD**, **ACE**, **ADE**, **BCD**, **BCE**, **BDE** e **CDE**

Assim, Daniele pode escolher as 3 frutas que vão compor sua salada de 10 maneiras distintas, de modo que os grupos de 3 frutas não se diferenciem pela ordem. Esse exemplo ilustra o conceito de **combinação simples**.

Cada agrupamento de p elementos distintos escolhidos de um conjunto com n elementos, com $p \leqslant n$, em que um agrupamento se difere do outro pela natureza de seus elementos, e não pela ordem deles, é denominado **combinação simples de *n* elementos tomados *p* a *p***.

A quantidade total dessas combinações simples é denotada por $C_{n,p}$.

Exemplos

a Diferenças entre combinação simples e arranjo simples:

Considere o conjunto $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

- Um arranjo simples dos 4 elementos de M tomados 3 a 3 é representado por uma sequência de 3 elementos distintos de M. As possíveis sequências são:

  $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 4, 2)$, $(2, 1, 4)$, $(2, 4, 1)$, $(4, 1, 2)$, $(4, 2, 1)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 4, 3)$, $(3, 1, 4)$, $(3, 4, 1)$, $(4, 1, 3)$, $(4, 3, 1)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 4, 3)$, $(3, 2, 4)$, $(3, 4, 2)$, $(4, 2, 3)$ e $(4, 3, 2)$.

- Uma combinação simples dos 4 elementos de M tomados 3 a 3 é representado por um subconjunto de M com 3 elementos distintos. Esses possíveis subconjuntos são:

  $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ e $\{2, 3, 4\}$

As sequências $(1, 2, 3)$ e $(2, 3, 1)$, por exemplo, são objetos distintos, portanto, correspondem a dois arranjos distintos. Por outro lado, os conjuntos $\{1, 2, 3\}$ e $\{2, 3, 1\}$ são iguais, portanto, correspondem a uma mesma combinação.

b Relação entre a quantidade de combinações simples e a de arranjos simples:

No exemplo anterior, observe que os elementos de cada combinação simples, ao serem permutados entre si, originam $3! = 6$ arranjos simples distintos. Logo, a quantidade de arranjos simples de 4 elementos tomados 3 a 3 é igual a 6 vezes a quantidade de combinações simples de 4 elementos tomados 3 a 3, ou seja:

$$A_{4,3} = 6 \cdot C_{4,3} \Rightarrow C_{4,3} = \frac{A_{4,3}}{6}$$

Os elementos de uma combinação simples de n elementos tomados p a p, ao serem permutados entre si, originam $p!$ arranjos simples de n elementos tomados p a p. Assim, temos:

$$A_{n,p} = p! \cdot C_{n,p} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

O exemplo **b** da página anterior ilustra como podemos obter uma fórmula para $C_{n,p}$ utilizando a fórmula dos arranjos simples. Assim, temos:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Para $n, p \in \mathbb{N}$, com $p \leqslant n$, a quantidade de combinações simples de n elementos tomados p a p é o número $C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$.

Um dos motivos que justifica considerar $0! = 1$ é para que funcione a expressão que determina o número correspondente à quantidade de combinações simples de n elementos tomados n a n:

$$C_{n,n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

Exemplos

a Com 7 pessoas disponíveis, quantas comissões de 4 pessoas podem ser formadas?

Comissão: conjunto de pessoas responsáveis por determinado assunto.

Essa situação pode ser resolvida seguindo-se as etapas para a dedução da fórmula das combinações simples. Ao escolher os integrantes de uma comissão um a um, temos 7 opções para o primeiro integrante, 6 opções para o segundo, 5 opções para o terceiro e 4 opções para o quarto. Portanto, formamos arranjos simples de 7 elementos tomados 4 a 4 em uma quantidade de $A_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. No entanto, como a ordem dos integrantes não importa, dividimos esse número pela quantidade de permutações de 4 elementos. Assim, a quantidade de comissões é:

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{6}} = 35$$

Outra maneira de se resolver essa questão é observar que as comissões correspondem a combinações simples de 7 elementos tomados 4 a 4, pois as comissões se diferem de acordo com o conjunto de pessoas escolhidas, e não pela ordem das escolhas dos integrantes.

$$C_{7,4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{6}} = 35$$

b Quantos subconjuntos com pelo menos 4 elementos possui o conjunto $A = \{2, 5, 10, 11, 16, 20\}$?

Para resolver esse problema, podemos adicionar a quantidade de subconjuntos com 4, com 5 e com 6 elementos. Logo, a resposta é:

$$C_{6,4} + C_{6,5} + C_{6,6} = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} + \frac{6!}{5! \cdot (6-5)!} + \frac{6!}{6! \cdot (6-6)!} =$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2 \cdot 1} + \frac{6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 1} + \frac{\cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 1} = \frac{30}{2} + 6 + 1 = 22$$

Por que esse problema é resolvido adicionando-se a quantidade de subconjuntos com 4, com 5 e com 6 elementos?

Permutação com elementos repetidos

Já vimos que a quantidade de permutações simples de n elementos distintos é o número $P_n = n!$. Agora, veremos como calcular a quantidade de permutações de n elementos quando pelo menos um deles se repete.

Vamos determinar todos os anagramas da palavra OVO com um diagrama de árvore. Antes, porém, vamos diferenciar as duas letras O escrevendo O_1 e O_2 para representá-las.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & V \arrow[r, dash] & O_2 \arrow[r] & O_1VO_2 \\ O_1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & & \\ & O_2 \arrow[r, dash] & V \arrow[r] & O_1O_2V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & O_1 \arrow[r, dash] & O_2 \arrow[r] & VO_1O_2 \\ V \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & & \\ & O_2 \arrow[r, dash] & O_1 \arrow[r] & VO_2O_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & V \arrow[r, dash] & O_1 \arrow[r] & O_2VO_1 \\ O_2 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & & \\ & O_1 \arrow[r, dash] & V \arrow[r] & O_2O_1V \end{tikzcd}$$

Observe que O_1VO_2 e O_2VO_1, por exemplo, representam um mesmo anagrama.

Nesse caso, se O_1 e O_2 representassem letras distintas, haveria $P_3 = 3!$ anagramas. Porém, cada possível anagrama aparece repetido nesse diagrama de árvore em um número correspondente à quantidade de permutações das letras O, ou seja, $P_2 = 2!$. Assim, a quantidade de anagramas da palavra OVO é dada por $\frac{P_3}{P_2} = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 3$.

Considere n elementos de modo que, entre eles, há elementos repetidos, sendo p_1 elementos iguais a T_1, p_2 elementos iguais a T_2, ..., p_k elementos iguais a T_k. Então, a quantidade de permutações desses elementos é o número $P_n^{p_1, p_2, \ldots, p_k} = \frac{n!}{p_1! \cdot p_2! \cdot \ldots \cdot p_k!}$.

Exemplos

a Quantos são os anagramas da palavra PACATA?

Nessa questão, as 6 letras podem ser permutadas de $P_6 = 6!$ modos, porém, para cada um desses modos, ao permutar as letras A entre si, o que pode ser feito de $P_3 = 3!$ modos, obtemos um mesmo anagrama. Assim, a quantidade de anagramas é dada por $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$.

Utilizando a notação das permutações com elementos repetidos, temos:

$$P_6^3 = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$$

b Quantos são os anagramas da palavra MARASMO? Quantos começam com vogal?

Para responder à primeira pergunta, observamos que nessa palavra há duas letras M e duas letras A. Assim, a quantidade de anagramas é $P_7^{2,2} = \frac{7!}{2! \cdot 2!} = \frac{5\,040}{4} = 1\,260$.

Para responder à segunda pergunta, consideramos dois casos:

1º caso: a primeira vogal é a letra A.

Calculamos a quantidade de permutações das letras M, R, A, S, M e O. Como há duas letras M, essa quantidade é $P_6^2 = \frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$.

2º caso: a primeira vogal é a letra O.

Agora, calculamos a quantidade de permutações das letras M, A, R, A, S e M. Como há duas letras M e duas letras A, essa quantidade é $P_6^{2,2} = \frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{720}{2 \cdot 2} = 180$.

Assim, a quantidade de anagramas que começam com vogal é $360 + 180 = 540$.

R7. Para a realização de determinada cirurgia serão necessários 2 cirurgiões, 1 anestesista e 5 enfermeiros. Entre os profissionais do hospital, estarão disponíveis e aptos para essa cirurgia 6 cirurgiões, 3 anestesistas e 15 enfermeiros. Determine de quantas maneiras poderá ser constituída a equipe que fará a cirurgia.

Resolução

Se há x opções de escolha para os 2 cirurgiões, y opções para o anestesista e z opções para os 5 enfermeiros, pelo princípio fundamental da contagem, a equipe que fará a cirurgia pode ser constituída de $x \cdot y \cdot z$ maneiras.

Assim:

$$x = C_{6,2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{4!}} = \frac{30}{2} = 15$$

$$y = C_{3,1} = \frac{3!}{1! \cdot (3-1)!} = \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 3$$

$$z = C_{15,5} = \frac{15!}{5! \cdot (15-5)!} =$$

$$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{10!}} = \frac{360\,360}{120} = 3\,003$$

Logo $C_{6,2} \cdot C_{3,1} \cdot C_{15,5} = 15 \cdot 3 \cdot 3\,003 = 135\,135$.

Portanto, essa equipe médica poderá ser formada de 135 135 maneiras.

R8. (EPCAr-MG) Um turista queria conhecer três estádios da Copa do Mundo no Brasil não importando a ordem de escolha. Estava em dúvida em relação às seguintes situações:

I) obrigatoriamente, conhecer o Estádio do Maracanã.

II) se conhecesse o Estádio do Mineirão, também teria que conhecer a Arena Pantanal, caso contrário, não conheceria nenhum dos dois.

Sabendo que a Copa de 2014 se realizaria em 12 estádios brasileiros, a razão entre o número de modos distintos de escolher a situação **I** e o número de maneiras diferentes de escolha para a situação **II**, nessa ordem, é:

a) $\frac{11}{26}$ b) $\frac{13}{25}$ c) $\frac{13}{24}$ d) $\frac{11}{24}$

Resolução

- A quantidade de escolhas na situação **I** é dada por:

$$C_{11,2} = \frac{11!}{2! \cdot (11-2)!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot \cancel{9!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{9!}} = \frac{110}{2} = 55$$

Assim, ao escolher a situação **I**, o turista terá 55 maneiras de escolher os estádios.

- Podemos resolver a situação **II** por meio da adição entre a quantidade de escolhas de se conhecer o Estádio do Mineirão, a Arena Pantanal e um dos outros 10 estádios $(1 \cdot 1 \cdot 10)$ e a quantidade de escolhas de não se conhecer o Estádio do Mineirão e a Arena Pantanal, mas sim 3 dos outros 10 estádios $\left(C_{10,3}\right)$.

$$1 \cdot 1 \cdot 10 + C_{10,3} = 10 + \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} =$$

$$= 10 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{7!}} = 10 + \frac{720}{6} =$$

$$= 10 + 120 = 130$$

A razão entre a quantidade de escolhas na situação **I** e a quantidade na situação **II** é dada por $\frac{55}{130} = \frac{11}{26}$.

Portanto, a alternativa correta é **a**.

R9. Considere a palavra GIGANTE.

a) Quantos anagramas podemos formar a partir dessa palavra?

b) Quantos anagramas formados dessa palavra começam e terminam com vogal?

Resolução

a) Como a palavra GIGANTE tem duas letras G, calculamos:

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 2\,520$$

Portanto, podemos formar 2 520 anagramas.

b) Como o anagrama terá de iniciar com vogal, teremos 3 opções (I, A, E).

Determinada a vogal inicial, sobram duas opções para a vogal final.

Definidos os extremos, ainda sobram cinco letras que podem ocupar qualquer posição no anagrama. Como uma delas (G) se repete, a quantidade de maneiras de permutar essas letras é dada por:

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$$

Assim, $3 \cdot 2 \cdot 60 = 360$. Portanto, a palavra GIGANTE forma 360 anagramas que começam e terminam com vogal.

R10. No lançamento de uma moeda, os resultados obtidos podem ser cara ou coroa. Considerando uma sequência de 5 lançamentos e representando a face cara por C e coroa por K, uma possível sequência obtida após os lançamentos é CKCKC.

a) Quantas são as possibilidades de sequências dos resultados de 5 lançamentos em que sejam obtidas 3 caras e 2 coroas?

b) Quantas são as possibilidades de sequências dos resultados de 5 lançamentos em que sejam obtidas pelo menos 4 coroas?

Resolução

a) Para determinar a quantidade de possibilidades, devemos calcular a permutação de 5 elementos com 2 e 3 repetições. Assim:

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = \frac{20}{2} = 10$$

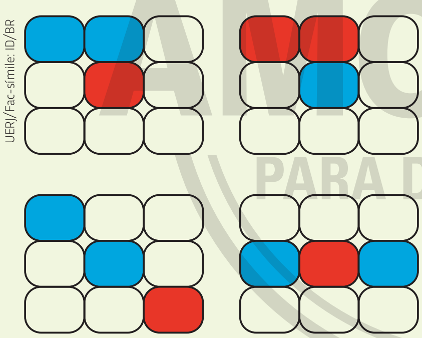
Portanto, há 10 possibilidades.

b) Para determinar a quantidade de possibilidades, devemos calcular a permutação de 5 elementos com 4 repetições e somá-la a 1, pois a sequência de 5 coroas também deve ser considerada. Assim:

$$1 + P_5^4 = 1 + \frac{5!}{4!} = 1 + \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 1 + 5 = 6$$

Portanto, há 6 possibilidades.

R11. (Uerj) Um painel de iluminação possui nove seções distintas, e cada uma delas acende uma luz de cor vermelha ou azul. A cada segundo, são acesas, ao acaso, duas seções de uma mesma cor e uma terceira de outra cor, enquanto as seis demais permanecem apagadas.



UERJ/Fac-símile: ID/BR

Observe quatro diferentes possibilidades de iluminação do painel.

O tempo mínimo necessário para a ocorrência de todas as possibilidades distintas de iluminação do painel, após seu acionamento, é igual a x minutos e y segundos, sendo $y < 60$.

Os valores respectivos de x e y são:

a) 4 e 12

b) 8 e 24

c) 25 e 12

d) 50 e 24

Resolução

Considere A: luz de cor azul, V: luz de cor vermelha e B: luz apagada. Como temos 9 seções distintas no painel, de maneira que, a cada segundo, 2 delas se acendem com uma das cores, outra delas se acende com a outra cor e as outras 6 ficam apagadas, podemos considerar as seguintes sequências de luzes no painel, AAVBBBBBB e AVVBBBBBB, ou seja, a cada segundo ficam acesas 2 luzes vermelhas, 1 azul e as demais ficam apagadas, ou ficam acesas 2 luzes azuis, 1 vermelha e as demais ficam apagadas.

Devemos calcular todas as permutações de cada uma das sequências. Assim, temos:

$$P_9^{2,6} = \frac{9!}{2! \cdot 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{6!}} = \frac{504}{2} = 252$$

Como são 2 sequências, a quantidade de possibilidades é dada por $252 \cdot 2$, totalizando 504 possibilidades. Considerando que o painel acende de uma maneira diferente a cada segundo, podemos afirmar que o tempo necessário para a ocorrência de todas as possibilidades é de 504 s = 8 min 24 s.

Portanto, a alternativa correta é **b**.

Atividades

31. **Ferramentas** Calcule.

a) $C_{5,3}$

b) $C_{11,9}$

c) $C_{25,23}$

d) $C_{20,17} + C_{24,19}$

e) $\dfrac{C_{18,15}}{C_{7,5}}$

f) $C_{8,4} \cdot C_{10,6}$

32. Entre as opções de doces disponíveis em uma confeitaria, um cliente poderá escolher 4 delas para montar a mesa de doces de um aniversário. Observe as opções:

Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

a) De quantas maneiras diferentes um cliente poderá montar uma mesa de doces?

b) Se o cliente também encomendar um bolo na mesma confeitaria, poderá escolher 5 em vez de 4 tipos de doces. Nesse caso, quantas combinações diferentes ele terá como opção?

33. Com a intenção de montar times de futsal, uma professora de educação física pediu aos alunos que se organizassem em grupos de 5 integrantes.

a) Como a turma é formada por 28 alunos, de quantas maneiras distintas pode-se formar um time?

b) Se forem formados 5 times, quantas partidas deverão acontecer para cada time jogar uma vez contra todos os outros?

34. Uma empresa possui 15 gerentes e destinou uma verba para enviar a um congresso 9 deles. Calcule de quantas maneiras diferentes é possível formar o grupo que vai para o congresso.

35. Calculando $C_{7,4}$ e $C_{7,3}$, é possível perceber que $C_{7,4} = C_{7,3} = 35$ e que

a) Mostre que $C_{n,p} = C_{n,n-p}$, com $n, p \in \mathbb{N}$ e $p \leqslant n$.

$$C_{7,4} = C_{7,3}$$

$$4 + 3 = 7$$

b) Usando o resultado do item **a** e sem realizar cálculos, associe as combinações que possuem resultados iguais.

I) $C_{100,97}$

II) $C_{100,4}$

III) $C_{100,94}$

IV) $C_{100,3}$

V) $C_{100,6}$

VI) $C_{100,96}$

36. (UEMG-MG) Observe a tira abaixo:

© Mauricio de Sousa Editora Ltda.

SOUSA, Mauricio de. Turma da Mônica. Disponível em: <http://turmadamonica.uol.com.br/tirinhas/index.php?a=6>. Acesso em: 18 dez. 2015.

Passando por uma sorveteria, Magali resolve parar e pedir uma casquinha. Na sorveteria, há 6 sabores diferentes de sorvete e 3 é o número máximo de bolas por casquinha, sendo sempre uma de cada sabor. O número de formas diferentes com que Magali poderá pedir essa casquinha é igual a

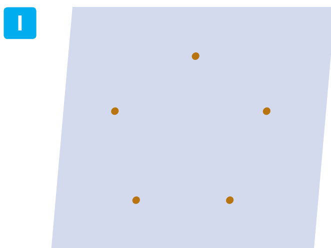
a) 20

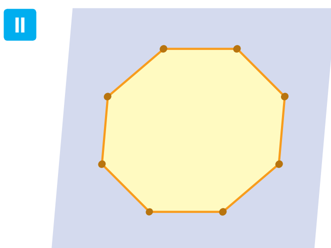
b) 41

c) 120

d) 35

37. Observe as imagens a seguir:





Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

a) Quantos segmentos de reta podem ser traçados na imagem **I**, sendo suas extremidades dois dos pontos da imagem?

b) Desconsiderando os segmentos que compõem o contorno da figura, faça para a imagem **II** o mesmo que se pede no item **a**.

Nesse caso, é necessário calcular a quantidade de diagonais de um octógono convexo.

c) Determine a quantidade de diagonais do octógono convexo por meio da fórmula $D = \dfrac{n(n-3)}{2}$, em que n é a quantidade de vértices do polígono, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$. Comparando com a resposta do item **b**, o que podemos afirmar?

d) Utilize combinação simples para obter a fórmula apresentada do item **c**.

38. Quantos são os anagramas das palavras:

a) CACHECOL?

b) CHUCHU?

c) SOSSEGO?

d) RINOCERONTE?

39. Quantos são os anagramas da palavra:

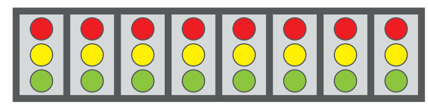
a) CARUARU, que começam e terminam com a letra A?

b) ANANINDEUA que começam com uma vogal?

40. Alexandre precisa de uma nova senha para seu *e-mail* e seu provedor exige que ela possua letras e números. Assim, ele decidiu usar as letras de seu nome e os algarismos do ano de seu nascimento. Sabendo que Alexandre nasceu em 1988 e que deixará os algarismos para o final da senha, determine quantas possibilidades diferentes de senhas ele terá para escolher.

41. Uma floricultura dispõe de 15 lírios brancos e 10 lírios amarelos, todos distintos. De quantas maneiras diferentes é possível compor um buquê contendo 5 lírios brancos e 2 lírios amarelos?

42. (Uerj) Um sistema luminoso, constituído de oito módulos idênticos, foi montado para emitir mensagens em código. Cada módulo possui três lâmpadas de cores diferentes – vermelha, amarela e verde. Observe a figura:



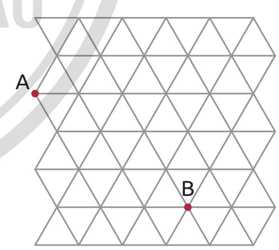
UERJ/Fac-símile: ID/BR

Considere as seguintes informações:

- cada módulo pode acender apenas uma lâmpada por vez;
- qualquer mensagem é configurada pelo acendimento simultâneo de três lâmpadas vermelhas, duas verdes e uma amarela, permanecendo dois módulos com as três lâmpadas apagadas;
- duas mensagens são diferentes quando pelo menos uma das posições dessas cores acesas é diferente.

Calcule a quantidade de mensagens distintas que esse sistema pode emitir.

43. Observe a imagem formada por triângulos equiláteros e congruentes:



Sergio Lima/ID/BR

É possível traçar, sobre os lados dos triângulos, vários caminhos de A até B. Considerando a distância de um caminho como a quantidade de lados de triângulos, responda:

a) qual é a medida da menor distância de A até B?

b) quantos caminhos diferentes, de menor distância, é possível traçar de A até B?

44. Simplifique as expressões.

a) $\dfrac{C_{6,4}}{A_{6,4}} \cdot 6!$

b) $C_{2,0} - \dfrac{1}{A_{5,1}}$

c) $\dfrac{C_{n,p}}{P_n}$

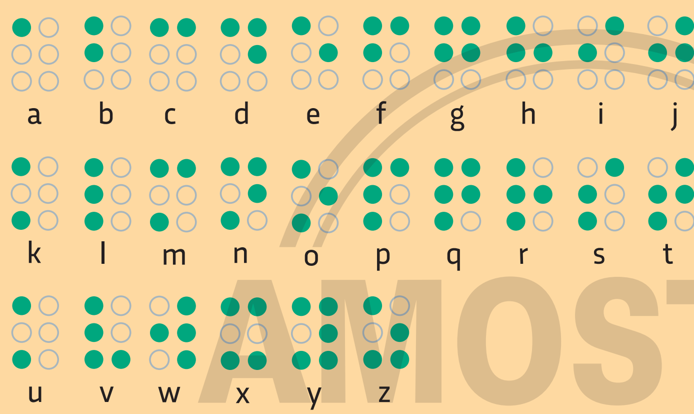
d) $\dfrac{P_{n+1}}{n+1}$

Braille

Muitas pessoas com deficiência visual têm acesso à leitura e à escrita graças à invenção do francês Louis Braille (1809-1852) que, aos 3 anos de idade, sofreu um grave acidente enquanto manejava ferramentas na oficina de seu pai e perdeu a visão dos dois olhos. Em 1825, após adaptar um sistema de escrita que usava pontos e traços, elaborado por um capitão da artilharia do exército francês, Louis inventou seu próprio sistema de leitura para cegos, nomeado em sua homenagem como **sistema braille**.

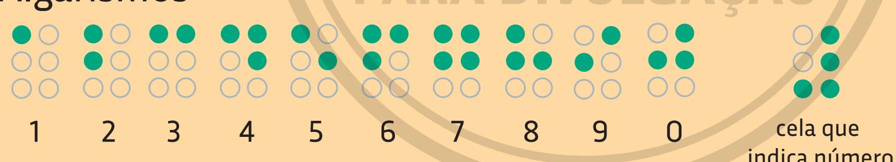
O formato definitivo do sistema braille foi divulgado em 1837 e é utilizado mundialmente até os dias atuais. Em 1854, esse sistema começou a ser difundido no Brasil, primeiro país da América Latina a adotar o sistema. Após o braille, a leitura e a escrita de qualquer tipo de texto se tornaram possíveis para um deficiente visual.

Alfabeto



O sistema braille consiste em um alfabeto de pontos, com destaque em relevo, organizados em uma tabela chamada cela braille. Esta cela possui três linhas e duas colunas na qual pelo menos um dos pontos se destaca. As combinações desses pontos estão relacionadas a caracteres que representam letras simples, letras acentuadas, pontuações, símbolos, notas musicais, sinais algébricos, entre outros. Na imagem estão representados o alfabeto da Língua Portuguesa, os algarismos que utilizamos e a cela que antecede a composição de um número.

Algarismos

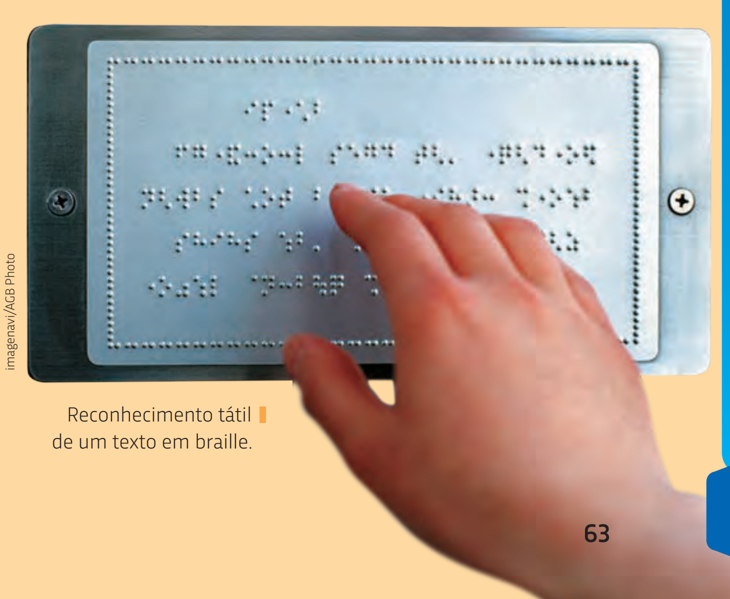


Maryane Silva/ASC Imagens

A Qual é o número total de caracteres simples que podem ser representados no sistema braille, considerando as possíveis combinações de 1 a 6 pontos?

B Em sua opinião, quais os benefícios que a escrita braille representa para uma pessoa com deficiência visual?

C O Brasil conta com leis que regulamentam o direito à acessibilidade para pessoas portadoras de deficiência visual, como o decreto n. 5 296/2004. Além do acesso à escrita braille, o que pode ser feito para garantir a acessibilidade de deficientes visuais no dia a dia? Na região em que você mora ou na escola em que você estuda há condições que permitem essa acessibilidade?



imagenavi/AGB Photo

Reconhecimento tátil de um texto em braille.

Binômio de Newton

Para desenvolver $(x + a)^2$, em que $x \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, podemos utilizar a propriedade distributiva do seguinte modo:

$$(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = x \cdot x + x \cdot a + a \cdot x + a \cdot a$$

As 4 parcelas obtidas correspondem aos 2^2 modos de escrever um produto de 2 fatores, escolhendo cada fator entre x ou a.

Utilizando a notação de potência e agrupando termos semelhantes, obtemos:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$$

De modo análogo, ao realizar o desenvolvimento de $(x + a)^3$, temos:

$$(x + a)^3 = (x + a)(x + a)^2 = (x + a)(x \cdot x + x \cdot a + a \cdot x + a \cdot a) =$$

$$= x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot a + x \cdot a \cdot x + x \cdot a \cdot a + a \cdot x \cdot x + a \cdot x \cdot a + a \cdot a \cdot x + a \cdot a \cdot a$$

As 8 parcelas obtidas correspondem aos 2^3 modos de escrever um produto de 3 fatores, escolhendo cada fator entre x ou a.

Agrupando os termos semelhantes, obtemos:

$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$

De modo geral, o desenvolvimento de $(x + a)^n$, com $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, pode ser visto como um problema de combinatória. Ao desenvolver $(x + a)^n$, obtemos 2^n parcelas, correspondentes aos 2^n modos de escrever um produto de n fatores, escolhendo cada fator entre x ou a. Aqui, queremos determinar a quantidade de parcelas que correspondem a termos semelhantes. No desenvolvimento de $(x + a)^3$, por exemplo, há:

- 1 parcela correspondente a x^3 $(x \cdot x \cdot x)$;
- 3 parcelas correspondentes a x^2a $(x \cdot x \cdot a,\ x \cdot a \cdot x,\ a \cdot x \cdot x)$;
- 3 parcelas correspondentes a xa^2 $(x \cdot a \cdot a,\ a \cdot x \cdot a,\ a \cdot a \cdot x)$;
- 1 parcela correspondente a a^3 $(a \cdot a \cdot a)$.

No caso geral, cada parcela corresponde a $x^{n-p}a^p$ para algum $p = 0, 1, 2, \ldots, n$. A quantidade de vezes que a parcela $x^{n-p}a^p$ aparece no desenvolvimento de $(x + a)^n$ é igual à quantidade de permutações dos $(n - p)$ elementos iguais a x e dos p elementos iguais a a, ou seja, $P_n^{n-p,\,p}$.

Do tópico visto na página **58**, sabemos que:

$$P_n^{n-p,\,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} = C_{n,p}$$

Logo, para cada $p = 0, 1, 2, ..., n$, há $C_{n,p}$ parcelas iguais a $x^{n-p}a^p$ no desenvolvimento de $(x+a)^n$.

Portanto, utilizando a notação $\binom{n}{p} = C_{n,p}$:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^{n-0}a^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + ... + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p + ... + \binom{n}{n}x^{n-n}a^n$$

Essa é a chamada fórmula do desenvolvimento do binômio de Newton.

Sejam $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n a^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + ... + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p + ... + \binom{n}{n}x^0 a^n$$

Cada número representado pelo símbolo $\binom{n}{p}$, com $p \in \mathbb{N}$ e $0 \leqslant p \leqslant n$, é chamado **número binomial *n* sobre *p*** e $T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p}a^p$ é a expressão do **termo geral do binômio**.

O desenvolvimento do binômio $(x+a)^n$ possui $n+1$ termos.

Exemplos

a Com a fórmula do binômio de Newton, vamos desenvolver a potência $(x-2)^3$. Nesse caso, temos:

$$(x-2)^3 = \left[x + (-2)\right]^3 = \binom{3}{0}x^3(-2)^0 + \binom{3}{1}x^2(-2)^1 + \binom{3}{2}x^1(-2)^2 + \binom{3}{3}x^0(-2)^3$$

Os números binomiais são:

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0! \cdot 3!} = 1;\ \binom{3}{1} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3;\ \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3;\ \binom{3}{3} = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1$$

Assim:

$$(x-2)^3 = 1x^3 + 3x^2(-2) + 3x \cdot 4 + 1 \cdot (-8) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

b Utilizando a expressão do termo geral do binômio, podemos determinar um termo que satisfaz uma condição específica. Vamos, por exemplo, determinar o termo em x^4 no desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x} + 3x^2\right)^5$. O termo geral é:

$$T_{p+1} = \binom{5}{p}\left(\frac{1}{x}\right)^{5-p}\left(3x^2\right)^p = \binom{5}{p} \cdot \frac{3^p x^{2p}}{x^{5-p}} = \binom{5}{p} \cdot 3^p x^{2p-(5-p)} = \binom{5}{p} \cdot 3^p x^{3p-5}$$

Assim, o termo em x^4 é obtido quando $3p - 5 = 4$, ou seja, $p = 3$. Logo, o termo em x^4 é:

$$T_4 = \binom{5}{3} \cdot 3^3 x^{3 \cdot 3 - 5} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 27x^4 = 10 \cdot 27x^4 = 270x^4$$

Atividades resolvidas

R12. A igualdade $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}$, para qualquer natural n e p, com $n \geqslant 2$ e $0 < p < n$ é conhecida como relação de Stifel. Por exemplo, dado $\binom{9}{5}+\binom{9}{6}$, podemos concluir que $\binom{9}{5}+\binom{9}{6}=\binom{10}{6}$.

Utilizando essa relação, determine o(s) valor(es) de x de modo que $\binom{30}{x}+\binom{30}{15}=\binom{31}{15}$.

Resolução

Com a relação de Stifel, podemos escrever $\binom{31}{15}$ como $\binom{30}{14}+\binom{30}{15}$. Assim, temos:

$$\binom{30}{x}+\binom{30}{15}=\binom{30}{14}+\binom{30}{15} \Rightarrow \binom{30}{x}=\binom{30}{14}$$

Como as combinações $\binom{30}{14}$ e $\binom{30}{16}$ possuem resultados iguais, pois $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$, segue que $x = 14$ ou $x = 16$.

Uma maneira de justificar a relação de Stifel é considerando um conjunto A com n elementos, dos quais x é um deles. A quantidade de subconjuntos de A com p elementos é dada pelo número $C_{n,p}=\binom{n}{p}$. Esse número é igual à soma da quantidade de subconjuntos nos quais x é um deles, $C_{n-1,p-1}=\binom{n-1}{p-1}$, com a quantidade de subconjuntos nos quais x não é um deles, $C_{n-1,p}=\binom{n-1}{p}$, isto é, $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}$.

R13. Em uma sorveteria, há 4 sabores de sorvete. O cliente pode escolher 1, 2, 3 ou 4 sabores de sorvete. Quantas combinações distintas com esses sabores podem ser formadas?

Resolução

Para um sabor, temos $\binom{4}{1}$ possibilidades; para dois sabores, temos $\binom{4}{2}$ possibilidades, e assim por diante. Dessa maneira, a solução é dada por $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$.

Podemos obter essa soma utilizando o binômio de Newton:

$$(x+a)^n=\binom{n}{0}x^n a^0+\binom{n}{1}x^{n-1}a^1+\binom{n}{2}x^{n-2}a^2+\ldots+\binom{n}{p}x^{n-p}a^p+\ldots+\binom{n}{n}x^0 a^n$$

Para isso, é conveniente considerar $x = 1$, $a = 1$ e $n = 4$, pois

$$\binom{4}{0}1^4\cdot 1^0+\binom{4}{1}1^3\cdot 1^1+\binom{4}{2}1^2\cdot 1^2+\binom{4}{3}1^1\cdot 1^3+\binom{4}{4}1^0\cdot 1^4=\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}.$$

Logo, podemos considerar $(x+a)^n=(1+1)^4=2^4$.

Como $\binom{4}{0}$ não é uma possibilidade, porque o cliente vai escolher pelo menos 1 sabor de sorvete, temos que $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4-\binom{4}{0}=16-1=15$.

Portanto, podem ser formadas 15 combinações com os sabores de sorvete.

R14. Desenvolva as potências utilizando o binômio de Newton.

a) $(2x + 5a)^3$

b) $(x - 1)^4$

Resolução

a) $(2x + 5a)^3 = \binom{3}{0}(2x)^3(5a)^0 + \binom{3}{1}(2x)^2(5a)^1 + \binom{3}{2}(2x)^1(5a)^2 + \binom{3}{3}(2x)^0(5a)^3$, em que

$\binom{3}{0} = \dfrac{3!}{0! \cdot 3!} = 1$, $\binom{3}{1} = \dfrac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$, $\binom{3}{2} = \dfrac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$, $\binom{3}{3} = \dfrac{3!}{3! \cdot 0!} = 1$.

Então, temos:

$(2x + 5a)^3 = 1 \cdot 8x^3 \cdot 1 + 3 \cdot 4x^2 \cdot 5a + 3 \cdot 2x \cdot 25a^2 + 1 \cdot 1 \cdot 125a^3 =$

$= 8x^3 + 60ax^2 + 150a^2x + 125a^3$

b) $(x - 1)^4 = \binom{4}{0}x^4(-1)^0 + \binom{4}{1}x^3(-1)^1 + \binom{4}{2}x^2(-1)^2 + \binom{4}{3}x^1(-1)^3 + \binom{4}{4}x^0(-1)^4$, em que

$\binom{4}{0} = \dfrac{4!}{0! \cdot 4!} = 1$, $\binom{4}{1} = \dfrac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$, $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$, $\binom{4}{3} = \dfrac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$, $\binom{4}{4} = \dfrac{4!}{4! \cdot 0!} = 1$.

Então, temos:

$(x - 1)^4 = 1 \cdot x^4 \cdot 1 + 4 \cdot x^3 \cdot (-1) + 6 \cdot x^2 \cdot 1 + 4 \cdot x \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

R15. Considere o desenvolvimento de $(5x - 4)^6$ ordenado segundo as potências decrescentes de x. Determine:

a) o coeficiente de x^2.

b) o termo independente.

c) o termo central.

d) a soma dos coeficientes.

Resolução

a) Utilizando o termo geral do binômio, $T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p} \cdot y^p$, temos:

$$T_{p+1} = \binom{6}{p}(5x)^{6-p} \cdot (-4)^p$$

O termo em x^2 é obtido quando $6 - p = 2$, ou seja, $p = 4$. Logo o termo em x^2 é:

$$T_5 = \binom{6}{4}(5x)^2 \cdot (-4)^4 = 15 \cdot 25x^2 \cdot 256 = 96\,000x^2$$

Portanto, o coeficiente de x^2 é 96 000.

b) O termo independente é o que acompanha x^0, então:

$$x^{6-p} = x^0 \Rightarrow 6 - p = 0 \Rightarrow p = 6$$

Pela fórmula do binômio de Newton, temos:

$$T_7 = \binom{6}{6}(5x)^{6-6} \cdot (-4)^6 = 1 \cdot (5x)^0 \cdot (-4)^6 = 4\,096$$

Assim, 4 096 é o termo independente.

c) Nesse binômio, há 7 termos, logo o termo central é o da posição $\dfrac{7+1}{2} = 4$.
Dessa maneira, utilizando o binômio de Newton, temos:

$$T_4 = \binom{6}{3}(5x)^{6-3} \cdot (-4)^3 = 20 \cdot (5x)^3 \cdot (-4)^3 = -160\,000x^3$$

d) Para determinar a soma dos coeficientes, consideramos $x = 1$. Dessa maneira, temos:

$$(5 \cdot 1 - 4)^6 = (5 - 4)^6 = 1^6 = 1$$

Portanto, a soma dos coeficientes é igual a 1.

Atividades

45. Desenvolva os seguintes binômios:

a) $(x+3)^4$

b) $(x-5)^3$

c) $\left(\sqrt{2}-3\right)^4$

d) $(a-b)^5$

e) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3$

f) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^5$

46. Determine:

a) o termo geral do desenvolvimento do binômio $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$.

b) o coeficiente do termo x^4 no desenvolvimento do binômio $(x+3)^6$.

c) o termo independente de x no binômio $\left(x^2+5\right)^4$.

d) o termo central do binômio $(x+5)^6$, considerando seu desenvolvimento ordenado segundo as potências decrescentes de x.

47. (Uece) O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^4-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ é:

a) -45

b) 45

c) -54

d) 54

48. Calcule a soma dos coeficientes dos binômios a seguir.

a) $(x-2)^4$

b) $(x-3)^5$

49. Determine o valor do quociente entre os coeficientes de x^4 no desenvolvimento de $(x+3)^8$ e $(x-2)^8$.

50. No desenvolvimento do binômio $\left(\dfrac{1}{x}+3x\right)^{17}$, existe um termo independente de x? Em caso negativo, justifique sua resposta.

51. Determine o valor das expressões.

a) $\dbinom{10}{5}+\dbinom{10}{6}$

b) $\dbinom{8}{3}+\dbinom{8}{4}$

c) $\dbinom{9}{2}+\dbinom{9}{3}$

d) $\dbinom{11}{6}+\dbinom{11}{7}$

52. Sendo $n\in\mathbb{N}$ tal que $\dbinom{11}{5}+\dbinom{11}{n+1}=\dbinom{12}{5}$, então um valor de n é:

a) 4 b) 5 c) 3 d) 2

53. Desafio Supondo que $\dbinom{n}{4}+\dbinom{n}{5}=5n(n+1)(n-3)$ com $n\in\mathbb{N}$, então o valor de n é:

a) 23 b) 22 c) 26 d) 25 e) 24

54. O coeficiente de x^8 no desenvolvimento de $\left(\dfrac{3}{x}+x^3\right)^8$ é:

a) 81

b) 243

c) 5 670

d) 13 608

e) 17 010

55. Qual é o valor de $n\in\mathbb{N}$ para que a soma dos coeficientes de x^{x-1} e x^{x-2} do binômio $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^n$ seja igual a 5?

56. Sendo 625 a soma dos coeficientes do binômio $(3x+2y)^m$, determine o valor de m.

57. Resolva a equação $\dbinom{n+1}{n-1}+\dbinom{n+3}{n+1}=21$, em que $n\in\mathbb{N}$ e $n\geqslant 1$.

58. Considerando que um dos termos do desenvolvimento do binômio $(x+a)^5$ com $a\in\mathbb{N}$ é $360x^3$, então o valor de a é:

a) 2

b) 3

c) 6

d) -6

e) 4

59. Se um dos termos do desenvolvimento do binômio $(x+2a)^8$ com $a\in\mathbb{R}$ é $-28\,672x^5$, então o valor de a é:

a) 2

b) 3

c) -4

d) -3

e) 4

60. Suponha que $(x+b)^4=\dbinom{4}{0}x^4-3\dbinom{4}{1}x^3+9\dbinom{4}{2}x^2-27\dbinom{4}{3}x+81\dbinom{4}{4}$. Então b vale:

a) -4 b) -3 c) 5 d) -2 e) 3

Probabilidade

Experimentos aleatórios

Para decidir qual time iniciará o jogo com a posse de bola, o árbitro de futebol costuma lançar uma moeda ao alto e observar, ao vê-la cair no chão, a face voltada para cima (cara ou coroa). Esse procedimento possui as seguintes características:

- Apesar de todos os resultados possíveis serem conhecidos, não se pode prever com certeza qual desses resultados ocorrerá.
- Ao repetir esse procedimento, pode-se obter um resultado igual ou diferente do anterior.

Dessa maneira, não se pode controlar os fatores que conduzem a um resultado favorável a um ou outro time. Assim, dizemos que os resultados dependem do **acaso**.

Esse é um exemplo de **experimento aleatório**.

Ullstein Bild/Getty Images

Lançamento de moeda no início da partida de futebol entre São Paulo e Ponte Preta, no estádio Moisés Lucarelli, válida pelo campeonato brasileiro de 2015.

Um experimento é dito aleatório quando o seu resultado depende de fatores que não podem ser controlados nem previstos, de modo que, se o experimento for repetido, pode-se obter um resultado igual ou diferente do anterior.

A aleatoriedade está presente em diversos fenômenos do dia a dia. A previsão do tempo, por exemplo, é feita com base em uma grande quantidade de dados meteorológicos, os quais são processados por computadores. Porém, as condições climáticas são influenciadas por outros diversos fatores e, dada a existência do acaso, nenhuma previsão é totalmente segura.

O uso da aleatoriedade fica evidente em certas atividades, como jogos de cartas ou jogos envolvendo movimento de peças em tabuleiro de acordo com o resultado de dados. Nesses jogos, é uma parte importante a incerteza provocada ao se embaralhar as cartas ou ao se utilizar um dado para obter um número de maneira aleatória, por exemplo.

Espaço amostral e evento

Ao estudar um experimento aleatório, é importante definirmos um **espaço amostral**, que é o conjunto formado por todos os possíveis resultados. Esse conjunto será denotado pela letra grega "ômega" (Ω).

Exemplos

a **Experimento**: lançar um dado de 6 faces numeradas de 1 a 6 e observar o número representado na face voltada para cima.

Espaço amostral: há seis resultados possíveis: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Assim, definimos:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Um espaço amostral pode ser um conjunto finito ou infinito. Porém, neste livro, vamos estudar apenas os casos em que o espaço amostral é finito.

b **Experimento**: lançar três moedas e observar as faces dessas moedas voltadas para cima.

Espaço amostral: cada possível resultado possui três componentes. Denotando o resultado "cara" de cada moeda por K, e "coroa" por C, temos o seguinte diagrama de árvore:

$$
\begin{array}{llll}
 & & K & \rightarrow (K, K, K) \\
 & K & & \\
 & & C & \rightarrow (K, K, C) \\
K & & & \\
 & & K & \rightarrow (K, C, K) \\
 & C & & \\
 & & C & \rightarrow (K, C, C)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
 & & K & \rightarrow (C, K, K) \\
 & K & & \\
 & & C & \rightarrow (C, K, C) \\
C & & & \\
 & & K & \rightarrow (C, C, K) \\
 & C & & \\
 & & C & \rightarrow (C, C, C)
\end{array}
$$

Assim, definimos:

$$\Omega = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (K, C, C), (C, K, K), (C, K, C), (C, C, K), (C, C, C)\}$$

Cada elemento do espaço amostral é denominado **evento elementar**, e um subconjunto qualquer de Ω é denominado **evento**. O elemento (K, K, K), correspondente a três caras no experimento do exemplo **b**, é um dos seus oito eventos elementares. Já o conjunto $A = \{1, 3, 5\}$ é o evento que ocorre no experimento do exemplo **a** quando o número obtido é ímpar.

Observe outro exemplo.

c **Experimento**: lançar dois dados simultaneamente e anotar os números de suas faces voltadas para cima.

Espaço amostral: cada possível resultado pode ser representado por um par (n, m), sendo n e m o número correspondente ao resultado de cada dado. Pelo princípio fundamental da contagem, há $6 \cdot 6 = 36$ eventos elementares no espaço amostral $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$.

Observe alguns exemplos de eventos.

- Obter o número 5 em pelo menos um dos dados:

$B = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (6, 5)\}$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- Obter dois números cuja soma é menor do que 6:

$C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- Obter o número 6 em ambos os dados: $A = \{(6, 6)\}$.

> Espaço amostral é o conjunto formado por todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.
>
> Cada subconjunto do espaço amostral é denominado evento.
>
> Cada elemento do espaço amostral é denominado evento elementar.

R1. Um dado de seis faces, numeradas de 1 a 6, e uma moeda são lançados simultaneamente e observadas suas faces voltadas para cima. Determine o espaço amostral desses lançamentos simultâneos.

Resolução

No lançamento desse dado, podemos obter as faces 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 voltadas para cima, e no caso da moeda, podemos obter cara (K) ou coroa (C). Vamos determinar o espaço amostral de duas maneiras.

1ª maneira

Representando o espaço amostral Ω no quadro, temos:

	C	K
1	$(1, C)$	$(1, K)$
2	$(2, C)$	$(2, K)$
3	$(3, C)$	$(3, K)$
4	$(4, C)$	$(4, K)$
5	$(5, C)$	$(5, K)$
6	$(6, C)$	$(6, K)$

Assim, $\Omega = \{(1, C), (1, K), (2, C), \ldots, (6, K)\}$.

2ª maneira

Podemos obter o espaço amostral Ω utilizando o diagrama de árvore.

$$1 \begin{cases} C \longrightarrow (1, C) \\ K \longrightarrow (1, K) \end{cases}$$
$$2 \begin{cases} C \longrightarrow (2, C) \\ K \longrightarrow (2, K) \end{cases}$$
$$3 \begin{cases} C \longrightarrow (3, C) \\ K \longrightarrow (3, K) \end{cases}$$
$$4 \begin{cases} C \longrightarrow (4, C) \\ K \longrightarrow (4, K) \end{cases}$$
$$5 \begin{cases} C \longrightarrow (5, C) \\ K \longrightarrow (5, K) \end{cases}$$
$$6 \begin{cases} C \longrightarrow (6, C) \\ K \longrightarrow (6, K) \end{cases}$$

Assim, $\Omega = \{(1, C), (1, K), (2, C), \ldots, (6, K)\}$.

R2. Considere uma urna com três bolas de mesma massa e mesmas dimensões, sendo uma vermelha, uma azul e uma branca, da qual são retiradas duas bolas na sequência e observadas suas cores. Escreva o espaço amostral se elas forem retiradas:

a) com reposição; b) sem reposição.

Resolução

a) Denotando por V, A e B as bolas de cores vermelha, azul e branca, respectivamente, podemos obter V, A ou B ao retirar uma das bolas. Como elas retornam para a urna, na segunda ação, também podemos obter V, A ou B.

Representando o espaço amostral Ω no diagrama de árvore, temos:

$$V \begin{cases} V \longrightarrow (V, V) \\ A \longrightarrow (V, A) \\ B \longrightarrow (V, B) \end{cases}$$
$$A \begin{cases} V \longrightarrow (A, V) \\ A \longrightarrow (A, A) \\ B \longrightarrow (A, B) \end{cases}$$
$$B \begin{cases} V \longrightarrow (B, V) \\ A \longrightarrow (B, A) \\ B \longrightarrow (B, B) \end{cases}$$

Assim, $\Omega = \{(V, V), (V, A), (V, B), (A, V), (A, A), (A, B), (B, V), (B, A), (B, B)\}$.

b) De modo semelhante ao item anterior, também podemos obter V, A ou B na primeira retirada ao acaso de uma das bolas. No entanto, como a segunda retirada depende da primeira, nela teremos apenas duas bolas na urna, então restam somente duas possibilidades.

Podemos obter o espaço amostral Ω da seguinte maneira:

$$V \begin{cases} A \longrightarrow (V, A) \\ B \longrightarrow (V, B) \end{cases}$$
$$A \begin{cases} V \longrightarrow (A, V) \\ B \longrightarrow (A, B) \end{cases}$$
$$A \begin{cases} A \longrightarrow (B, A) \\ V \longrightarrow (B, V) \end{cases}$$

Assim,

$\Omega = \{(V, A), (V, B), (A, V), (A, B), (B, A), (B, V)\}$.

Atividades

1. O professor de Educação Física vai promover um sorteio para determinar quais dos 5 alunos que jogam na posição de atacante (A, B, C, D e E) formarão a dupla de ataque do time de futebol da escola. Qual deverá ser o espaço amostral das possíveis duplas de ataque formadas por esses alunos?

2. Em uma urna foram colocadas duas bolas laranja (L), duas verdes (V), duas amarelas (A) e duas brancas (B), todas com a mesma massa e a mesma dimensão. Considerando o sorteio de duas bolas ao acaso, determine os eventos a seguir listando seus elementos.

a) E: a primeira bola ser laranja;

b) F: as bolas serem da mesma cor;

c) G: as bolas serem de cores diferentes;

d) H: pelo menos uma bola ser verde.

3. **Em grupo** Para certo jogo de tabuleiro, são utilizados dois dados com a forma de um octaedro, sendo cada face numerada de 1 a 8.

Ronaldo Lucena/ASC Imagens

Observou-se a soma dos números obtidos após um lançamento simultâneo dos dois dados e ela foi menor do que 9. Determinem o evento A: obter soma menor do que 9.

4. Quatro pessoas – Marcela (M), Tiago (T), Eduarda (E) e Luísa (L) – participam de uma competição de perguntas e respostas sobre filmes de ficção científica. O mediador da competição sorteia três pessoas para estabelecer a ordem da primeira rodada de perguntas.

a) Qual é o espaço amostral Ω?

b) Determine os seguintes eventos listando seus elementos:

- P: Luísa não é sorteada para a primeira rodada.
- Q: as três meninas são sorteadas.
- R: Marcela não é sorteada para primeira rodada.
- S: Tiago e Luísa participam da primeira rodada.
- T: as três meninas não participam da primeira rodada de perguntas.

5. Certo jogo de 56 cartas é composto da seguinte maneira:

- 36 cartas numeradas de 1 a 9, divididas nas cores laranja (L), roxa (R), branca (B) e azul (A).

- 12 cartas-símbolo distribuídas 3 a 3 nas mesmas quatro cores anteriores.

- 8 cartas pretas especiais.

Ilustrações: Ronaldo Lucena/ASC Imagens

Considerando que o jogador pegue uma carta aleatória do baralho completo, determine os eventos a seguir listando seus elementos como pares ordenados, especificando o tipo e a cor da carta, respectivamente.

a) Evento D: a carta recebida não é preta e apresenta número menor do que quatro.

b) Evento E: a carta possui estrela, seta, X ou é especial.

c) Evento F: a carta é roxa ou branca e apresenta número maior do que cinco.

6. **Em grupo** Junte-se a um colega para elaborar, cada um no seu caderno, um evento baseando-se em um experimento. Em seguida, determine um espaço amostral para o evento proposto pelo colega. Ao final da atividade, corrijam as respostas.

Probabilidade

Associada aos experimentos ou fenômenos aleatórios, está a incerteza quanto à ocorrência de determinado evento. Na teoria das probabilidades, buscam-se modelos que possam medir essa incerteza. Considere, por exemplo, o experimento de lançar um dado cujo espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e os eventos a seguir.

- Obter o número 3: $A = \{3\}$
- Obter um número primo par: $B = \{2\}$
- Obter um número ímpar: $C = \{1, 3, 5\}$

Há eventos mais difíceis de ocorrer do que outros, como é o caso do evento A em relação ao evento C. É razoável esperar maiores chances para se obter um número ímpar qualquer (1, 3 ou 5) em vez de se obter um desses números em particular (3). Por outro lado, também esperamos que os resultados 3 e 2 sejam igualmente prováveis. Com o conceito de **probabilidade**, busca-se expressar por meio de um número o quanto é provável a ocorrência de um evento, sendo tão maior esse número quanto mais provável for a ocorrência do evento.

No caso do experimento de lançar um dado de seis faces, é uma questão fundamental saber se os resultados possíveis (1, 2, 3, 4, 5 e 6) realmente são todos igualmente prováveis. Isso deve ocorrer se, entre outras características, o dado for perfeitamente regular e uniforme. Nesse caso, diz-se que o dado não é "viciado" ou que é "honesto", assim, podemos considerar os eventos elementares do espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ igualmente prováveis, isto é, **equiprováveis**.

Seja $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ um espaço amostral de um experimento aleatório e $A \subset \Omega$ um evento qualquer, de modo que os eventos elementares $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ são igualmente prováveis. Então, a probabilidade de A, indicada por $P(A)$, é definida por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega}$$

Nessa definição, o número de elementos de A também é chamado **número de casos favoráveis**, e o número de elementos de Ω é chamado **número de casos possíveis**. Assim, a probabilidade de ocorrência de um evento A pode ser escrita como:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Em 1654, um amigo do francês Blaise Pascal (1623–1662) o indagou a respeito da maneira que um jogador deveria ser indenizado em um jogo de dados interrompido. Pascal informou seu compatriota Pierre de Fermat (1601–1665), e a correspondência entre eles sobre o assunto originou os fundamentos a respeito da moderna teoria das probabilidades.

Fonte de pesquisa: Boyer, Carl Benjamin. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Coleção particular. Fotografia: Georgios Kollidas/Shutterstock.com/ID/BR

Blaise Pascal, físico, matemático, filósofo e teólogo do século XVII. Meyer, H. Técnica: gravura. Memoirs encyclopedia, Reino Unido, 1833.

Exemplos:

a Um dado não viciado é lançado e, então, o número da face voltada para cima é observado. O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- O evento "obter um número maior do que 6" é representado pelo conjunto vazio $(\varnothing)$, pois nenhum elemento do espaço amostral é maior do que 6. Esse é um **evento impossível**, e a probabilidade de sua ocorrência é:

$$P(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0$$

- O evento "obter um número divisor de 60" é representado pelo espaço amostral Ω, pois todos os seus elementos são divisores de 60. Esse é um **evento certo**, e a probabilidade de sua ocorrência é:

$$P(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = \frac{6}{6} = 1$$

b Em uma urna são colocadas 10 bolas idênticas, a não ser pela cor, pois 7 são azuis e 3 vermelhas. Ao retirar aleatoriamente uma bola dessa urna, a probabilidade de a bola retirada ser:

- azul é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

- vermelha é dada por:

$$P(V) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

Observe algumas propriedades básicas:

1) $P(\varnothing) = 0$ e $P(\Omega) = 1$.

Demonstração

- $P(\varnothing) = \dfrac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} = \dfrac{0}{n(\Omega)} = 0$
- $P(\Omega) = \dfrac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$

2) Se A e B são eventos e $A \subset B$, então $P(A) \leqslant P(B)$.

Demonstração

Se $A \subset B$, então a quantidade de elementos de A é menor ou igual à quantidade de elementos de B, ou seja, $n(A) \leqslant n(B)$. Assim, como $n(\Omega) > 0$, temos:

$$n(A) \leqslant n(B) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leqslant \frac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$$

3) Para qualquer evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Demonstração

Se A é um evento, então $\varnothing \subset A \subset \Omega$. Assim, utilizando as propriedades **1** e **2**, temos:

$$\varnothing \subset A \subset \Omega \Rightarrow P(\varnothing) \leq P(A) \leq P(\Omega) \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

É comum expressarmos uma probabilidade na forma de porcentagem. De acordo com a propriedade **3**, a probabilidade de um evento pode ser um valor de 0% a 100%. Por exemplo, ao lançar uma moeda honesta, a probabilidade de sair cara é:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

Outra maneira de expressarmos essa probabilidade é dizer que há 1 chance em 2 de se obter cara ou que a probabilidade é de 1 em 2.

Exemplo

No lançamento de um dado honesto com faces numeradas de 1 a 6, qual é a probabilidade de obter um número:

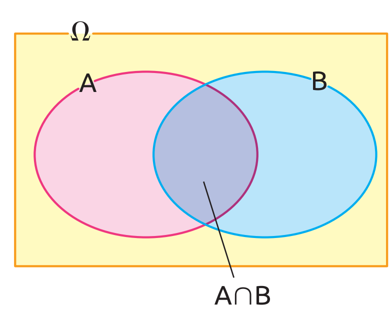
- par?
- primo?
- par ou primo?

Como o dado é honesto, o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é equiprovável. Para os eventos $A = \{2, 4, 6\}$ (obter um número par) e $B = \{2, 3, 5\}$ (obter um número primo), pede-se para calcular, respectivamente, $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cup B)$. Temos:

- $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = 0{,}5 = 50\%$
- $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = 0{,}5 = 50\%$
- $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, logo, $P(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{6} = 0{,}8\bar{3} = 83{,}\bar{3}\%$

Observe a seguir outra propriedade, relacionada à probabilidade da união de dois eventos.

Para quaisquer conjuntos finitos A e B, ao calcularmos a soma $n(A) + n(B)$, é possível obter como resultado um número maior do que $n(A \cup B)$, pois a quantidade de elementos da intersecção $A \cap B$, caso $A \cap B \neq \varnothing$, será somada duas vezes, de modo que devemos subtrair $n(A \cap B)$ da soma $n(A) + n(B)$ para obter $n(A \cup B)$, ou seja:



Sergio Lima/ID/BR

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo os dois membros dessa igualdade por $n(\Omega)$, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(\Omega)} \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \Rightarrow$$

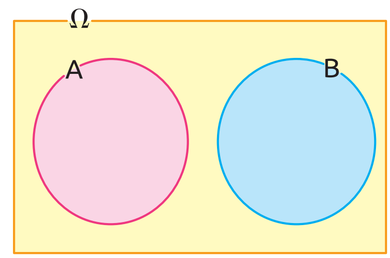
$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Sejam A e B eventos de um espaço amostral. Então:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Observe a seguir alguns casos particulares importantes.

- Se $A \cap B = \varnothing$, temos:

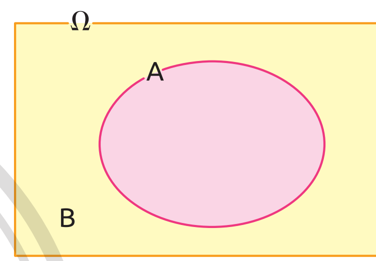


$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(\varnothing)}_{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Nesse caso, dizemos que A e B são **eventos disjuntos** ou que são **mutuamente exclusivos**.

- Se B é o complementar de A em relação a Ω, então $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \varnothing$, logo:



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

$$\underbrace{P(\Omega)}_{1} = P(A) + P(B) - \underbrace{P(\varnothing)}_{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = P(A) + P(B) \Rightarrow P(B) = 1 - P(A)$$

Nesse caso, dizemos que A e B são **eventos complementares**.

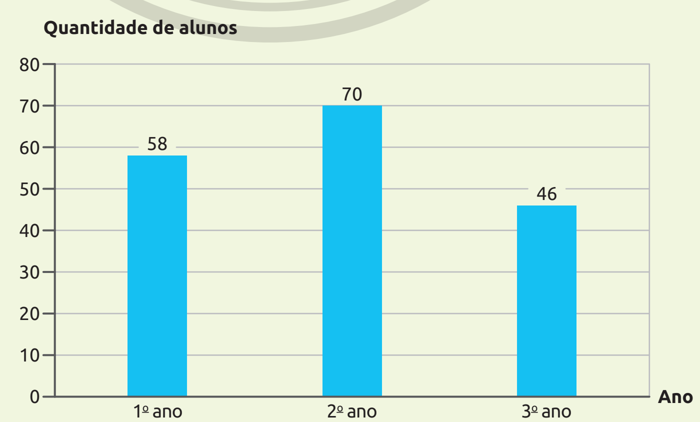
O complementar de A em relação a Ω é o conjunto formado pelos objetos que pertencem a Ω mas não pertencem a A e é denotado por A^c, $\bar{A}$ ou C_{Ω}^{A}. Assim, para qualquer evento A, temos:

$$\boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$$

Atividades resolvidas

R3. Observe o gráfico a seguir.

Quantidade de alunos matriculados por ano do Ensino Médio da escola Luiz de Souza em 2017



Sergio Lima/ID/BR

Fonte de pesquisa: Direção da escola Luiz de Souza.

Calcule a probabilidade de, ao se indicar aleatoriamente um aluno do Ensino Médio, ele estar matriculado no:

- 1º ano
- 2º ano
- 3º ano

Resolução

De acordo com o gráfico, o total de alunos matriculados no Ensino Médio é dado por $58 + 70 + 46 = 174$.

Sejam:

A: alunos matriculados no 1º ano;

B: alunos matriculados no 2º ano;

C: alunos matriculados no 3º ano.

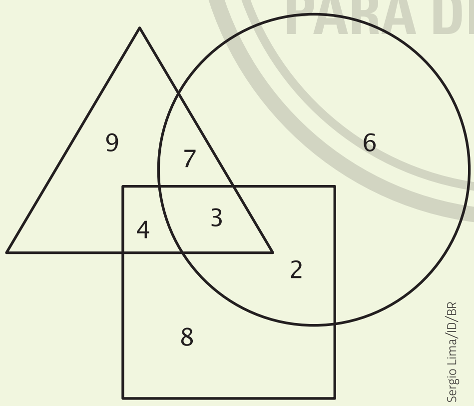
Assim:

$$P(A) = \frac{58}{174} = \frac{1}{3} = 33{,}\bar{3}\%.$$

$$P(B) = \frac{70}{174} = \frac{35}{87} \simeq 40{,}23\%.$$

$$P(C) = \frac{46}{174} = \frac{23}{87} \simeq 26{,}44\%.$$

R4. (Unicamp) O diagrama abaixo indica a distribuição dos alunos matriculados em três cursos de uma escola. O valor da mensalidade de cada curso é de R$ 600,00, mas a escola oferece descontos aos alunos que fazem mais de um curso. Os descontos, aplicados sobre o valor total da mensalidade, são de 20% para quem faz dois cursos e de 30% para os matriculados em três cursos.



Sergio Lima/ID/BR

a) Por estratégia de *marketing*, suponha que a escola decida divulgar os percentuais de desconto, calculados sobre a mensalidade dos cursos adicionais e não sobre o total de mensalidade. Calcule o percentual de desconto que incide sobre a mensalidade do segundo curso para aqueles que fazem dois cursos e o percentual de desconto sobre o terceiro curso para aqueles que fazem três cursos.

b) Com base nas informações do diagrama, encontre o número de alunos matriculados em pelo menos dois cursos. Qual a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, estar matriculado em apenas um curso?

Resolução

a) Para os alunos que fazem dois cursos, o desconto total determinado pelo projeto original seria de:

$$2 \cdot 600 \cdot 20\% = 1\,200 \cdot 0{,}2 = 240$$

Portanto, o desconto seria de R$ 240,00. Agora, vamos calcular a porcentagem que esse desconto implica apenas na segunda mensalidade.

$$600 \cdot x\% = 240 \Rightarrow x = \frac{240 \cdot 100}{600} \Rightarrow x = 40$$

Portanto, para os alunos que fazem dois cursos, o desconto será de 40% sobre a mensalidade do segundo curso.

Para os alunos que fazem três cursos, o desconto total determinado pelo projeto original seria de:

$$3 \cdot 600 \cdot 30\% = 1\,800 \cdot 0{,}3 = 540$$

Portanto, o desconto seria de R$ 540,00. Agora, vamos calcular a porcentagem que esse desconto implica apenas na mensalidade do terceiro curso.

$$600 \cdot x\% = 540 \Rightarrow x = \frac{540 \cdot 100}{600} \Rightarrow x = 90$$

Portanto, para os alunos que fazem três cursos, o desconto será de 90% sobre a mensalidade do terceiro curso.

b) De acordo com o diagrama, a quantidade total de alunos matriculados $n(\Omega)$ é dada por

$$n(\Omega) = 9 + 7 + 3 + 4 + 8 + 2 + 6 = 39.$$

Temos ainda que o total de alunos matriculados em apenas um curso $(n(C))$ é dado por $n(C) = 9 + 6 + 8 = 23$.

Assim, a probabilidade p de, escolhendo ao acaso um desses alunos, ele estar matriculado em apenas um curso é dada por:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{23}{39} \simeq 58{,}97\%$$

Atividades resolvidas

R5. Em uma escola com 300 alunos, oferta-se, entre outros, os cursos de Língua Inglesa e de Língua Espanhola. Sabendo que 200 alunos frequentam o curso de Língua Inglesa, 170 frequentam o curso de Língua Espanhola e 10 não frequentam curso algum:

a) construa um diagrama de Venn com a quantidade de alunos que frequenta cada uma das opções oferecidas pela escola.

b) escreva, utilizando porcentagem, a probabilidade de, escolhido ao acaso, um aluno dessa escola:

- frequentar apenas o curso de Língua Inglesa;
- não frequentar curso algum;
- frequentar os dois cursos ofertados.

Resolução

a) Sejam:

$n(I)$: quantidade de alunos do curso de Língua Inglesa.

$n(E)$: quantidade de alunos do curso de Língua Espanhola.

$n(N)$: quantidade de alunos que não frequenta curso algum.

$n(\Omega)$: quantidade total de alunos.

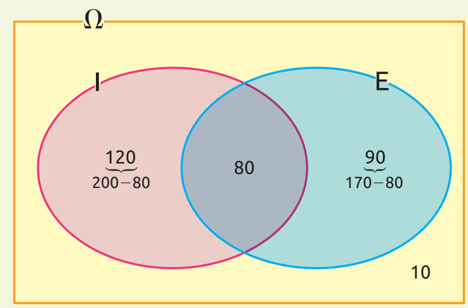
Precisamos determinar a quantidade de alunos que frequentam ambos os cursos, ou seja, $n(I \cap E)$. Assim, temos:

$$n(\Omega) = n(I) + n(E) + n(N) - n(I \cap E) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 300 = 200 + 170 + 10 - n(I \cap E) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(I \cap E) = 380 - 300 \Rightarrow n(I \cap E) = 80$$

Construindo o diagrama, obtemos:



Sergio Lima/ID/BR

b) • Seja $n(A)$ a quantidade de alunos que frequentam apenas o curso de Língua Inglesa. A probabilidade de o aluno frequentar apenas o curso de Língua Inglesa é dada por:

$$P(A) = \frac{120}{300} = 0{,}4 = 40\%$$

- A probabilidade de o aluno não frequentar curso algum é dada por:

$$P(N) = \frac{10}{300} = 0{,}0\overline{3} = 3{,}3\overline{3}\%$$

- A probabilidade de o aluno frequentar ambos os cursos é dada por:

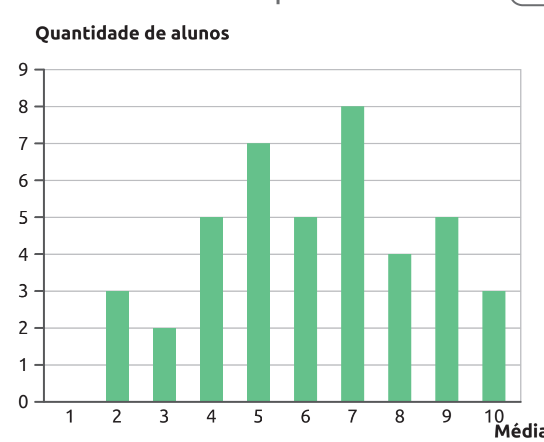
$$P(I \cap E) = \frac{80}{300} = 0{,}2\overline{6} = 26{,}\overline{6}\%$$

Atividades

7. A Educação a Distância é uma modalidade de educação efetivada por meio do uso de tecnologias de informação e comunicação, na qual professores e alunos estão separados fisicamente no espaço ou no tempo. Assim como nos cursos presenciais, têm trabalhos, avaliações, repetência, etc. A média para ser aprovado em uma determinada instituição é 7.

De acordo com o gráfico ao lado, qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso ter obtido a média para ser aprovado?

Rendimento acadêmico dos alunos em uma determinada disciplina em 2016



Sergio Lima/ID/BR

Fonte de pesquisa: Instituição de Ensino.

8. Em um recipiente podem ser colocadas 30 bolinhas de gude de mesma dimensão, nas cores verde, azul ou branca. Quantas bolinhas de gude de cada cor devem ser colocadas nesse recipiente de maneira que, ao tirar uma bolinha ao acaso, fosse:

a) certo sair uma bolinha de gude verde?

b) impossível sair uma bolinha de gude azul?

9. Lançando-se um dado honesto, com as faces numeradas de 1 a 6, qual seria a probabilidade de se obter na face voltada para cima:

a) um número par?

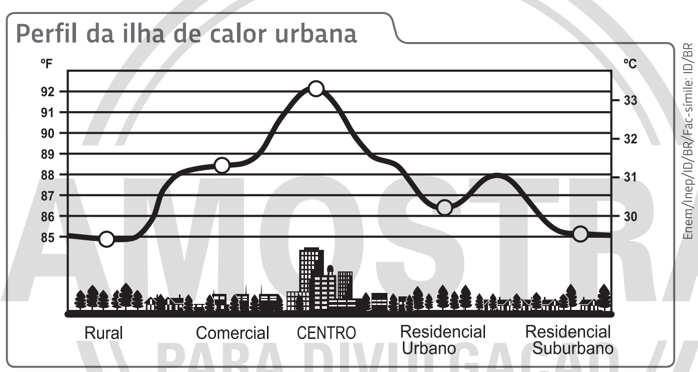
b) o número 4?

c) o número zero?

d) um número ímpar ou primo?

10. Uma urna contém 7 bolas amarelas, 5 bolas verdes e 3 bolas vermelhas, todas com a mesma massa e a mesma dimensão. Determine a probabilidade de se retirar dessa urna uma bola verde ou vermelha.

11. (Enem/Inep) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deviam ser inferiores a 31 °C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Fonte: EPA.

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{3}{5}$

e) $\frac{3}{4}$

12. Participaram de um congresso 300 profissionais da área de Educação, sendo 120 professores de Matemática, 80 professores de Filosofia, 52 professores de História e os demais de Pedagogia. Escolhido ao acaso um participante desse congresso, qual é a probabilidade de ele ser professor de Matemática ou de Filosofia?

13. O diretor de uma agência de viagens realizou uma pesquisa com 500 entrevistados para saber qual é o destino de férias preferido pelos clientes, entre as opções de Fortaleza (CE), Maceió (AL) e Aracaju (SE).

Sorteando um desses clientes ao acaso, qual é a probabilidade de ele preferir passar as férias somente em Aracaju?

Quantidade de clientes	Preferência
390	Aracaju
330	Fortaleza
290	Maceió
230	Aracaju e Fortaleza
210	Aracaju e Maceió
180	Fortaleza e Maceió
110	Aracaju, Fortaleza e Maceió

Utilize as informações a seguir para responder às questões de números **14** e **15**.

(Uerj) Uma loja identifica seus produtos com um código que utiliza 16 barras, finas ou grossas. Nesse sistema de codificação, a barra fina representa o zero e a grossa o 1. A conversão do código em algarismos do número correspondente a cada produto deve ser feita de acordo com este quadro:

Código	Algarismo	Código	Algarismo
0000	0	0101	5
0001	1	0110	6
0010	2	0111	7
0011	3	1000	8
0100	4	1001	9

Observe um exemplo de código e de seu número correspondente:

Uerj/Fac-símile: ID/BR

= 0729

14. Considere o código ao lado, que identifica determinado produto:

Uerj/Sergio Lima/Fac-símile: ID/BR

Esse código corresponde ao seguinte número:

a) 6 835 b) 5 724 c) 8 645 d) 9 768

15. Existe um conjunto de todas as sequências de 16 barras finas ou grossas que podem ser representadas. Escolhendo-se ao acaso uma dessas sequências, a probabilidade de ela configurar um código do sistema descrito é:

a) $\frac{5}{2^{15}}$ b) $\frac{25}{2^{14}}$ c) $\frac{125}{2^{13}}$ d) $\frac{625}{2^{12}}$

16. Ao sortearmos uma das permutações de três algarismos obtidos dos algarismos 1, 2 e 3, qual é a probabilidade de que ocorra um número:

a) múltiplo de três? b) primo?

- Qual dos itens acima é um evento certo? E qual deles é um evento impossível?

17. Leia a tira abaixo.

© www.humorcomciencia.com

SILVA, Willian Raphael. *A senha*. Humor com Ciência. Disponível em: <www.humorcomciencia.com/tirinhas/tirinha-matematica/>. Acesso em: 21 set. 2015.

Suponha que a senha do personagem Bugio seja composta por 5 algarismos que podem se repetir.

a) Quantas são as possibilidades de senhas com essa característica?

b) Qual é a probabilidade de alguém, ao acaso, acertar essa senha na primeira tentativa?

c) Se o personagem Bugio escolhesse cada um dos algarismos de sua senha ao acaso, qual seria a probabilidade de essa senha ser formada por um número com todos os algarismos iguais?

Probabilidade condicional

Um grupo de 30 pessoas, cada uma identificada com um número de 1 a 30, participará de um sorteio para a premiação de apenas uma pessoa. Cada participante possui a mesma chance de ser contemplado. Elton e sua família são identificados pelos números 11, 12, 13, 14 e 15. Então, $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$, e o conjunto $A = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ é o evento "alguém da família de Elton ser sorteado", cuja probabilidade de ocorrência é:

$$P(A) = \frac{\overbrace{n(A)}^{\text{número de casos favoráveis}}}{\underbrace{n(\Omega)}_{\text{número de casos possíveis}}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} = 16{,}\overline{6}\%$$

Agora, suponha que o sorteio tenha sido realizado, e o número sorteado seja ímpar, isto é, ocorreu o evento $B = \{1, 3, 5, \ldots, 29\}$.

Com essa informação, os casos favoráveis passam a ser apenas os elementos de A que são ímpares, ou seja, os elementos do conjunto $A \cap B = \{11, 13, 15\}$, e os casos possíveis passam a ser apenas os elementos de B. Nessa situação, a probabilidade de ocorrer A, dado que ocorreu B, identificado por $P(A \mid B)$, é:

$$P(A \mid B) = \frac{\overbrace{n(A \cap B)}^{\text{número de casos favoráveis}}}{\underbrace{n(B)}_{\text{número de casos possíveis}}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 20\%$$

Essa probabilidade é possível de ser calculada porque B é um conjunto não vazio.

O número $P(A \mid B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$ é denominado probabilidade condicional de A dado B. Ao dividir o numerador e o denominador dessa fração por $n(\Omega)$, obtemos:

$$P(A \mid B) = \frac{\dfrac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}} \Leftrightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Sejam A e B eventos de um espaço amostral equiprovável, com $B \neq \varnothing$. A probabilidade condicional de A dado B é definida por:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}}$$

De modo equivalente, tem-se:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Exemplos

a Em um grupo de estudantes, 20 falam inglês, 16 falam espanhol e 8 falam os dois idiomas. Ao escolher aleatoriamente uma pessoa desse grupo, qual é a probabilidade de:

- ela falar inglês, sabendo que fala espanhol?
- ela falar espanhol, sabendo que fala inglês?

Nessa situação, o espaço amostral é o conjunto dos estudantes do grupo. Observe duas maneiras de escrever a resolução.

1ª maneira

Sabendo que a pessoa escolhida fala espanhol, então, para o evento em que ela fala inglês, os casos favoráveis são aqueles em que ela fala inglês e espanhol, e os casos possíveis são os que ela fala espanhol. Assim, a probabilidade é $\frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 50\%$.

De modo semelhante, sabendo que a pessoa escolhida fala inglês, então a probabilidade de que ela fale espanhol é $\frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 40\%$.

2ª maneira

Considere A o conjunto das pessoas do grupo falantes de inglês e B o conjunto das falantes de espanhol. De acordo com as informações, temos $n(A) = 20$, $n(B) = 16$ e $n(A \cap B) = 8$. A probabilidade de a pessoa escolhida falar inglês, sabendo que fala espanhol, corresponde à probabilidade condicional:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 50\%$$

De modo semelhante, a probabilidade de a pessoa escolhida falar espanhol, sabendo que fala inglês, é:

$$P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 40\%$$

b Clodoaldo vende camisas do time de futebol de sua cidade. Em seu estoque, ele tem camisas de duas cores, sendo uma azul e outra branca, que podem ser do tamanho grande ou do tamanho médio. Observe no quadro a quantidade que ele possui de cada cor e tamanho.

	Azul	Branca
Médio	18	25
Grande	13	19

Em um experimento de escolher uma dessas camisas ao acaso, vamos considerar os eventos:

A: escolher uma camisa azul;

B: escolher uma camisa branca;

M: escolher uma camisa de tamanho médio;

G: escolher uma camisa de tamanho grande.

Observe a seguir algumas probabilidades condicionais relacionadas a esses eventos.

- Probabilidade de escolher uma camisa de tamanho grande, sendo a camisa azul:

$$P(G|A) = \frac{n(G \cap A)}{n(A)} = \frac{13}{18 + 13} = \frac{13}{31} \simeq 41{,}94\%$$

- Probabilidade de escolher uma camisa branca, sendo a camisa de tamanho médio:

$$P(B|M) = \frac{n(B \cap M)}{n(M)} = \frac{25}{18 + 25} = \frac{25}{43} \simeq 58{,}14\%$$

- Probabilidade de escolher uma camisa azul, sendo a camisa branca:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{0}{25 + 19} = 0$$

Nesse caso, a probabilidade é zero porque $A \cap B = \varnothing$, ou seja, não há camisa ao mesmo tempo azul e branca.

Probabilidade da intersecção de eventos

De acordo com o que estudamos anteriormente, se A e B são eventos não vazios, então:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ e } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

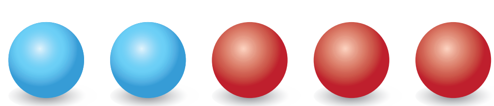
Essas fórmulas são equivalentes, respectivamente, a:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \text{ e } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Isso mostra que a probabilidade de que os dois eventos ocorram ao mesmo tempo, ou seja, $P(A \cap B)$, é obtida ao se multiplicar a probabilidade de um dos eventos pela probabilidade do outro, dado que o primeiro tenha ocorrido.

Exemplos

a Em uma urna, serão colocadas 2 bolas azuis e 3 vermelhas, todas com a mesma massa e mesma dimensão. Se dessa urna forem retiradas aleatoriamente 2 bolas sucessivamente e sem reposição, qual a probabilidade de que ambas sejam azuis?



Sergio Lima/ASC Imagens

Para resolver esse problema, consideramos os eventos A e B dados, respectivamente, pelas condições "a primeira bola é azul" e "a segunda bola é azul".

- Na primeira retirada, há 5 bolas, sendo 2 azuis, logo, $P(A) = \frac{2}{5}$.
- No caso de a primeira retirada ser de 1 bola azul, ou seja, se ocorrer o evento A, sobrarão na urna 4 bolas, sendo 1 azul, logo, $P(B|A) = \frac{1}{4}$.

Assim, a probabilidade de que as duas retiradas sejam de bolas azuis é:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 10\%$$

b Na situação do exemplo anterior, qual a probabilidade de a segunda bola retirada ser branca, ou seja, qual o valor de $P(B)$?

Neste caso, o resultado da primeira retirada influencia a probabilidade condicional de ocorrer B. Temos dois casos:

1º caso: a primeira bola retirada é branca.

A probabilidade de a primeira bola ser branca e a segunda também ser branca foi calculada no exemplo anterior, e é igual a:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

2º caso: a primeira bola retirada não é branca.

A probabilidade de a primeira bola não ser branca e a segunda ser branca é dada por:

$$P(A^c \cap B) = P(A^c) \cdot P(B|A^c) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

Observe que $A \cap B$ e $A^c \cap B$ são eventos disjuntos cuja união é B, logo:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$$

Nos exemplos anteriores, os eventos A e B são tais que $P(B|A) \neq P(B)$, ou seja, a ocorrência de A modifica a probabilidade de ocorrência de B. Nesse caso, A e B são eventos **dependentes**. Porém, também há situações em que dois eventos A e B satisfazem $P(B|A) = P(B)$ e, nesse caso, A e B são eventos **independentes**.

Exemplo

Considere o experimento de lançar uma moeda honesta 2 vezes. Os eventos "sair cara no primeiro lançamento" e "sair coroa no segundo lançamento" são dependentes ou independentes?

Nesse experimento, temos a noção intuitiva de que o fato de sair cara no primeiro lançamento não muda a probabilidade de sair coroa no segundo, ou seja, esses eventos são independentes. Para provar isso, vamos denotar por K e C os resultados cara e coroa, respectivamente, de cada lançamento. Então, o espaço amostral é composto pelos elementos do quadro abaixo.

	K	C
K	(K, K)	(K, C)
C	(C, K)	(C, C)

Ou seja, $\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$. O evento "sair cara no primeiro lançamento" é dado por $A = \{(K, K), (K, C)\}$, e o evento "sair coroa no segundo lançamento" é dado por $B = \{(K, C), (C, C)\}$. Temos:

- $P(B|A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{1}{2}$
- $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Temos que $A \cap B = \{(K, C)\}$, logo, $n(A \cap B) = 1$

Logo, A e B são eventos independentes, pois $P(B|A) = P(B)$.

Considere A e B eventos não vazios. Quando a ocorrência do evento A não modifica a probabilidade de ocorrência do evento B, ou seja, $P(B|A) = P(B)$, temos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B)$$

Por outro lado, também vale a relação $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$.

Assim:

$$P(A) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(B)} = P(A|B)$$

Portanto, a ocorrência do evento B também não modifica a probabilidade de ocorrência do evento A. Assim, temos:

Os eventos não vazios A e B são independentes se, e somente se, qualquer uma das condições a seguir é satisfeita.

$\boxed{P(A|B) = P(A)}$ $\boxed{P(B|A) = P(B)}$ $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

Exemplo

Ao lançar 2 vezes um dado de 6 faces não viciado, qual a probabilidade de que saia um número par no primeiro lançamento e um número ímpar no segundo?

Nessa situação, ao lançar o dado pela segunda vez, não importa qual tenha sido o resultado do primeiro lançamento, ou seja, os eventos são independentes. A probabilidade do evento A dado pela condição "sair um número par no primeiro lançamento" é $\frac{3}{6}$, e a probabilidade do evento B dado pela condição "sair um número ímpar no segundo lançamento" é $\frac{3}{6}$. Assim, a probabilidade que se pede é:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

R6. Considere o quadro abaixo que representa a quantidade de alunos inscritos em disciplinas de língua estrangeira e optativas do 3º ano do Ensino Médio de uma escola.

	Música	Teatro	Dança	Total
Inglês	10	12	7	29
Espanhol	4	1	6	11
Total	14	13	13	40

Escolhido um desses alunos ao acaso, qual a probabilidade de que ele estude teatro, sabendo que está matriculado nas aulas de inglês?

Resolução

Resolvemos esse problema de duas maneiras.

1ª maneira

Observando o quadro, identificamos que 29 alunos estudam inglês e, destes, 12 estudam teatro. Assim, a probabilidade P de que esse aluno escolhido estude teatro é $P = \frac{12}{29} \simeq 41{,}38\%$.

2ª maneira

Vamos utilizar a fórmula $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, em que A e B são os seguintes eventos:

A: o aluno estuda inglês; B: o aluno estuda teatro.

Com isso, temos:

$$P(B|A) = \frac{\frac{12}{40}}{\frac{29}{40}} = \frac{12}{40} \cdot \frac{40}{29} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{12}{29} \simeq 41{,}38\%$$

R7. Certa lanchonete oferece dois tipos de refeições aos seus fregueses, que devem escolher entre uma delas: bauru de forno e cachorro-quente. Sabe-se que, de 100 fregueses que frequentam a lanchonete diariamente, 30 são homens e preferem bauru; 15 são mulheres e preferem cachorro-quente; 80 são homens. Suponha que um freguês qualquer entre no restaurante e considere os eventos:

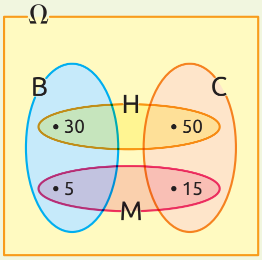
H: o freguês é homem; B: o freguês prefere bauru;
M: o freguês é mulher; C: o freguês prefere cachorro-quente.

Seja Ω o conjunto de todos os 100 fregueses. Calcule:

a) $P(H)$ b) $P(B|H)$ c) $P(B|C)$ d) $P(C|M)$ e) $P(H|B)$ f) $P(M|B)$

Resolução

Observe no diagrama ao lado a representação da quantidade de pessoas em cada evento.



Sergio Lima/ID/BR

a) $P(H) = \dfrac{n(H)}{n(\Omega)} = \dfrac{80}{100} = 80\%$

b) Podemos resolver esse item de duas maneiras.

1ª maneira

$P(B|H) = \dfrac{n(B \cap H)}{n(H)} = \dfrac{30}{80} = 0{,}375 = 37{,}5\%$

2ª maneira

$P(B|H) = \dfrac{P(B \cap H)}{P(H)} = \dfrac{\frac{30}{100}}{\frac{80}{100}} = \dfrac{0{,}3}{0{,}8} = 37{,}5\%$

c) Sabendo que os eventos "o cliente prefere bauru" e "o cliente prefere cachorro-quente" são independentes, temos $n(B \cap C) = 0$. Logo, $P(B|C) = \dfrac{n(B \cap C)}{n(C)} = \dfrac{0}{65} = 0\%$.

d) $P(C|M) = \dfrac{n(C \cap M)}{n(M)} = \dfrac{15}{20} = 0{,}75 = 75\%$

e) $P(H|B) = \dfrac{n(B \cap H)}{n(B)} = \dfrac{30}{35} = \dfrac{6}{7} \simeq 86{,}71\%$

f) $P(M|B) = \dfrac{n(M \cap B)}{n(B)} = \dfrac{5}{35} = \dfrac{1}{7} \simeq 14{,}29\%$

R8. Dois eventos X e Y de um espaço amostral são independentes. Qual a probabilidade de ocorrer o evento Y, sabendo que a probabilidade de ocorrer o evento X é de 0,3 e a probabilidade da união de X com Y é de 0,6?

Resolução

Do enunciado, temos $P(X) = 0{,}3$ e $P(X \cup Y) = 0{,}6$. Vimos que a probabilidade da união é dada por $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$ e, assim:

$$0{,}6 = 0{,}3 + P(Y) - P(X \cap Y)$$

Como X e Y são eventos independentes, segue que $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$. Logo,

$0{,}6 = 0{,}3 + P(Y) - P(X) \cdot P(Y) \Rightarrow 0{,}3 = P(Y) - P(X) \cdot P(Y) \Rightarrow 0{,}3 = P(Y) - 0{,}3 \cdot P(Y) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}3 = P(Y)(1 - 0{,}3) \Rightarrow 0{,}3 = 0{,}7P(Y) \Rightarrow P(Y) = \dfrac{3}{7} \simeq 43\%$

R9. Uma urna contém 14 moedas de tamanhos iguais e mesma massa, sendo 8 douradas e 6 prateadas. Na retirada de 2 moedas ao acaso dessa urna, calcule a probabilidade de a primeira moeda ser dourada e a segunda prateada nos casos abaixo.

a) Não existe reposição entre uma retirada e outra.

b) Existe reposição entre uma retirada e outra.

Resolução

a) Sejam os eventos:

A: a primeira moeda é dourada;

B: a segunda moeda é prateada.

Como existem 8 moedas douradas e o total de moedas é 14, temos $P(A) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$. Para a retirada da segunda moeda, restarão na urna 13 moedas, sendo 6 delas prateadas. Assim, $P(B|A) = \frac{6}{13}$. Logo,

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{13} = \frac{24}{91}$.

b) Do enunciado inicial, temos $P(A) = \frac{4}{7}$. Para retirar a segunda moeda, estarão na urna todas as 14 moedas, devido à reposição feita. Logo, $P(A \cap B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{14} = \frac{24}{98} = \frac{12}{49}$.

Atividades resolvidas

Atividades

18. Identifique se os eventos são dependentes ou independentes.

a) Nascimento de uma filha depois de um filho.

b) Escolher uma peça de dominó com os dois lados iguais e depois, sem a reposição da primeira peça, escolher novamente outra peça com os lados iguais.

c) Lançar três vezes uma moeda e cair cara na primeira vez e coroa na segunda e na terceira vez.

d) Pegar uma carta do baralho que seja do naipe de copas e depois, sem reposição da primeira carta, pegar outra carta do naipe de copas.

19. Observe no quadro abaixo o resultado de uma pesquisa com homens e mulheres de uma região, entre 18 e 25 anos, a respeito do estilo musical favorito deles.

	Sertanejo (S)	Rock (R)	Eletrônica (E)
Homens (H)	68	40	26
Mulheres (M)	50	12	11

Pretende-se convidar por sorteio um dos participantes da pesquisa para uma entrevista sobre preferências musicais em um programa de auditório. Calcule a probabilidade de escolha desse participante em cada situação abaixo.

a) $P(H|E)$ b) $P(M|S)$ c) $P(H|R)$

20. Em uma turma de 34 alunos do 2º ano do Ensino Médio, verifica-se que 18 meninas gostam da disciplina de Geografia, enquanto 8 dos 11 meninos também gostam dessa disciplina. Escolhendo ao acaso um estudante dessa turma, qual é a probabilidade de ser:

a) um menino que goste de Geografia?

b) uma menina que não goste de Geografia?

21. Em uma prateleira estão 20 *DVDs* de filmes dos quais 7 são de ficção, 8 de aventura e 5 de romance. Esses *DVDs* estão em caixas de mesmo tamanho, não organizados e sem identificação. Uma pessoa retira dessa prateleira 2 *DVDs* aleatoriamente. Qual a probabilidade de ambos serem de ficção?

22. Um baralho comum possui cartas com os naipes ouros, copas, paus e espadas, sendo 13 cartas cada um. Qual a probabilidade de se retirar desse baralho sem devolver ao monte:

a) 2 cartas de ouros?

b) a 1ª carta de paus e outras 2 cartas de ouros?

23. Uma fábrica produz caixas de lápis de cor de mesmo formato e tamanho, nos modelos aquarela e metálico. Cada lote de caixas embalado contém 300 caixas de lápis de cor, sendo 200 do modelo aquarela e 100 do modelo metálico. Ao retirar aleatoriamente de um lote 2 caixas de lápis de cor, qual a probabilidade de:

a) as duas serem aquarela?

b) uma ser aquarela e outra ser metálico?

c) as duas serem metálico?

24. Uma gata está dando à luz 4 filhotes. Sabendo que o primeiro filhote nascido é macho, qual é a probabilidade de os outros 3 também serem machos?

25. Em grupo Para cada experimento, elabore no caderno um problema de probabilidade condicional que envolva dois eventos dependentes ou independentes, usando uma das informações dos itens abaixo. Depois, apresente o problema a um colega e peça a ele que o resolva. Não se esqueçam de conferir se as respostas estão corretas.

a) Cartas de um baralho.

b) Fichas numeradas de 1 até 12.

c) Peças de um dominó.

26. (Uepa) Sabe-se que ler cria bons estudantes, melhora a capacidade de relacionamento e ativa os lugares certos do cérebro. Cultivar o hábito da leitura surte efeitos nítidos: desenvolve a imaginação, o vocabulário e o conhecimento. Não é acaso que jovens de grande promessa nos estudos e na carreira profissional sejam leitores vorazes. Pensando nisso, um jovem deseja presentear um amigo leitor com dois livros, entretanto fica na dúvida quanto ao estilo – ficção ou não ficção. Decide sortear dois títulos distintos dentre 10 títulos de ficção e 12 títulos de não ficção.

Fonte: Texto adaptado – Revista *VEJA* (edição 2373).

Tomando por base as informações do texto acima, a probabilidade de esse jovem sortear, sucessivamente, um após o outro, 2 títulos de ficção é:

a) $\frac{15}{77}$

b) $\frac{5}{11}$

c) $\frac{6}{11}$

d) $\frac{5}{8}$

e) $\frac{1}{5}$

27. (UPE) Dentre os esportes oferecidos aos estudantes de uma escola com 3 000 alunos, temos o futebol como preferência, sendo praticado por 600 estudantes. Trezentos estudantes dessa mesma escola praticam natação, e 100 praticam ambos os esportes. Selecionando-se um estudante praticante de futebol para uma entrevista, qual a probabilidade de ele também praticar natação?

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{5}{6}$

28. Desafio Num experimento a respeito da reação nocebo, 500 pessoas foram divididas em dois grupos para ouvir palestras sobre o *Wi-Fi*.

	Palestra	Participantes
Primeiro grupo	efeitos prejudiciais do celular, *Wi-Fi* e ondas eletromagnéticas	275
Segundo grupo	benefícios do celular, *Wi-Fi* e ondas eletromagnéticas	225

Em seguida, todos os participantes foram reunidos em um local fechado e foi dito que ali estava funcionando uma rede *Wi-Fi*. Do total de pessoas, 62% apresentaram náusea e dores de cabeça quando souberam do *Wi-Fi* e 190 não tiveram reação alguma (85 dessas pessoas estavam no primeiro grupo).

Reação nocebo: reação desencadeada por substância inócua ou ação que, teoricamente, não deveria produzir reação, mas acaba produzindo efeito danoso em alguns indivíduos quando associada a fatores psicológicos.

Ao escolher aleatoriamente um indivíduo desse experimento, qual a probabilidade de ele:

a) não ter apresentado nenhum sintoma sabendo que participou do primeiro grupo?

b) ter apresentado sintomas sabendo que estava no segundo grupo?

c) ter apresentado sintomas sabendo que estava no primeiro grupo?

d) não ter apresentado nenhum sintoma sabendo que estava no segundo grupo?

29. Segundo a Associação Brasileira de Transplante de Órgãos (ABTO), em 2014 foram registrados 150 transplantes de fígado de doadores vivos, nos quais 125 eram parentes do transplantado e 25 não eram parentes.

A ABTO é uma associação sem fins lucrativos que promove em âmbito nacional a conscientização, pesquisa e contribui para o desenvolvimento de leis que auxiliam o transplante de órgãos.

Em um hospital, foram feitas duas doações aleatórias de fígado em 2014. Dessas doações, qual é a probabilidade de os doadores serem:

a) dois parentes de transplantados?

b) um parente e um não parente dos transplantados?

c) dois não parentes dos transplantados?

Lei binomial das probabilidades

Existem alguns experimentos aleatórios que, quando realizados diversas vezes de maneiras idênticas, apresentam apenas duas possibilidades de resultado, sendo cada uma independente da outra. A probabilidade de ocorrer um evento A ou B uma vez, duas vezes, ..., n vezes ou em todas as vezes, nesse mesmo experimento, é o que denominamos **lei binomial das probabilidades**.

A ocorrência ou não ocorrência de um determinado evento é o que chamamos, respectivamente, "sucesso" e "fracasso" ao tratar os resultados esperados no experimento.

Exemplos

a Uma moeda é lançada nove vezes. Qual a probabilidade de se obter seis coroas (K) e três caras (C) nesses lançamentos?

Em cada lançamento, temos:

- Espaço amostral: $\Omega = \{K, C\}$
- Evento de se obter coroa: $A = \{K\}$
- Evento de se obter cara: $B = \{C\}$
- Probabilidade de se obter coroa: $P(A) = \dfrac{1}{2}$
- Probabilidade de se obter cara: $P(B) = \dfrac{1}{2}$

Nesses nove lançamentos, os eventos A e B podem ocorrer em distintas ordens. Considere, por exemplo, que nos seis primeiros lançamentos obtém-se coroa e nos três últimos obtém-se cara, ou seja, **KKKKKKCCC**. Como os lançamentos são independentes, podemos calcular a probabilidade de ocorrer essa sequência da seguinte maneira:

$$\underbrace{P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot P(A)}_{[P(A)]^6} \cdot \underbrace{P(B) \cdot P(B) \cdot P(B)}_{[P(B)]^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Além dessa sequência do exemplo, existem outras maneiras diferentes de ocorrer essa sequência, entre elas, **KKKKKCCKC**, **KKKCCKKCK**. Então, podemos calcular o número total de sequências desse tipo por meio de uma permutação de 9 elementos com 6 repetições de A e 3 repetições de B:

$$P_9^{6,3} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 6} = 84 \text{ ou } C_{9,6} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 6} = 84$$

Portanto, concluímos que há 84 sequências diferentes e a probabilidade de se obter cada uma é de $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^9$. Neste caso, a probabilidade de o evento A ocorrer 6 vezes e de o evento B ocorrer 3 vezes em 9 lançamentos é:

$$\binom{9}{6} \cdot [P(A)]^6 \cdot [P(B)]^3 = 84 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{84}{512} \simeq 0{,}1640 = 16{,}4\%$$

b Ao lançar um dado de 6 faces 6 vezes, qual a probabilidade de um número maior do que 4 ocorrer exatamente 4 vezes?

Em cada lançamento, temos:

- Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Evento de se obter um número maior do que 4: $A = \{5, 6\}$
- Evento de se obter um número menor do que ou igual a 4: $B = \{1, 2, 3, 4\}$
- Probabilidade de se obter um número maior do que 4: $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- Probabilidade de se obter um número menor do que ou igual a 4: $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Uma possível ordem de ocorrer os lançamentos do dado seria **AAAABB**, ou seja, nos quatros primeiros lançamentos se obter um número menor do que 4, e nos dois últimos se obter número menor ou igual a 4. Como os lançamentos são independentes, podemos calcular a probabilidade dessa ocorrência da seguinte maneira:

$$\underbrace{P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot P(A)}_{[P(A)]^4} \cdot \underbrace{P(B) \cdot P(B)}_{[P(B)]^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

Como existem outras maneiras distintas de ocorrer essa sequência, para obter o número total de sequências, vamos calcular uma permutação de 6 elementos com 4 repetições de A e 2 repetições de B:

$$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2} = 15 \text{ ou } C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2} = 15$$

Logo, há 15 sequências distintas de lançamentos do dado e a probabilidade de se obter cada uma é dada por $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{729}$. Portanto, a probabilidade de o evento A ocorrer 4 vezes em 6 lançamentos é:

$$\binom{6}{4} \cdot [P(A)]^4 \cdot [P(B)]^2 = 15 \cdot \frac{4}{729} = \frac{60}{729} \simeq 8{,}23\%$$

Sejam $P(A)$ e $P(B)$ a probabilidade de os eventos A e B ocorrerem em cada uma das n tentativas independentes, respectivamente, em que B é o evento complementar de A (cuja notação é $\overline{A}$). Então, a probabilidade dos eventos A e B ocorrerem exatamente p e $n - p$ vezes em n tentativas é dada por:

$$\binom{n}{p}[P(A)]^p \cdot [P(B)]^{n-p} \text{ ou } \binom{n}{p}[P(A)]^p \cdot [P(\overline{A})]^{n-p}$$

em que $p \leq n$, $p, n \in \mathbb{N}$.

Probabilidade e Estatística

Definimos anteriormente a probabilidade como a razão entre o número de elementos do evento (A) e o número de elementos do espaço amostral, ou seja:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Vimos também que esse cálculo fica restrito a situações nas quais o espaço amostral é equiprovável. Porém, em algumas situações, o espaço amostral não é equiprovável, como no lançamento de um dado viciado. Nesse caso, precisamos considerar as várias repetições do experimento e o cálculo da probabilidade é baseado na frequência relativa da ocorrência do evento. Quanto maior o número de repetições do experimento, melhor será a estimativa da probabilidade.

Nem sempre é necessário realizar experimentos para obter dados amostrais. Existem casos em que dispomos de dados históricos, informações de empresas obtidas em pesquisas, etc.

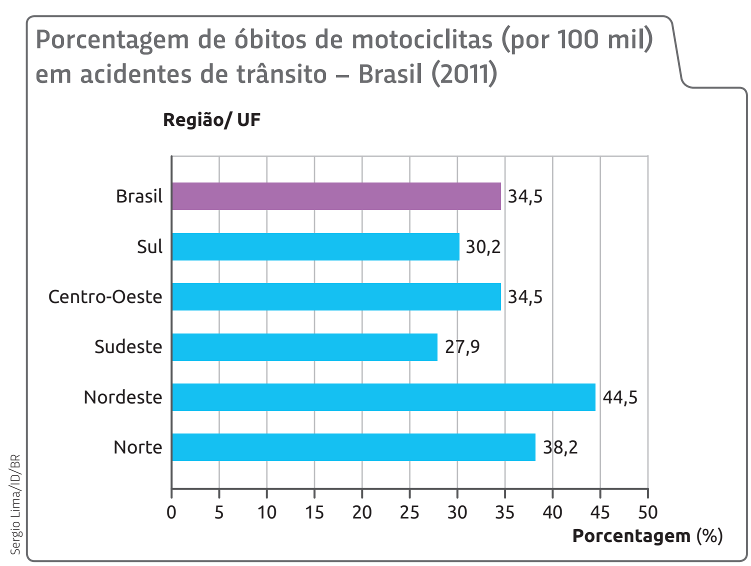
Exemplo

A tabela e o gráfico abaixo mostram para cada região as quantidades e a porcentagem de óbitos de motociclistas em acidentes de trânsito no Brasil em 2011.

Quantidade de óbitos de motociclistas (por 100 mil) em acidentes de trânsito – Brasil (2011)

Região	Quantidade de óbitos no trânsito	Quantidade de óbitos de motociclista	% de óbitos de motociclistas no total de mortes no trânsito
Norte	3 448	1 320	38,2
Nordeste	12 063	5 392	44,5
Sudeste	15 888	4 436	27,9
Centro-Oeste	4 425	1 527	34,5
Sul	7 433	2 249	30,2
Brasil	43 256	14 924	34,5

Fonte de pesquisa: WAISELFISZ, Julio Jacobo. *Mapa da Violência 2013*. Disponível em: <www.mapadaviolencia.org.br/pdf2013/mapa2013_transito.pdf>. Acesso em: 28 set. 2015.



Fonte de pesquisa: WAISELFISZ, Julio Jacobo. *Mapa da Violência 2013*. Disponível em: <www.mapadaviolencia.org.br/pdf2013/mapa2013_transito.pdf>. Acesso em: 28 set. 2015.

Na Região Norte a probabilidade de óbito de motociclista em acidentes de trânsito está representada pela porcentagem 38,2%. Isso significa que, escolhendo ao acaso um óbito por acidente de trânsito na Região Norte, a probabilidade de ser um motociclista é de 38,2%.

R10. Um casal planeja ter cinco filhos. Sabendo ser igualmente prováveis os resultados "filho do sexo masculino" e "filho do sexo feminino", qual a probabilidade de nascer:

a) cinco meninos?

b) três meninas e dois meninos?

c) uma menina e quatro meninos?

d) duas meninas e três meninos?

e) cinco meninas?

Resolução

a) Sejam:

Evento A: nascer um menino;

Evento B: nascer uma menina.

Para cada repetição do evento, a probabilidade de ocorrer o evento A é $P(A) = \frac{1}{2}$ e a probabilidade de ocorrer o evento B é $P(B) = \frac{1}{2}$, pois os eventos são independentes.

Vamos determinar a probabilidade de todos os filhos do casal nascerem meninos calculando $\binom{n}{p} \cdot \left[P(A)\right]^p \cdot \left[P(B)\right]^q$, em que $n = 5$, $p = 5$ e $q = 5 - 5 = 0$. Assim,

$$\binom{5}{5} \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^5 \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^0 =$$

$$= \frac{5!}{5! \cdot (5-5)!} \cdot \frac{1}{32} \cdot 1 = \frac{1}{32}.$$

Logo, a probabilidade de todos os filhos do casal nascerem meninos é de $\frac{1}{32}$ ou aproximadamente 3,1%.

b) No caso de nascerem três meninas e dois meninos, temos $n = 5$, $p = 2$ e $q = 5 - 2 = 3$. Então, a probabilidade desse evento é dada por:

$$\binom{5}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^2 \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^3 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

Portanto, a probabilidade de nascerem três meninas e dois meninos é $\frac{5}{16}$ ou aproximadamente 31,3%.

c) Para calcular a probabilidade de nascerem uma menina e quatro meninos, tomamos $n = 5$, $p = 4$ e $q = 5 - 4 = 1$. Assim,

$$\binom{5}{4} \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^4 \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^1 =$$

$$= \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{1 \cdot \cancel{4!}} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$

Logo, a probabilidade de nascerem uma menina e quatro meninos é $\frac{5}{32}$ ou aproximadamente 15,6%.

d) No caso de nascerem duas meninas e três meninos, temos $n = 5$, $p = 3$ e $q = 5 - 3 = 2$. Assim,

$$\binom{5}{3} \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^3 \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^2 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{32} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

Portanto, a probabilidade de nascerem duas meninas e três meninos é de $\frac{5}{16}$ ou aproximadamente 31,3%.

e) Para calcular a probabilidade de todos os filhos nascerem meninas, tomamos $n = 5$, $p = 0$ e $q = 5 - 0 = 5$. Assim,

$$\binom{5}{0} \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^0 \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^5 = \frac{5!}{0! \cdot (5-0)!} \cdot 1 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$

Portanto, a probabilidade de todos os filhos do casal nascerem meninas é de $\frac{1}{32}$ ou aproximadamente 3,1%.

R11. Em determinada empresa, o salário dos funcionários varia de acordo com o cargo. Observe no quadro a distribuição de funcionários dessa empresa de acordo com o salário em 2017. Em seguida, resolva o que se pede.

a) Represente em um gráfico de barras a porcentagem de funcionários de acordo com o salário.

b) Qual era a probabilidade de se sortear um funcionário dessa empresa e ele receber um salário maior do que R$ 2 000,00 em 2017?

Salário (R$)	Quantidade de funcionários
1 500	10
2 000	12
2 050	13
2 080	9
3 000	5
3 500	4
4 570	2

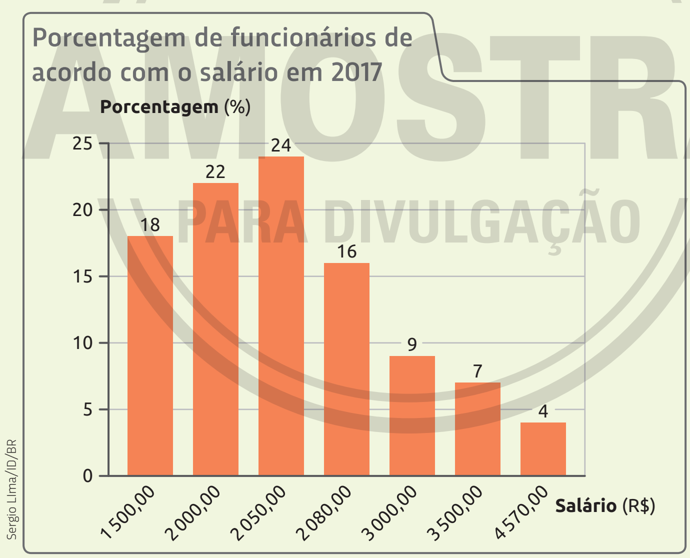
Resolução

a) Primeiro, determinaremos o total de funcionários dessa empresa:

$$10 + 12 + 13 + 9 + 5 + 4 + 2 = 55$$

Calculando a razão entre a quantidade de pessoas que recebem determinado salário e o total de funcionários dessa empresa, temos:

Salário (R$)	1 500	2 000	2 050	2 080	3 000	3 500	4 570
Quantidade de pessoas	10	12	13	9	5	4	2
Porcentagem	18%	22%	24%	16%	9%	7%	4%



Fonte de pesquisa: Empresa A.

b) Considerando x como o salário, a probabilidade de um funcionário receber um salário maior do que R$ 2 000,00 era dada por:

$$P(x > 2\,000) = P(x = 2\,050) + P(x = 2\,080) + P(x = 3\,000) + P(x = 3\,500) + P(x = 4\,570)$$

$$= 24\% + 16\% + 9\% + 7\% + 4\% = 60\%$$

Logo, a probabilidade de se sortear um funcionário dessa empresa em 2017 e ele receber um salário maior do que R$ 2 000,00 era de 60%.

No item **b**, as notações $P(x > 2\,000)$, $P(x = 2\,050)$ e $P(x = 2\,080)$, por exemplo, indicam a probabilidade de o salário ser maior do que R$ 2 000,00, ser igual a R$ 2 050,00 e ser igual a R$ 2 080,00, respectivamente.

Atividades

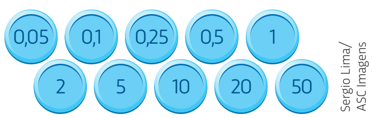
30. Um casal pretende ter quatro filhos. Sabendo ser equiprováveis os eventos “nascer menino” e “nascer menina”, determine a probabilidade de nascerem:

a) somente meninos;

b) dois meninos e duas meninas;

c) três meninas e um menino.

31. Considere as fichas de mesma massa e tamanho, numeradas conforme representação abaixo.



Realizando seis sorteios com reposição, determine a probabilidade de ocorrer um valor:

a) maior do que 10, em exatamente cinco desses sorteios;

b) maior do que 0,25, em exatamente três desses sorteios;

c) menor do que 20.

32. Uma prova de Matemática com 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas de resposta cada, foi aplicada para uma turma. Sabendo que apenas uma das alternativas de cada questão estava correta, determine a probabilidade de um aluno, ao marcar as alternativas aleatoriamente:

a) acertar exatamente 50% da avaliação;

b) acertar exatamente 90% da avaliação;

c) acertar todas as questões;

d) errar todas as questões.

33. (Uerj) Um alvo de dardos é formado por três círculos concêntricos que definem as regiões **I**, **II** e **III**, conforme mostra a ilustração.

Um atirador de dardos sempre acerta alguma região do alvo, sendo suas probabilidades de acertar as regiões **I**, **II** e **III** denominadas, respectivamente, P_I, P_{II} e P_{III}.

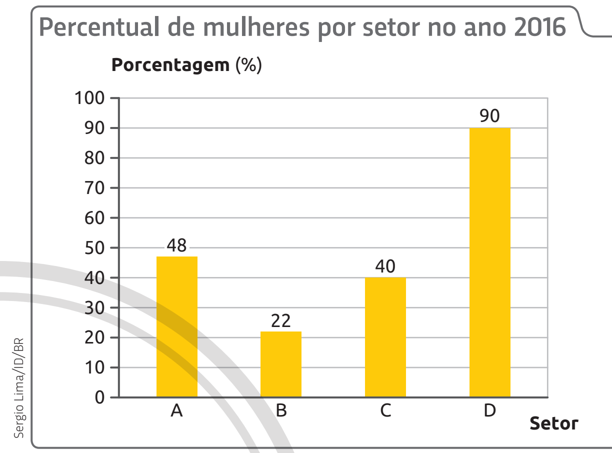
Para esse atirador, valem as seguintes relações:

- $P_{II} = 3P_I$
- $P_{III} = 2P_{II}$

Calcule a probabilidade de que esse atirador acerte a região **I** exatamente duas vezes ao fazer dois lançamentos.

34. A probabilidade de um cobrador de faltas acertar o gol é de 70%. Realizando 8 cobranças, qual é a probabilidade de acertar o gol apenas 5 vezes?

35. Uma empresa é dividida em quatro setores. Observe o gráfico que apresenta o percentual de mulheres que trabalhavam em cada setor no ano 2016.



Fonte de pesquisa: Empresa Alfa.

Sabendo que cada funcionário trabalhava em apenas um setor no ano 2016, escolhendo ao acaso um funcionário dessa empresa, qual era a probabilidade desse funcionário ser:

a) mulher e trabalhar no setor **A**;

b) mulher e trabalhar no setor **B**;

c) homem e trabalhar no setor **C**;

d) homem e trabalhar no setor **D**.

36. Em determinada cidade foi realizada uma pesquisa a respeito da escolaridade das pessoas adultas. Observe o quadro.

Escolaridade	Homens (adultos)	Mulheres (adultas)
Fundamental incompleto	25%	20%
Fundamental completo	35%	37%
Médio incompleto	20%	22%
Médio completo	10%	9%
Superior incompleto	6%	4%
Superior completo	4%	8%

Nessa cidade, 25% são homens adultos e 30% são mulheres adultas. Ao sortear uma pessoa dessa cidade ao acaso, qual é a probabilidade de ela ter o Ensino Superior completo ou incompleto?

Verificando rota

1. Para realizar a contagem dos elementos de um conjunto, em quais casos é recomendado utilizar os métodos de combinatória?

2. Escreva uma situação na qual pode ser empregado o princípio fundamental de contagem para determinar a quantidade de combinações possíveis.

3. Por que utilizamos a notação de fatorial?

4. Você concorda com a afirmação a seguir? Justifique.

O fatorial de n, em que $n \geqslant 2$, resulta em um número par.

5. Mostre que $A_{n,n} = n!$, para $n \in \mathbb{N}^*$.

6. A ordem dos elementos importa em um arranjo simples ou em uma combinação simples?

7. Em quais condições um experimento é considerado aleatório?

8. O que é o espaço amostral em um experimento aleatório?

9. O que indica o número que obtemos ao calcular a probabilidade de ocorrer um evento?

10. Para que a definição de probabilidade a seguir seja válida falta supor uma condição. Qual é essa condição?

Em um espaço amostral de um experimento aleatório, a probabilidade de um evento acontecer pode ser dada pela razão entre o número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis.

11. Leia a tira.

SILVA, Willian Raphael. *Bugio, o otimista*. Humor com Ciência. Disponível em: <www.humorcomciencia.com/tirinhas/tirinha-matematica/>. Acesso em: 30 set. 2015.

Supondo que o dado da história seja honesto, qual dos dois personagens está correto em relação à chance de sair o número 13 no lançamento do dado: Tucano ou Bugio? Justifique.

12. A página de abertura da unidade **2** mostrou que ácidos e bases, quando combinados entre si, reagem originando sais. Qual dos conteúdos trabalhados nessa unidade se relaciona com esse tema?

Ampliando fronteiras

Olhos da mãe? Nariz do pai?

A hereditariedade ganhou destaque após a divulgação dos resultados das pesquisas de Gregor Johann Mendel (1822-1884), que realizou experimentos em variedades de ervilhas. Essas e outras pesquisas foram úteis para o entendimento das estruturas que compõem os seres vivos, incluindo os seres humanos.

Hereditariedade

As características de uma pessoa são transmitidas dos pais para os filhos por meio dos genes. Eles são segmentos do DNA que guardam as informações para a produção de diversas moléculas, como as proteínas.

Genes que ocupam o mesmo lugar no cromossomo são chamados alelos, os quais podem ser dominantes ou recessivos. Por exemplo, a característica de cabelos encaracolados (alelo C) é dominante sobre a de cabelos lisos (alelo c). Isto é, um descendente gerado por um homem e uma mulher que transmitem os alelos C e c, respectivamente, terá cabelos encaracolados.

Se um organismo apresenta alelos iguais para o mesmo gene, ele é classificado como homozigoto, mas se apresenta alelos diferentes para o mesmo gene, ele é chamado heterozigoto.

Apesar de reconhecido tardiamente, hoje Mendel é respeitado como uma das figuras mais importantes no meio científico, sendo considerado o "pai" da Genética.

Izaac Brito/ASC Imagens

Não escreva no livro.

Probabilidade de recombinação gênica

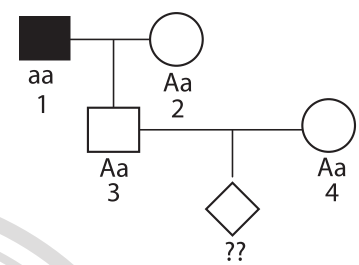
O albinismo é determinado por um gene recessivo e somente ocorre em uma pessoa homozigota para essa característica. Observe o quadro.

Genótipo		Fenótipo
AA	homozigoto dominante	sem albinismo
Aa	heterozigoto	sem albinismo
aa	homozigoto recessivo	com albinismo

Analisando o heredograma ao lado, sobre a presença ou não de albinismo em uma família, pode-se calcular a probabilidade de o casal 3 e 4 gerar um descendente albino. Para isso, montamos o seguinte quadro:

3 \ 4	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Portanto, a probabilidade de o descendente ser albino (genótipo aa) é de uma em quatro, ou seja, 25%.



Legenda	Masculino	Feminino	Sexo indefinido
Albino	□	○	◇
Não albino	■	●	◆

Maryane Silva/ ASC Imagens

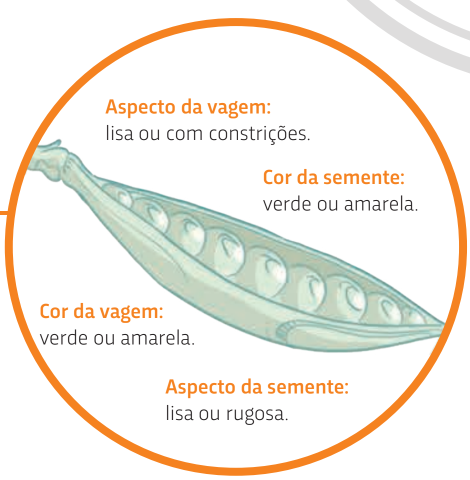
A Você conhece alguma doença hereditária? Em caso afirmativo, qual seria?

B Qual é a probabilidade de um homem e uma mulher, com os respectivos genótipos Aa e aa, gerarem uma criança albina?

C Assim como o albinismo, a miopia é determinada por gene recessivo e ocorre em uma pessoa homozigota para essa característica (genótipo mm). Qual é a probabilidade de um homem e uma mulher com os respectivos genótipos Mm e Mm gerarem um descendente sem miopia?

Por que ervilhas?

A planta da ervilha foi escolhida no experimento porque é fácil de cultivar, seu ciclo de reprodução é curto e produz muitas sementes. Além disso, os aspectos da planta são bem marcantes e fáceis de comparar.



Comprimento do caule
curto ou longo.

Albinismo: anomalia genética caracterizada nos seres humanos pela redução ou ausência da pigmentação da pele, dos pelos e dos olhos.

Heredograma: diagrama usado para representar a história familiar de descendência e incidência de determinada característica, além da determinação do sexo ou o grau de parentesco do indivíduo afetado com outros familiares. Nos heredogramas, geralmente os indivíduos do sexo masculino são representados por figuras quadradas e os do sexo feminino, por figuras circulares. A linha vertical entre a figura quadrada e a circular indica que o casal gerou descendente(s). Os filhos são representados da esquerda para a direita, por ordem de nascimento.

Miopia: dificuldade de uma pessoa enxergar de longe.

Matemática em ação


xanders/Shutterstock.com/ID/BR

Composição de um busto usando vegetais.

Alimentação e saúde

Bate-papo inicial

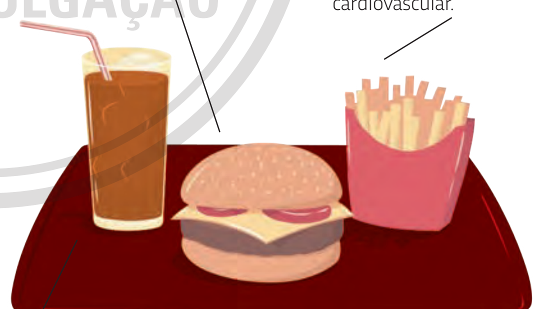
- Você considera sua alimentação saudável? Por quê?
- Em sua opinião, qual é a importância da alimentação para a nossa saúde?
- Cite alimentos que você considera saudáveis.

A grande diversidade de produtos e serviços é uma das características da nossa época e isso não poderia ser diferente no mercado alimentício. Mas será que tantas opções disponíveis nos ajudam ou atrapalham para escolhermos o que comer regularmente?

Bem, a resposta pode ser uma ou outra, pois depende de alguns fatores, como o que sabemos sobre os alimentos e nossa capacidade de resistir a algumas "tentações", que geralmente são saborosas, mas oferecem pouca nutrição e podem nos prejudicar se consumirmos com frequência.

As gorduras saturadas, presentes em um hambúrguer bovino frito normalmente adicionado em sanduíches, aumentam o risco de obesidade, doenças coronárias e outras doenças crônicas.

Em 100 gramas de batata frita industrializada há pouquíssima proteína se compararmos com a quantidade de sódio, por causa do sal adicionado. O excesso de sódio contribui para o aumento da pressão arterial e gera problemas ao sistema cardiovascular.


Alexandre Koyama/ASC Imagens

Um copo de refrigerante de 200 mL contém muito carboidrato (açúcar) e nenhuma proteína, além de sódio e outras substâncias artificiais que não são benéficas. Os açúcares em excesso fazem mal aos rins, cérebro e coração, podendo causar várias doenças e provocar cáries.

Sódio: elemento químico da família dos metais alcalinos que compõe, por exemplo, a ligação iônica com o cloreto para formar o sal de cozinha.

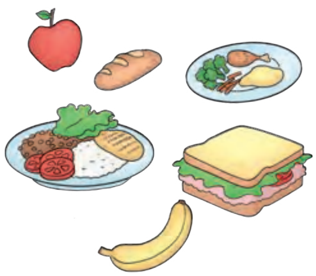
Carboidrato: qualquer um dos compostos orgânicos formados por carbono, hidrogênio e oxigênio, como os açúcares, o amido e a celulose, essenciais para o metabolismo energético.

Proteína: classe de compostos orgânicos que constituem o principal componente dos organismos vivos, necessária na dieta de animais e organismos que não realizam a fotossíntese.

Gordura saturada: gordura natural formada totalmente, ou predominantemente, por ácidos graxos saturados.

Apesar de saber que muitos alimentos não são saudáveis, como frituras, *fast-foods* e refrigerantes, continuamos consumindo em razão de hábitos já estabelecidos em nossa dieta. Portanto, é necessário ter consciência de que esses alimentos são prejudiciais para evitar consumi-los constantemente. Por outro lado, a alimentação saudável deve ser consumida diariamente, diminuindo assim a possibilidade de desenvolver doenças associadas à má alimentação.

É possível seguir algumas dicas que, apesar de simples, são essenciais para manter um hábito mais saudável e equilibrado. Algumas delas são:



Fazer as três refeições principais (café da manhã, almoço e jantar) e dois lanches saudáveis por dia. Não pular as refeições. respeitar as proporções dos grupos alimentares.

Beber em média dois litros de água por dia.

Reduzir a quantidade de sal na comida e evitar consumo de alimentos industrializados com muito sódio.

Evitar refrigerantes e sucos industrializados, bolos, biscoitos doces e recheados, entre outras guloseimas, na alimentação regular.

Alexandre Koyama/ASC Imagens

Mão na massa

É importante termos informações sobre os alimentos para decidir quais devem ser consumidos regularmente, bem como a proporção de cada um. Pensando nisso, apresentamos algumas propostas que incluem um estudo sobre os alimentos e a criação e degustação de cardápios para o café da manhã.

- Siga as orientações do professor para a formação de grupos.
- Cada grupo deverá pesquisar sobre alimentação saudável, incluindo os seguintes aspectos:
  - funcionamento do sistema digestório;
  - orientações para manter uma alimentação saudável;
  - pirâmide alimentar brasileira;
  - grupos alimentares e proporção de consumo de cada tipo (valores aproximados de porções);
  - exemplos de cardápios saudáveis para as principais refeições do dia (café da manhã, almoço e jantar).
- Em uma data combinada, o professor norteará um debate para apresentar as informações obtidas na pesquisa. Os dados devem estar impressos para serem utilizados posteriormente.
- Na próxima etapa vocês vão elaborar um cardápio para o café da manhã com diferentes tipos de alimentos. Para isso, o professor vai sugerir na lousa alguns deles, de acordo com os grupos alimentares. O professor também vai propor alguns questionamentos que envolvem conceitos de análise combinatória e probabilidade, estudados nesta unidade.
- Por fim, será agendado um café da manhã coletivo, no qual cada grupo levará os itens do seu cardápio além dos talheres e recipientes necessários para se servir. A proposta é que durante a degustação vocês saboreiem os diferentes tipos de alimentos a fim de conferir as combinações que mais lhe agradam para adotá-las em sua rotina.

unidade 3

capítulo 4
Sistemas lineares

capítulo 5
Matrizes

capítulo 6
Determinantes

Planilhas eletrônicas são ferramentas usadas para analisar uma grande quantidade de dados de maneira organizada, entre outras funções. A principal característica dessa ferramenta é a distribuição das informações em linhas e colunas, o que facilita sua localização. Essa disposição de informações está associada à ideia de matriz, conteúdo que será estudado nesta unidade.

Ismar Ingber/Pulsar Imagens

Painel de voos do Aeroporto Internacional do Rio de Janeiro/Galeão – Antônio Carlos Jobim, na Ilha do Governador, Rio de Janeiro. Imagem capturada em agosto de 2012.

Nesta unidade, você vai trabalhar com sistemas lineares e algumas de suas possíveis aplicações, estudar, as características e alguns tipos de matriz, calcular o determinante de uma matriz e conhecer suas propriedades.

capítulo

4 Sistemas lineares

Equação linear

Welinton comprou 2 kg de banana, 1 kg de laranja e 1 kg de maçã e pagou R$ 13,00 por essas frutas. Quantos reais Welinton pagou pelo quilograma de cada tipo de fruta?

Para responder essa pergunta, vamos inicialmente representar o preço das frutas por meio de incógnitas.

- x: preço do quilograma da banana;
- y: preço do quilograma da laranja;
- z: preço do quilograma da maçã.

O consumo regular de frutas diminui o risco de se contrair várias doenças.

Dima Sobko/Shutterstock.com/ID/BR

Devemos determinar os valores positivos de x, y e z que satisfaçam a equação:

$$2x + y + z = 13$$

Essa é uma **equação linear** de incógnitas x, y e z.

Equações do 1º grau com uma ou mais incógnitas são chamadas de equações lineares.

Denomina-se equação linear aquela que pode ser escrita na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

em que:

- $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais chamados coeficientes;
- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as incógnitas;
- b é um número real chamado termo independente.

Exemplos

- $7x - 2y = 6$

  Nessa equação:
  - 7 e -2 são os coeficientes;
  - x e y são as incógnitas;
  - 6 é o termo independente.

- $-3x + 5y - z = \frac{1}{3}$

  Nessa equação:
  - -3, 5 e -1 são os coeficientes;
  - x, y e z são as incógnitas;
  - $\frac{1}{3}$ é o termo independente.

São chamadas equações lineares **homogêneas** aquelas que possuem termo independente igual a zero.

Exemplos

- $\frac{3}{2}x_1 + 4x_2 - 12x_3 = 0$
- $2x - y + 3z + 9w = 0$

Agora, veja alguns exemplos de equações que não são lineares.

- $-4x + 4y^2 + 3z = 1$

  Neste caso, a equação não é linear porque o expoente de todas as incógnitas deveria ser igual a 1 e isso não ocorre com a incógnita y.

- $5w - yz - 2x = 8$

  Neste caso, a equação não é linear porque o termo yz é misto, ou seja, é produto de duas ou mais incógnitas, e isso não ocorre em uma equação linear.

Solução de uma equação linear

Retomando a situação de Welinton, a respeito do valor pago por quilograma de cada tipo de fruta, devemos determinar os valores de x, y e z que satisfaçam a equação $2x + y + z = 13$. Assim, a sequência ordenada:

- $(3, 2, 5)$ é uma solução da equação, pois substituindo x por 3, y por 2 e z por 5, obtemos $2 \cdot 3 + 2 + 5 = 13$;
- $(2, 3, 6)$ é outra solução da equação, pois substituindo x por 2, y por 3 e z por 6, obtemos $2 \cdot 2 + 3 + 6 = 13$.

Portanto, o preço do quilograma da banana, da laranja e da maçã podem ser R$ 3,00, R$ 2,00 e R$ 5,00 ou R$ 2,00, R$ 3,00 e R$ 6,00, respectivamente.

No conjunto dos números reais, para obter uma solução da equação $2x + y + z = 13$, podemos escolher valores arbitrários para x e y, digamos, m e n, respectivamente. Em seguida, substituímos esses valores na equação e determinamos o valor de z, ou seja:

$$2m + n + z = 13 \Rightarrow z = 13 - 2m - n$$

Assim, a equação $2x + y + z = 13$ tem infinitas soluções.

Todas as equações lineares possuem infinitas soluções? Justifique.

A solução de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$ é toda sequência ou lista ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$, tal que a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \ldots + a_n\alpha_n = b$ seja verdadeira.

Exemplos

- $-x + 3y = 2$

  O par ordenado $(4, 2)$ é uma solução dessa equação, pois $-4 + 3 \cdot 2 = 2$.

  O par ordenado $(0, 1)$ não é uma solução dessa equação, pois $-0 + 3 \cdot 1 = 3 \neq 2$.

  Fazendo $y = k$, com $k \in \mathbb{R}$, e escrevendo x em função de k, obtemos o par ordenado $(3k - 2, k)$ que é chamado de **solução geral** dessa equação. Para obtermos soluções particulares da equação a partir da solução geral, atribuímos valores reais para k e efetuamos os cálculos. Por exemplo, para $k = 4$, temos a solução particular:

$$(3k - 2, k) = (3 \cdot 4 - 2, 4) = (10, 4)$$

- $2x - 3y + z = -1$

  A terna ordenada $(0, 1, 2)$ é uma solução dessa equação, pois $2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 2 = -1$.

  A terna ordenada $(-1, 5, 7)$ não é uma solução dessa equação, pois $2 \cdot (-1) - 3 \cdot 5 + 7 = -10$ e $-10 \neq -1$.

  Fazendo $z = k$, $y = k_1$, com $k, k_1 \in \mathbb{R}$, e escrevendo x em função de k e k_1, obtemos a terna ordenada $\left(\frac{3k_1 - k - 1}{2}, k_1, k\right)$ como solução geral dessa equação.

> Geometricamente, um par ordenado de números reais corresponde a um ponto no plano e uma terna ordenada de números reais corresponde a um ponto no espaço.

Toda equação linear homogênea $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = 0$ admite como uma de suas soluções a lista ordenada $(0, 0, 0, \ldots, 0)$, chamada solução trivial ou solução nula.

Por exemplo, a solução trivial da equação:

- $-x + \sqrt{5}y - 6z = 0$ é a terna ordenada $(0, 0, 0)$;
- $\frac{1}{4}x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 0$ é a quádrupla ordenada $(0, 0, 0, 0)$.

Atividades resolvidas

R1. Determine três pares ordenados que sejam soluções da equação $-x + 2y = 4$ e represente-os geometricamente.

Resolução

Precisamos determinar três coordenadas (x, y) de pontos que satisfaçam a equação dada. Então, vamos construir um quadro atribuindo valores para a incógnita x, e obter assim os valores da incógnita y por meio de cálculos.

Para $x = 1$:

$$-1 + 2y = 4 \Rightarrow 2y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

Para $x = 2$:

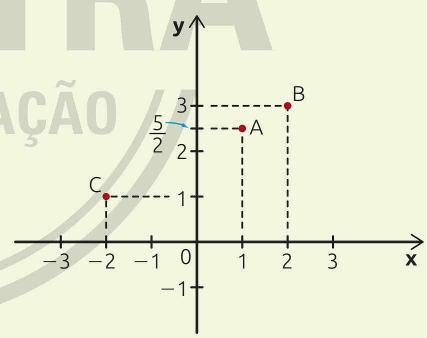
$$-2 + 2y = 4 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$$

Para $x = -2$:

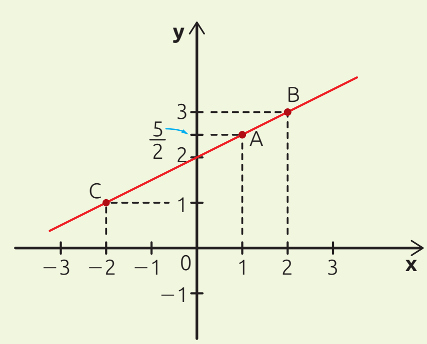
$$2 + 2y = 4 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$$

x	y
1	$\frac{5}{2}$
2	3
-2	1

Em seguida, representamos os pontos no plano cartesiano, conforme a figura abaixo:



Como existem infinitas soluções para essa equação, obtemos sua representação geométrica por meio da reta representada a seguir.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Atividades

1. Em cada equação abaixo, explicite os coeficientes, as incógnitas e o termo independente.

a) $3x + 6y - 9z = 0$

b) $7(3x - 4y + z) = 2y$

c) $9x + y = 3z - w + 5$

d) $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y + 5z - 12 = 0$

e) $3x + 12y - z + \frac{7}{5}w = 1$

2. Nos itens abaixo, identifique se as equações são lineares ou não. Justifique os casos negativos.

a) $-18x + 5y = 0$

b) $-2x - 3y + 4z - 5w = 20$

c) $3xy + 5z = -7$

d) $x + 4y - 4z = 8$

e) $x^2 + 5y - 4z = 0$

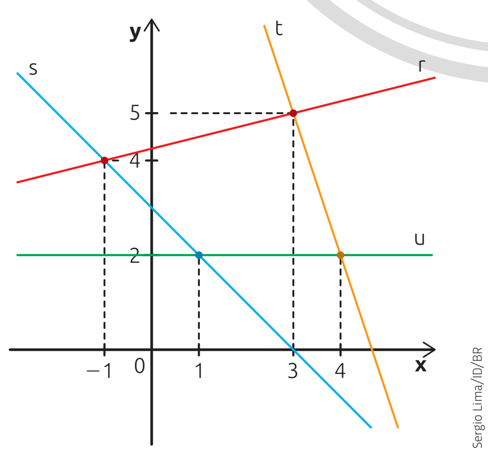
- Das equações lineares, quais são homogêneas? Justifique sua resposta.

3. Verifique se as ternas abaixo são soluções da equação linear $5x - 7y + 8z = 3$.

- $(2, 3, 5)$
- $(5, 2, -1)$
- $(0, 2, 1)$

4. Determine três soluções para a equação linear $-2x + 3y = 10$.

5. Associe cada reta representada no gráfico à sua equação linear correspondente.



I) $x + y - 3 = 0$

II) $-x + 4y - 17 = 0$

III) $3x + y - 14 = 0$

IV) $y - 2 = 0$

6. Em um estacionamento, estão guardados 22 meios de transporte, sendo eles carros, motocicletas e bicicletas.

a) Represente no caderno essa situação por meio de uma equação linear.

b) Dê possíveis valores para a quantidade de carros, motos e bicicletas guardados desse estacionamento.

7. No caderno, represente geometricamente a solução das equações lineares a seguir.

a) $2x + y = 5$

b) $-6x + 3y = 18$

8. (Enem/Inep) Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos.

Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?

a) $5X - 3Y + 15 = 0$

b) $5X - 2Y + 10 = 0$

c) $3X - 3Y + 15 = 0$

d) $3X - 2Y + 15 = 0$

e) $3X - 2Y + 10 = 0$

9. A equação $3x - 5my + 7z = 8$, em que $m \in \mathbb{R}^*$, tem a terna $(-1, 2, -3)$ como uma solução.

a) Determine o valor de m.

b) Encontre mais três soluções dessa equação.

10. Por questão de segurança, a carga máxima suportada em um elevador é de 600 kg. No momento, 4 tipos de caixas devem ser transportados nesse elevador: tipo 1, com massa de 10 kg; tipo 2, de 20 kg; tipo 3, de 40 kg; tipo 4, de 60 kg.

a) Escreva no caderno uma equação linear para representar quantas caixas de cada tipo podem ser transportadas apenas em uma viagem, aproveitando-se a carga máxima permitida.

b) Determine duas soluções para esse problema.

Sistema de equações lineares

Em uma turma do 2º ano do Ensino Médio há 32 alunos. Sabendo que há 4 meninas a mais que meninos, quantas meninas e quantos meninos estão nessa turma?

Representando a quantidade de meninas por x e a quantidade de meninos por y, podemos obter duas equações.

- Ao adicionar a quantidade de meninas com a de meninos, obtemos a quantidade total de alunos:

$$x + y = 32 \qquad (\mathrm{I})$$

- Como há 4 meninas a mais que meninos, a diferença entre a quantidade de meninas e meninos é 4:

$$x - y = 4 \qquad (\mathrm{II})$$

Para responder à pergunta inicial, precisamos determinar os valores de x e y que satisfaçam as equações **I** e **II** simultaneamente. Como ambas apresentam as mesmas incógnitas, elas compõem um sistema de equações lineares ou simplesmente sistema linear, indicado por:

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Denomina-se sistema linear $m \times n$ (lê-se m por n) o conjunto S composto por m equações lineares com n incógnitas $(m, n \in \mathbb{N}^*)$, que pode ser escrito na forma geral:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que:

- a_{ij}, com $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, são números reais chamados coeficientes;
- x_j, com $1 \leqslant j \leqslant n$, são as incógnitas;
- b_i, com $1 \leqslant i \leqslant m$, são números reais chamados termos independentes.

No sistema linear S, por exemplo:

- a_{23} é o coeficiente da incógnita x_3 na 2ª equação;
- a_{31} é o coeficiente da incógnita x_1 na 3ª equação.

Ou, de modo geral:

- a_{mn} é o coeficiente da incógnita x_n na m-ésima equação.

Exemplos

- $\begin{cases} 5x - 9y = 11 \\ -x + 3y = -2 \end{cases}$

Nesse caso, o sistema linear é 2×2 (2 equações e 2 incógnitas) nas incógnitas x e y.

- $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -6 \\ 2x_2 + 7x_3 = 9 \end{cases}$

Nesse caso, o sistema linear é 2×3 (2 equações e 3 incógnitas) nas incógnitas x_1, x_2 e x_3.

A equação $2x_2 + 7x_3 = 9$ pode ser entendida como $0x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 9$.

Solução de um sistema linear

Retomando a situação a respeito da quantidade de meninas e meninos da turma do 2º ano do Ensino Médio, devemos determinar os valores de x e y que satisfaçam o sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

O par ordenado $(18, 14)$ é uma solução desse sistema linear, pois substituindo x por 18 e y por 14, obtemos $\begin{cases} 18 + 14 = 32 \\ 18 - 14 = 4 \end{cases}$.

Conforme estudaremos posteriormente, esse é um exemplo de sistema linear com apenas um par ordenado que satisfaz ambas as equações simultaneamente. Assim, o conjunto solução desse sistema é $S = \{(18, 14)\}$.

Portanto, nessa turma, há 18 meninas e 14 meninos.

Dizemos que a sequência ou lista ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear S se for solução de todas as equações de S, isto é:

$$\begin{array}{ll}
a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1 & \text{(sentença verdadeira)} \\
a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2 & \text{(sentença verdadeira)} \\
a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + \ldots + a_{3n}\alpha_n = b_3 & \text{(sentença verdadeira)} \\
\vdots & \\
a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + a_{m3}\alpha_3 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m & \text{(sentença verdadeira)}
\end{array}$$

Exemplos

- $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 4y = -1 \end{cases}$

O par ordenado $(3, -1)$ é uma solução desse sistema linear, pois $\begin{cases} 2 \cdot 3 + (-1) = 5 \\ 3 + 4(-1) = -1 \end{cases}$.

O par ordenado $(-5, 1)$ não é uma solução desse sistema linear, pois $\begin{cases} 2 \cdot (-5) + 1 = -9 \neq 5 \\ -5 + 4 \cdot 1 = -1 \end{cases}$.

- $\begin{cases} 3x + 2y - z = -3 \\ 5x - y + 6z = 8 \end{cases}$

A terna ordenada $(1, -3, 0)$ é uma solução desse sistema linear, pois

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 2(-3) - 0 = -3 \\ 5 \cdot 1 - (-3) + 6 \cdot 0 = 8 \end{cases}$$

Dizemos que um sistema linear é homogêneo quando o termo independente de todas as equações é igual a zero.

Exemplo

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 3w = 0 \\ 2x + 3y + z + w = 0 \\ x + y + 2z + w = 0 \end{cases}$$

Todo sistema linear homogêneo admite uma solução do tipo $(0, 0, 0, \ldots, 0)$, chamada solução trivial ou nula, e alguns admitem outras soluções além dessa.

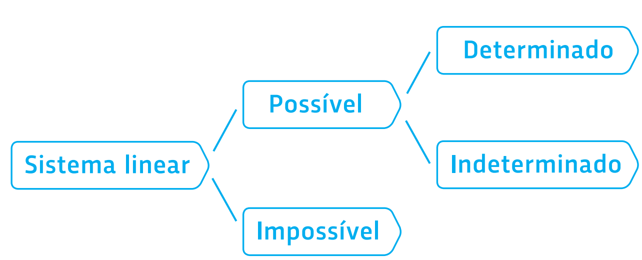
No caso do exemplo acima, além da solução trivial $(0, 0, 0, 0)$, o sistema linear homogêneo também admite como uma solução a quádrupla ordenada $(-3, 2, 1, -1)$.

A solução $(-3, 2, 1, -1)$ pode ser obtida por meio de métodos gerais de resolução de sistemas lineares, que estudaremos mais adiante. Ao multiplicar cada número dessa quádrupla por um mesmo número real k, obtemos a quádrupla $(-3k, 2k, k, -k)$, que é também solução do sistema. De modo geral, todo sistema linear homogêneo que admite uma solução não trivial tem uma infinidade de soluções, pois todo múltiplo de uma solução também é solução desse sistema.

Classificação de um sistema linear

Um sistema linear pode ser classificado de acordo com a quantidade de soluções que admite. Assim, dizemos que um sistema linear é **possível e determinado** quando possui uma única solução, **possível e indeterminado** quando possui mais de uma solução e **impossível** quando não possui solução.

Podemos resumir essa classificação com o auxílio de um esquema:

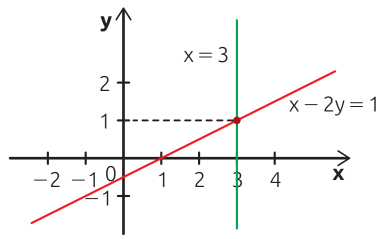


Utilizamos a sigla SPD para indicar um sistema possível e determinado, SPI para sistema possível e indeterminado e SI para sistema impossível.

Exemplos

- $\begin{cases} x = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

Representando-o geometricamente, temos:

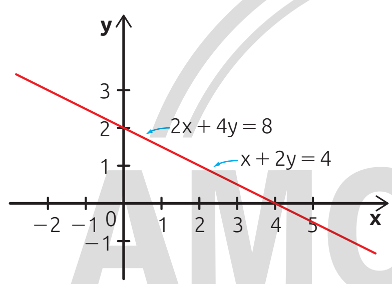


Nesse caso, as retas que representam as equações são distintas e se intersectam em um único ponto, cujas coordenadas correspondem à solução do sistema linear.

Esse sistema linear admite apenas o par ordenado $(3, 1)$ como solução, por isso é um sistema possível e determinado (SPD).

- $\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

Representando-o geometricamente, temos:

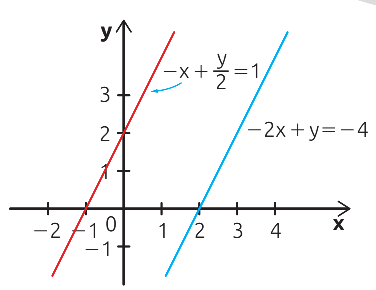


Nesse caso, as retas que representam as equações são coincidentes. Logo, seus pontos são comuns, ou seja, existem infinitos pontos cujas coordenadas correspondem à solução do sistema linear.

Esse sistema linear admite os pares ordenados $(0, 2)$, $(2, 1)$ e $(4, 0)$ como solução, entre outros infinitos pares, por isso é um sistema possível e indeterminado (SPI).

- $\begin{cases} -x + \dfrac{y}{2} = 1 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$

Representando-o geometricamente, temos:



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Nesse caso, as retas que representam as equações não se intersectam em ponto algum, pois são paralelas. Logo, não existem pontos cujas coordenadas correspondem à solução do sistema linear.

Esse sistema linear não admite solução alguma, por isso é um sistema impossível (SI).

Sistema linear 2 × 2

Vimos nos exemplos anteriores a classificação de alguns sistemas lineares 2 × 2 (2 equações e 2 incógnitas) quanto à quantidade de soluções. Para identificar se um sistema linear 2 × 2 possui uma ou mais soluções, podemos resolvê-lo por meio de alguns métodos, apresentados nas próximas atividades resolvidas.

Atividades resolvidas

R2. Classifique cada sistema de equações lineares abaixo em possível e determinado (SPD), possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI).

a) $\begin{cases} x + y = 15 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4y - 8x = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + y = 22 \\ 5x - y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - \dfrac{y}{2} = -1 \end{cases}$

Resolução

a) $\begin{cases} x + y = 15 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$

Para resolver esse sistema pelo **método da substituição**, escolhemos uma das equações, nesse caso a 1ª, e isolamos uma das incógnitas, nesse caso, y.

$$x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$$

Substituindo y por $15 - x$ na 2ª equação, temos:

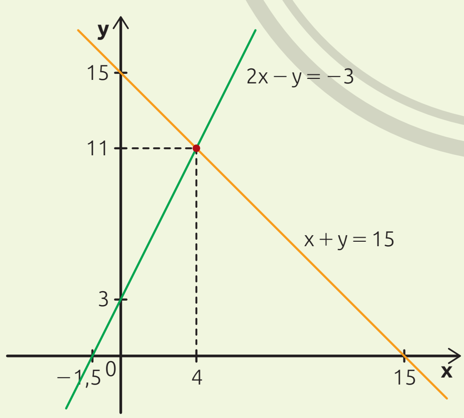
$$2x - y = -3 \Rightarrow 2x - (15 - x) = -3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x - 15 = -3 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

Voltando à 1ª equação, substituímos x por 4. Assim:

$$x + y = 15 \Rightarrow 4 + y = 15 \Rightarrow y = 11$$

Portanto, $S = \{(4, 11)\}$ e o sistema é SPD.

Observe a representação geométrica das equações do sistema e o ponto de intersecção correspondente à sua solução.



b) $\begin{cases} 5x + y = 22 \\ 5x - y = 8 \end{cases}$

Usando o **método da adição**, adicionamos membro a membro ambas as equações:

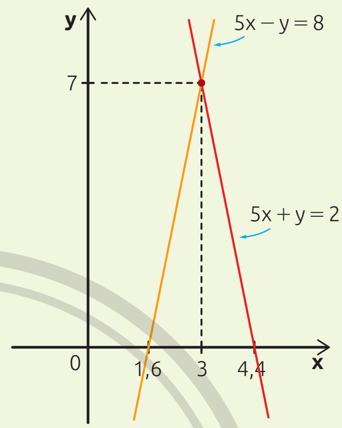
$$\begin{array}{r} 5x + y = 22 \\ + \; 5x - y = 8 \\ \hline 10x + 0y = 30 \Rightarrow 10x = 30 \Rightarrow x = 3 \end{array}$$

Em seguida, substituímos o valor de x por 3 na 1ª equação do sistema.

$$5x + y = 22 \Rightarrow 5 \cdot 3 + y = 22 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 15 + y = 22 \Rightarrow y = 7$$

Portanto, $S = \{(3, 7)\}$ e o sistema é SPD.

Observe a representação geométrica das equações do sistema e o ponto de intersecção que corresponde à sua solução.



Experimente substituir x na 2ª equação a fim de verificar se o resultado é o mesmo.

c) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4y - 8x = -4 \end{cases}$

Pelo **método da substituição**, temos, na 1ª equação:

$$2x - y = 1 \Rightarrow -y = 1 - 2x \Rightarrow y = 2x - 1$$

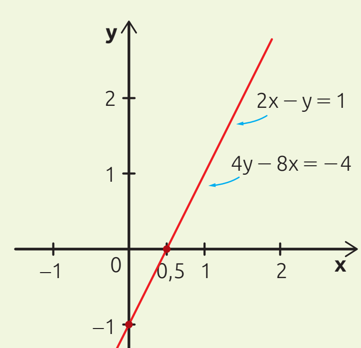
Substituindo y por $2x - 1$ na 2ª equação, obtemos:

$$4y - 8x = -4 \Rightarrow 4(2x - 1) - 8x = -4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8x - 4 - 8x = -4 \Rightarrow -4 = -4$$

De acordo com esse resultado, segue que $S = \{(x, 2x - 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Portanto, o sistema é SPI.

Observe abaixo a representação geométrica das equações do sistema, que consistem em retas coincidentes.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

d) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - \dfrac{y}{2} = -1 \end{cases}$

Multiplicando a 2ª equação por 2, temos:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - \dfrac{y}{2} = -1 \quad (\cdot 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

Para qualquer par ordenado (x, y), não é possível ter, ao mesmo tempo, $2x - y = 2$ e $2x - y = -2$. Assim, $S = \varnothing$ e o sistema não possui solução. Portanto, o sistema é SI.

Outro modo de verificar isso é utilizando o método da substituição. Se isolarmos y na 1ª equação, obtemos:

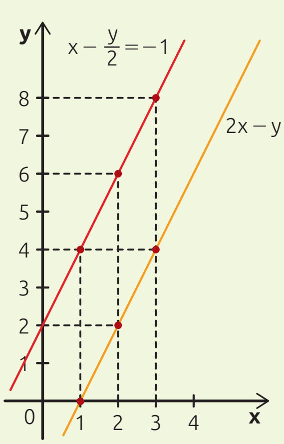
$$2x - y = 2$$
$$-y = 2 - 2x$$
$$y = 2x - 2$$

Substituindo y por $2x - 2$ na 2ª equação, obtemos:

$$x - \frac{y}{2} = -1 \Rightarrow x - \frac{2x - 2}{2} = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - (x - 1) = -1 \Rightarrow 1 = -1$$

Como essa é uma sentença falsa para qualquer x, concluímos que o sistema não possui solução. Logo, o sistema é SI.

As equações desse sistema são representadas geometricamente por retas paralelas. Assim, elas não se intersectam.



Sergio Lima/ID/BR

R3. (Unisinos-RS) Numa loja, todas as calças têm o mesmo preço, e as camisas também, sendo o preço de uma calça diferente do de uma camisa. Ricardo comprou 1 calça e 2 camisas e pagou R$ 240,00. Roberto comprou 2 calças e 3 camisas e pagou R$ 405,00. Qual o preço, em reais, de uma calça e uma camisa, respectivamente?

a) 70 e 95
b) 75 e 90
c) 80 e 85
d) 85 e 80
e) 90 e 75

Resolução

Sejam x o preço da calça e y o preço da camisa. Do enunciado, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y = 240 \\ 2x + 3y = 405 \end{cases}$$

Isolando o preço x da calça na 1ª equação, obtemos:

$$x + 2y = 240 \Rightarrow x = 240 - 2y$$

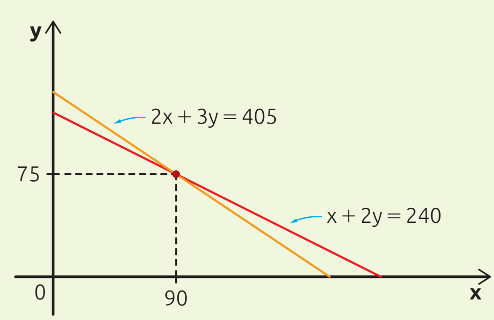
Substituindo x por $240 - 2y$ na 2ª equação, obtemos:

$$2(240 - 2y) + 3y = 405$$
$$480 - 4y + 3y = 405$$
$$-y = 405 - 480$$
$$-y = -75$$
$$y = 75$$

Como $x + 2y = 240$, então:

$$x + 2 \cdot 75 = 240 \Rightarrow x = 240 - 150 \Rightarrow x = 90$$

Observe abaixo a representação geométrica das equações do sistema e o ponto de intersecção que representa a solução para a situação.



Sergio Lima/ID/BR

Portanto, o preço da calça e o da camisa são, respectivamente, R$ 90,00 e R$ 75,00. A alternativa correta é **e**.

Atividades

11. Classifique os sistemas de equações abaixo em linear ou não linear. Justifique os casos não lineares.

a) $\begin{cases} 2x^2 + 3y = 14 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y + 2z = 11 \\ y + 4z = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5a + bc + d = 12 \\ 6a + 2b + c = 5 \\ 2ab + 8b + 2c = 10 \end{cases}$

12. O sistema abaixo possui infinitas soluções. Verifique qual das quádruplas a seguir é uma delas:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z + 2w = 4 \\ x + 2y + z + 4w = -6 \\ 3x + y - 5z - 3w = -1 \end{cases}$$

a) $(2, -1, -2, -1)$

b) $(1, -2, 1, -1)$

c) $(1, 1, 1, 0)$

d) $(1, 2, 1, 1)$

13. Elabore um sistema linear homogêneo que tenha como solução as ternas $(0, 0, 0)$ e $(-2, 1, 0)$.

14. No caderno, resolva se possível os sistemas lineares abaixo, classificando-os em SPD, SPI ou SI.

a) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$

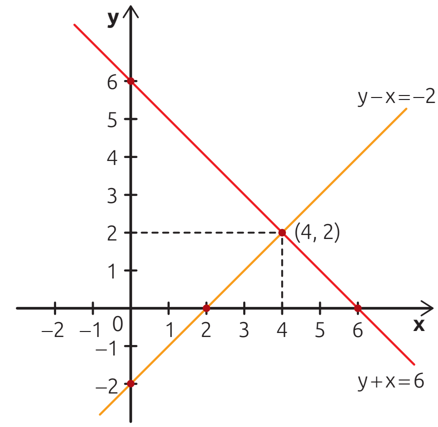
15. Em certo concurso público, a prova escrita foi composta por 40 questões de múltipla escolha. Na correção, cada resposta correta valia 3 pontos e descontava-se 2 pontos se estivesse errada. Uma questão não assinalada não ganhava e nem perdia pontos.

Sabendo que um candidato obteve 90 pontos na nota final da prova, respondendo todas as questões, determine a quantidade de respostas corretas e erradas de sua prova.

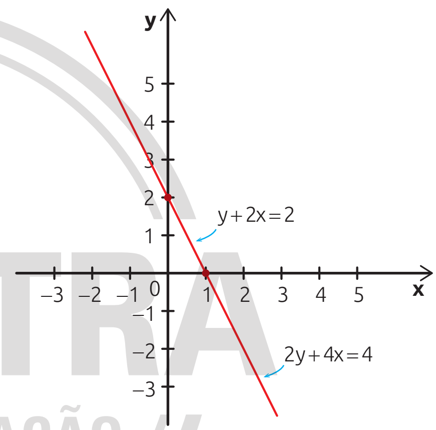
16. Considere as retas r e s que correspondem, respectivamente, às equações $y = x - 7$ e $y = m - 2x$, em que $m \in \mathbb{R}$. Como r e s intersectam-se no ponto $(5, -2)$, qual é o valor de m?

17. Classifique em SPD, SPI ou SI os sistemas lineares 2×2 representados nos planos cartesianos.

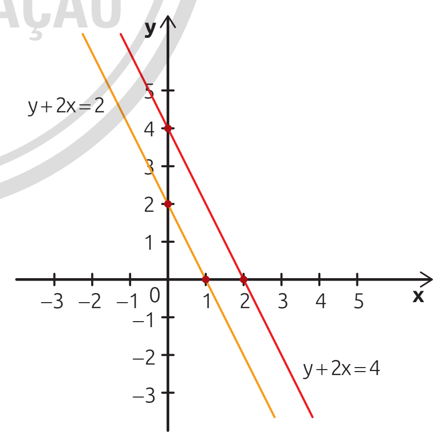
a)



b)



c)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

18. (Uece) José quer comprar chocolates e pipocas com os R$ 11,00 de sua mesada. Tem dinheiro certo para comprar dois chocolates e três pacotes de pipocas, mas faltam-lhe dois reais para comprar três chocolates e dois pacotes de pipocas. Nestas condições, podemos afirmar corretamente que um pacote de pipocas custa:

a) R$ 2,00

b) R$ 1,60

c) R$ 1,40

d) R$ 1,20

Escalonamento de um sistema linear

Podemos resolver sistemas lineares por meio de um processo que permite explicitar as soluções, quando existem. Esse método é chamado **escalonamento**.

O escalonamento também é conhecido como eliminação gaussiana ou eliminação de Gauss, em homenagem ao matemático e físico alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), considerado um dos três maiores matemáticos de todos os tempos, ao lado de Arquimedes (c. 287-212 a.C.) e Isaac Newton (1642-1727).

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

Coleção particular. Fotografia: Granger/Diomedia

Carl Friedrich Gauss. Técnica: gravura colorida. Alemanha, século XIX.

Dado um sistema linear S:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dizemos que S está na forma escalonada se:

- as equações que possuem pelo menos um coeficiente não nulo são tais que a quantidade de coeficientes nulos que antecedem o primeiro coeficiente não nulo aumenta de uma equação para a seguinte;
- as equações com todos os coeficientes nulos estão abaixo das demais.

Exemplos

- $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 0x_1 + 6x_2 + x_3 = 3 \\ 0x_1 + 0x_2 - 4x_3 = 12 \end{cases}$ ou $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 6x_2 + x_3 = 3 \\ -4x_3 = 12 \end{cases}$

- $\begin{cases} 4x - 3y - z + 7w = 14 \\ 0x + 8y - 5z - w = 5 \\ 0x + 0y - 2z + 6w = -8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 4x - 3y - z + 7w = 14 \\ 8y - 5z - w = 5 \\ -2z + 6w = -8 \end{cases}$

Resolução e classificação de um sistema linear escalonado

Inicialmente, vamos considerar apenas sistemas lineares escalonados em que não há equações com todos os coeficientes nulos. Para esse caso, temos dois tipos.

a) O sistema possui a mesma quantidade de equações e de incógnitas, e todas as equações contêm pelo menos uma incógnita com coeficiente não nulo.

Exemplo

$$\begin{cases} 7x + 4y + z = 2 \\ \quad\quad y - 3z = -11 \\ \quad\quad\quad 2z = 6 \end{cases}$$

Resolvendo a 3ª equação temos:

$$2z = 6 \Rightarrow z = 3$$

Substituindo z por 3 na 2ª equação e resolvendo-a, obtemos:

$$y - 3z = -11 \Rightarrow y - 3 \cdot 3 = -11 \Rightarrow y = -2$$

Por fim, substituímos z por 3 e y por -2 na 1ª equação para resolvê-la:

$$7x + 4y + z = 2 \Rightarrow 7x + 4(-2) + 3 = 2 \Rightarrow x = 1$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{(1, -2, 3)\}$.

Se um sistema linear escalonado tem a mesma quantidade de equações e de incógnitas, com todas as equações contendo pelo menos uma incógnita cujo coeficiente é não nulo, então o sistema é possível e determinado (SPD).

b) O sistema possui quantidade de equações menor que a de incógnitas, e todas as equações contêm pelo menos uma incógnita com coeficiente não nulo.

Exemplo

$$\begin{cases} 4x - 2y - 2z = 8 \\ \quad\quad y + 3z = 0 \end{cases}$$

Os sistemas lineares com essas características admitem pelo menos uma incógnita que pode assumir qualquer valor real. Essas incógnitas recebem o nome de **incógnitas livres**. Geralmente, utilizamos como incógnitas livres aquelas que não aparecem no início de equação alguma. No exemplo acima, utilizaremos z como incógnita livre.

Fazendo $z = k$, com $k \in \mathbb{R}$ na 2ª equação e escrevendo y em função de k, temos:

$$y + 3z = 0 \Rightarrow y + 3k = 0 \Rightarrow y = -3k$$

Substituindo z por k e y por $-3k$ na 1ª equação e escrevendo x em função de k, temos:

$$4x - 2y - 2z = 8 \Rightarrow 4x - 2(-3k) - 2k = 8 \Rightarrow 4x + 4k = 8 \Rightarrow x = 2 - k$$

Portanto, o conjunto solução desse sistema é $S = \{(2 - k, -3k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$.

Para obtermos soluções particulares do sistema escalonado de acordo com a solução geral, atribuímos valores reais para k e efetuamos os cálculos. Por exemplo, para:

- $k = 0$, temos a solução particular $(2 - k, -3k, k) \Rightarrow (2 - 0, -3 \cdot 0, 0) \Rightarrow (2, 0, 0)$;
- $k = 1$, temos a solução particular $(2 - k, -3k, k) \Rightarrow (2 - 1, -3 \cdot 1, 1) \Rightarrow (1, -3, 1)$.

Se um sistema linear escalonado tem a quantidade de equações menor do que a de incógnitas, com todas as equações contendo pelo menos uma incógnita cujo coeficiente é não nulo, então o sistema é possível e indeterminado (SPI).

A quantidade de incógnitas livres pode ser determinada pela diferença entre a quantidade de incógnitas e equações. Essa diferença corresponde ao **grau de indeterminação** do sistema linear escalonado. No exemplo dado, o grau de indeterminação é $\underbrace{1}_{3-2}$.

Agora, vamos considerar sistemas escalonados em que pelo menos uma equação tem todos os coeficientes iguais a zero. Para esse caso, também há dois tipos.

a) Quando o termo independente da equação com todos os coeficientes nulos é um número diferente de zero.

Exemplo

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 0x + 2y - z = 3 \\ 0x + 0y + 0z = -1 \end{cases}$$

Nesse exemplo, a 3ª equação não tem solução, pois a expressão $0x + 0y + 0z$ resulta em zero para quaisquer x, y e z. Esse tipo de sistema não possui solução.

Se um sistema linear escalonado tem uma equação com todos os coeficientes nulos e termo independente diferente de zero, então o sistema é impossível (SI).

b) Quando o termo independente da equação com todos os coeficientes nulos é igual a zero.

Exemplo

$$\begin{cases} 2x + 5y - z + w = -5 \\ 3z + w = 0 \\ 0w = 0 \end{cases}$$

A 3ª equação desse sistema é sempre satisfeita, independentemente do valor atribuído às incógnitas. Assim, essa equação pode ser desconsiderada e o sistema é equivalente ao formado pelas demais equações, ou seja, $\begin{cases} 2x + 5y - z + w = -5 \\ 3z + w = 0 \end{cases}$.

Os casos em que há equações com todos os coeficientes iguais a zero são importantes porque, no processo de escalonamento, que veremos a seguir, é possível se obter equações nessa forma.

Procedimentos para escalonar um sistema linear

O método do escalonamento está diretamente relacionado ao fato de que todo sistema linear é equivalente a um sistema linear escalonado.

Dizemos que dois sistemas lineares S_1 e S_2 são equivalentes se toda solução de S_1 for solução de S_2 e vice-versa, isto é, se S_1 e S_2 tiverem o mesmo conjunto solução.

Por exemplo, os sistemas $S_1 = \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 9x - y = -2 \end{cases}$ e $S_2 = \begin{cases} 3x - 7y = -14 \\ 6x + 3y = 6 \end{cases}$ são equivalentes, pois ao resolvê-los, obtemos $S = \{(0, 2)\}$ como conjunto solução de ambos.

Ao resolver um sistema linear não escalonado, podemos obter outro sistema linear equivalente na forma escalonada e resolvê-lo como foi apresentado antes. Para isso, utilizamos uma sequência de operações elementares, que são as seguintes:

- Trocar a ordem das equações do sistema linear.

Exemplo

Neste caso, a ordem da 2ª e da 3ª equação foi trocada.

$$S_1 = \begin{cases} 3x - 4y + z = 3 \\ 2z = 2 \\ 5y - 6z = -1 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \begin{cases} 3x - 4y + z = 3 \\ 5y - 6z = -1 \\ 2z = 2 \end{cases}$$

Essa operação não altera o conjunto solução do sistema. Como S_1 e S_2 têm as mesmas equações, eles têm as mesmas soluções. Resolvendo S_2, que está na forma escalonada, obtemos o conjunto solução $S = \{(2, 1, 1)\}$.

- Substituir uma equação do sistema linear por sua soma com um múltiplo de outra equação do mesmo sistema.

Exemplo

Neste caso, substituímos a 2ª equação por sua soma com a 1ª equação multiplicada por 2.

$$S_1 = \begin{cases} x - 3y - 5z = -14 \quad \boxed{\cdot 2} \\ -2x + 5y + 3z = 7 \quad \boxed{+} \\ 3z = 9 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \begin{cases} x - 3y - 5z = -14 \\ -y - 7z = -21 \\ 3z = 9 \end{cases}$$

Pode-se demonstrar que essa operação também não altera o conjunto solução do sistema. Nesse exemplo, a escolha de multiplicar a 1ª equação por 2 e adicionar à 2ª equação foi feita para anular o coeficiente de x dessa equação. Resolvendo S_2, que está na forma escalonada, obtemos o conjunto solução $S = \{(1, 0, 3)\}$.

Veja como resolver o sistema $\begin{cases} x - 3y - 2z = -3 \\ 3x - 9y + 2z = -17 \\ -2x + y - 3z = 3 \end{cases}$ por meio de escalonamento.

Utilizando as operações acima, deixamos a 2ª e a 3ª equação com o coeficiente de x igual a zero. Para isso, vamos substituir a:

- 2ª equação por sua soma com a 1ª equação multiplicada por -3;
- 3ª equação por sua soma com a 1ª equação multiplicada por 2.

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = -3 \quad \boxed{\cdot(-3)} \quad \boxed{\cdot 2} \\ 3x - 9y + 2z = -17 \quad \boxed{+} \\ -2x + y - 3z = 3 \quad \boxed{+} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y - 2z = -3 \\ 8z = -8 \\ -5y - 7z = -3 \end{cases}$$

Em seguida, vamos trocar a ordem da 2ª e da 3ª equação.

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = -3 \\ 8z = -8 \\ -5y - 7z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y - 2z = -3 \\ -5y - 7z = -3 \\ 8z = -8 \end{cases}$$

Dessa maneira, obtemos um sistema linear escalonado equivalente ao sistema linear inicial, e ao resolvê-lo, obtemos a solução do sistema linear dado inicialmente.

- Resolvendo a 3ª equação, temos:

$$8z = -8 \Rightarrow z = -1$$

- Substituindo z por -1 na 2ª equação e resolvendo-a, obtemos:

$$-5y - 7z = -3 \Rightarrow -5y - 7(-1) = -3 \Rightarrow y = 2$$

- Substituindo z por -1 e y por 2 na 1ª equação e resolvendo-a, temos:

$$x - 3y - 2z = -3 \Rightarrow x - 3 \cdot 2 - 2(-1) = -3 \Rightarrow x = 1$$

Portanto, o conjunto solução desse sistema é $S = \{(1, 2, -1)\}$.

Por que o sistema escalonado $\begin{cases} x - 3y - 2z = -3 \\ \quad -5y - 7z = -3 \\ \qquad\quad 8z = -8 \end{cases}$ é equivalente ao sistema linear dado inicialmente?

Pode ocorrer de, ao escalonarmos um sistema linear, obtermos uma das equações com o termo independente não nulo e todas as incógnitas com coeficientes nulos. Observe, por exemplo, o escalonamento do sistema $\begin{cases} x - y - 2z = 5 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - 4y - 5z = 1 \end{cases}$.

Para deixar a 2ª e a 3ª equação com o coeficiente de x igual a zero, substituímos a:

- 2ª equação por sua soma com a 1ª equação multiplicada por -2;
- 3ª equação por sua soma com a 1ª equação multiplicada por -1.

$$\begin{cases} x - y - 2z = 5 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - 4y - 5z = 1 \end{cases} \begin{matrix} \cdot(-2) \ \cdot(-1) \\ + \\ + \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 2z = 5 \\ 0x + 3y + 3z = -8 \\ 0x - 3y - 3z = -4 \end{cases}$$

Para deixar a 3ª equação com o coeficiente de y igual a zero, substituímos a 3ª equação por sua soma com a 2ª equação multiplicada por 1.

$$\begin{cases} x - y - 2z = 5 \\ 0x + 3y + 3z = -8 \\ 0x - 3y - 3z = -4 \end{cases} \begin{matrix} \\ \cdot 1 \\ + \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 2z = 5 \\ 0x + 3y + 3z = -8 \\ 0x + 0y + 0z = -12 \end{cases}$$

Nessa última etapa, o objetivo era anular o coeficiente de y, mas, nesse caso, ocorreu de o coeficiente de z também ser anulado. Como o sistema escalonado obtido não possui solução, concluímos que o sistema inicial também não possui solução, logo o sistema é impossível (SI). Nesse caso, o conjunto solução é vazio, ou seja, $S = \varnothing$.

R4. Escalone os sistemas lineares abaixo, classifique-os em SPD, SPI ou SI e determine os respectivos conjuntos solução.

a) $\begin{cases} x + 4y + z = 14 \\ 2x + 12y + 8z = 36 \\ \dfrac{x}{4} + y + \dfrac{z}{2} = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ -2x - y + \dfrac{z}{2} = -3 \\ 5x + 3y + z = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x - 4y - z + 3w = 5 \\ 3x + z - 2w = -1 \\ x + 2y + z - w = 4 \\ z + w = 3 \end{cases}$

Resolução

a) Primeiro, vamos anular os coeficientes de x na 2ª e 3ª equação. Para isso, substituímos a:

- 2ª equação por sua soma com a 1ª equação multiplicada por -2;
- 3ª equação por sua soma com a 1ª equação multiplicada por $-\dfrac{1}{4}$.

$$\begin{cases} x + 4y + z = 14 \\ 2x + 12y + 8z = 36 \\ \dfrac{x}{4} + y + \dfrac{z}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y + z = 14 \\ 4y + 6z = 8 \\ \dfrac{z}{4} = \dfrac{2}{4} \end{cases}$$

Desta maneira, obtemos um sistema linear escalonado equivalente ao sistema linear inicial, com a mesma quantidade de equações e de incógnitas. Portanto, o sistema é SPD. Resolvendo o sistema escalonado, obtemos a solução do sistema inicial.

Para encontrar o valor de z, calculamos:

$$\frac{z}{4} = \frac{2}{4} \Rightarrow z = 2$$

Substituindo o valor de z na 2ª equação do sistema escalonado, temos:

$$4y + 6(2) = 8 \Rightarrow 4y = 8 - 12 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4y = -4 \Rightarrow y = -1$$

Por fim, substituímos os valores de z e y na 1ª equação do sistema escalonado:

$$x + 4(-1) + 2 = 14 \Rightarrow x - 4 + 2 = 14 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 14 + 2 \Rightarrow x = 16$$

Portanto, $S = \{(16, -1, 2)\}$.

b) É preciso anular o coeficiente de x na 2ª e 3ª equação. Assim, substituímos a:

- 2ª equação por sua soma com a 1ª equação multiplicada por 2;
- 3ª equação por sua soma com a 1ª equação multiplicada por -5.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ -2x - y + \dfrac{z}{2} = -3 \\ 5x + 3y + z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y + \dfrac{9z}{2} = 3 \\ -2y - 9z = -6 \end{cases}$$

Substituindo a 3ª equação por sua soma com a 2ª equação multiplicada por 2, obtemos:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y + \dfrac{9z}{2} = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Assim, obtemos um sistema linear escalonado com a quantidade de equações menor do que a quantidade de incógnitas. Portanto, esse sistema é SPI. Considerando z como a variável livre nesse sistema e substituindo $z = k$ na 2ª equação, obtemos y em função de k:

$$y + \frac{9k}{2} = 3 \Rightarrow y = 3 - \frac{9k}{2}$$

Finalmente, substituindo os valores de z e y na 1ª equação, temos:

$$x + 3 - \frac{9k}{2} + 2k = 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{9k}{2} - 2k \Rightarrow x = \frac{5k}{2}$$

Portanto:

$$S = \left\{\left(\frac{5k}{2}, 3 - \frac{9k}{2}, k\right) \middle| k \in \mathbb{R}\right\}$$

c) Inicialmente, vamos trocar a 1ª pela 3ª equação, a fim de que o primeiro coeficiente de x seja igual a 1.

$$\begin{cases} -2x - 4y - z + 3w = 5 \\ 3x + z - 2w = -1 \\ x + 2y + z - w = 4 \\ z + w = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z - w = 4 \\ 3x + z - 2w = -1 \\ -2x - 4y - z + 3w = 5 \\ z + w = 3 \end{cases}$$

Em seguida, anulamos os coeficientes de x na 2ª e 3ª equação. Para isso, vamos substituir a:

- 2ª equação por sua soma com a 1ª equação multiplicada por -3;
- 3ª equação por sua soma com a 1ª equação multiplicada por 2.

$$\begin{cases} x + 2y + z - w = 4 \\ 3x + z - 2w = -1 \\ -2x - 4y - z + 3w = 5 \\ z + w = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z - w = 4 \\ -6y - 2z + w = -13 \\ z + w = 13 \\ z + w = 3 \end{cases}$$

Substituindo a 4ª equação por sua soma com a 3ª equação multiplicada por -1, obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y + z - w = 4 \\ -6y - 2z + w = -13 \\ z + w = 13 \\ 0 = -10 \end{cases}$$

Este é um sistema linear equivalente ao sistema linear inicial. Como a 4ª equação do sistema não tem solução, pois a sentença $0 = -10$ é sempre falsa, o sistema é SI, ou seja, não admite solução. Portanto, $S = \varnothing$.

R5. (UEL-PR) Uma padaria possui 3 tipos de padeiros, classificados como *A*, *B* e *C*. Essa padaria é bem conhecida na cidade pela qualidade do pão francês, da baguete e do pão de batata.

Cada padeiro do tipo *A* produz, diariamente, 30 pães franceses, 100 baguetes e 20 pães de batata.

Cada padeiro do tipo *B* produz, diariamente, 30 pães franceses, 70 baguetes e 20 pães de batata.

Cada padeiro do tipo *C* produz, diariamente, 90 pães franceses, 30 baguetes e 100 pães de batata.

Quantos padeiros do tipo *A*, do tipo *B* e do tipo *C* são necessários para que em um dia a padaria produza, exatamente, 420 pães franceses, 770 baguetes e 360 pães de batata?

Resolução

Denotando por x, y e z a quantidade de padeiros do tipo *A*, *B* e *C*, respectivamente, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 30x + 30y + 90z = 420 \\ 100x + 70y + 30z = 770 \\ 20x + 20y + 100z = 360 \end{cases}$$

Para resolver este sistema, inicialmente multiplicaremos a 1ª, a 2ª e a 3ª equação por $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{20}$, respectivamente.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 14 \\ 10x + 7y + 3z = 77 \\ x + y + 5z = 18 \end{cases}$$

Em seguida, anulamos os coeficientes de x na 2ª e 3ª equação, substituindo a:

- 2ª equação por sua soma com a 1ª equação multiplicada por -10;
- 3ª equação por sua soma com a 1ª equação multiplicada por -1.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 14 \\ -3y - 27z = -63 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

Desta maneira, obtemos um sistema linear escalonado equivalente ao sistema inicial. Resolvendo a 3ª equação do sistema, obtemos $z = 2$. Depois, substituindo o valor de z na 2ª equação, temos:

$$-3y - 27 \cdot (2) = -63 \Rightarrow -3y = -63 + 54 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-9}{-3} \Rightarrow y = 3$$

Finalmente, substituímos o valor de z e y na 1ª equação:

$$x + 3 + 3 \cdot (2) = 14 \Rightarrow x = 14 - 9 \Rightarrow x = 5$$

Portanto, a padaria precisará de 5 padeiros do tipo *A*, 3 do tipo *B* e 2 do tipo *C* para obter a produção desejada.

Atividades

19. No caderno, classifique os sistemas em SPD, SPI ou SI, e depois determine os respectivos conjuntos solução.

a) $\begin{cases} 5x + 10y - 4z - 2w = 9 \\ 4y - z + 3w = 12 \\ 2z + w = 10 \\ w = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 30 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 15 \\ x_3 + x_4 + 4x_5 = 30 \\ 2x_4 + x_5 = 9 \\ 0x_5 = 12 \end{cases}$

20. Relacione os pares de sistemas equivalentes, indicando a letra e o símbolo romano correspondentes.

a) $\begin{cases} 30x + 20z = 130 \\ 3x + 5y + z = 23 \\ 6x + 2z = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z = 3 \\ 3x + 4y - z = 13 \\ 6x + 2y - 2z = 38 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + y + 3z = 13 \\ 6x + 4z = 16 \\ 3x + 3z = 10 \end{cases}$

I) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 9 \\ 3y + z = 4 \\ z = 10 \end{cases}$

II) $\begin{cases} 3x + 2z = 13 \\ 5y - z = 10 \\ z = 6{,}5 \end{cases}$

III) $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 3y + z = 7 \\ z = 2 \end{cases}$

21. Determine no caderno quais dos sistemas a seguir estão na forma escalonada.

$$S_1 = \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 12 \\ 2y - z = 8 \\ 2z = 2 \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 4x_5 = 29 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 8 \\ x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 14 \\ x_4 + 2x_5 = 9 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 15 \\ 4x + 3z = 12 \\ 2y + 12z = 5 \end{cases}$$

22. Classifique os sistemas em SPD, SPI ou SI, e depois resolva-os no caderno.

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 10 \\ -4x + 4y + 4z = -20 \\ 3x - 6y + 6z = 36 \end{cases}$

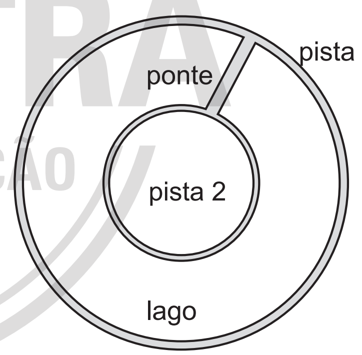
b) $\begin{cases} 2x - 4y - 2z = 3{,}6 \\ 2x - 2y = 13{,}8 \\ 3x - 2y + z = 25{,}8 \end{cases}$

23. (UPE) Em uma floricultura, é possível montar arranjos diferentes com rosas, lírios e margaridas. Um arranjo com 4 margaridas, 2 lírios e 3 rosas custa 42 reais. No entanto, se o arranjo tiver uma margarida, 2 lírios e uma rosa, ele custa 20 reais. Entretanto, se o arranjo tiver 2 margaridas, 4 lírios e uma rosa, custará 32 reais. Nessa floricultura, quanto custará um arranjo simples, com uma margarida, um lírio e uma rosa?

a) 5 reais
b) 8 reais
c) 10 reais
d) 15 reais
e) 24 reais

24. Dois grupos de pessoas foram ao cinema. O primeiro grupo consumiu 10 pipocas, 12 sucos e 15 barras de cereal e gastou R$ 240,00. O segundo grupo consumiu 8 pipocas, 10 sucos e 6 barras de cereal, totalizando um gasto de R$ 165,00. Sabendo que 1 pipoca, 1 suco e 1 barra de cereal custam juntos R$ 20,00, determine o valor de cada item consumido nesse cinema.

25. (UFG-GO) Em um determinado parque, existe um circuito de caminhada, como mostra a figura a seguir.



UFG/Fac-símile: ID/BR

Um atleta, utilizando um podômetro, percorre em um dia a pista 1 duas vezes, atravessa a ponte e percorre a pista 2 uma única vez, totalizando 1 157 passos. No dia seguinte, percorre a pista 1 uma única vez, atravessa a ponte e percorre a pista 2, também uma única vez, totalizando 757 passos. Além disso, percebe que o número de passos necessários para percorrer sete voltas na pista 1 equivale ao número de passos para percorrer oito voltas na pista 2. Diante do exposto, conclui-se que o comprimento da ponte, em passos, é:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 15

Podômetro: instrumento de bolso utilizado para contar a quantidade de passos de uma pessoa durante uma caminhada.

Matrizes

Definição de matriz

Os especialistas em finanças pessoais sugerem uma atitude simples para quem precisa economizar dinheiro: anotar todos os gastos do dia a dia, por mais banais que sejam. Com essa prática, é possível saber onde o dinheiro está sendo gasto e como ele poderia render mais.

Veja como Isabela anotou seus gastos de três dias da semana em uma planilha eletrônica.

	A	B	C	D	E	F
1	Gasto diário (R$)					
2	Dia da semana	Transporte	Refeição	Café	Doce	
3	Segunda-feira	6,00	8,70	2,00	2,50	
4	Terça-feira	6,00	14,00	5,30	0	
5	Quarta-feira	6,00	12,90	0	4,00	

Eduardo dos Santos/ASC Imagens

Os valores em reais gastos por Isabela estão organizados em 3 linhas e 4 colunas. Em Matemática, nomeamos esse tipo de organização de **matriz** e podemos representá-la da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 6 & 8{,}7 & 2 & 2{,}5 \\ 6 & 14 & 5{,}3 & 0 \\ 6 & 12{,}9 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 6 & 8{,}7 & 2 & 2{,}5 \\ 6 & 14 & 5{,}3 & 0 \\ 6 & 12{,}9 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Monkey Business Images/Shutterstock.com/ID/BR

As planilhas eletrônicas são um recurso importante nos dias atuais, pois, entre outras funções, elas registram informações de modo organizado e auxiliam em cálculos contábeis.

Pelo fato de essa matriz ser composta por 3 linhas e 4 colunas, dizemos que é de ordem 3×4 (lê-se 3 por 4). Nela, cada linha corresponde aos valores gastos por dia e cada coluna aos valores gastos por item. Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 6 & 8{,}7 & 2 & 2{,}5 \\ 6 & 14 & 5{,}3 & 0 \\ 6 & 12{,}9 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3ª linha: indica os valores gastos na quarta-feira

$$\begin{bmatrix} 6 & 8{,}7 & 2 & 2{,}5 \\ 6 & 14 & 5{,}3 & 0 \\ 6 & 12{,}9 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2ª coluna: indica os valores gastos com refeição

O elemento ou termo localizado na 3ª linha e na 2ª coluna dessa matriz corresponde ao valor gasto por Isabela na quarta-feira com refeição.

$$\begin{bmatrix} 6 & 8{,}7 & 2 & 2{,}5 \\ 6 & 14 & 5{,}3 & 0 \\ 6 & \boxed{12{,}9} & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Convencionou-se a ordenação das linhas de cima para baixo e das colunas da esquerda para a direita.

Na quarta-feira Isabela gastou R$ 12,90 com refeição.

De modo geral, uma matriz de ordem $m \times n$, com $m, n \in \mathbb{N}^*$, é todo quadro retangular com $m \cdot n$ elementos, dispostos em m linhas e n colunas.

Geralmente, as matrizes são indicadas entre colchetes ou parênteses e, na grande maioria dos casos, seus elementos ou termos são números reais.

Exemplos

- Matriz de ordem 2×3 (2 linhas e 3 colunas)

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -7 \end{pmatrix}$$

- Matriz de ordem 1×5 (1 linha e 5 colunas)

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & -8 & 6 & -17 \end{bmatrix}$$

- Matriz de ordem 3×3 (3 linhas e 3 colunas)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & \sqrt{2} \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

- Matriz de ordem 4×2 (4 linhas e 2 colunas)

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \\ -7 & 0 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Podemos indicar genericamente os elementos de uma matriz utilizando a informação de sua localização. Por exemplo, considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$, temos o elemento:

- 3 na 1ª linha e 1ª coluna, que indicamos por a_{11} (lê-se *a* um um), logo $a_{11} = 3$;
- -5 na 1ª linha e 2ª coluna, que indicamos por a_{12} (lê-se *a* um dois), logo $a_{12} = -5$;
- 7 na 2ª linha e 1ª coluna, que indicamos por a_{21} (lê-se *a* dois um), logo $a_{21} = 7$;
- 10 na 2ª linha e 2ª coluna, que indicamos por a_{22} (lê-se *a* dois dois), logo $a_{22} = 10$.

Nomeamos uma matriz com uma letra maiúscula e seus elementos com a mesma letra minúscula, acompanhada de índices duplos.

Em uma matriz A de ordem $m \times n$, com $m, n \in \mathbb{N}^*$, os elementos são indicados por a_{ij}, com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ e $i, j \in \mathbb{N}$, em que o índice i indica a linha e o índice j indica a coluna. O elemento a_{ij} situa-se no cruzamento da i-ésima linha com a j-ésima coluna:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

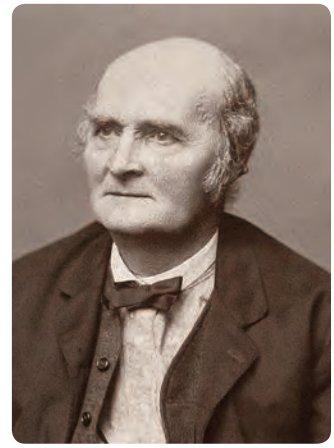
A lista ordenada $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in})$ chama-se a i-ésima linha da matriz A, enquanto $(a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \ldots, a_{mj})$ é a j-ésima coluna da matriz A.

De maneira abreviada, podemos indicar essa matriz como $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

No tratado chinês composto por volta de 250 a.C., intitulado *Chiu-Chang Suan-Shu* ou *Nove capítulos sobre a arte matemática*, existem diagramas numéricos organizados em quadros que sugerem a ideia de matrizes. Mas historicamente o estudo a respeito das matrizes iniciou-se no século XIX, com contribuições de vários matemáticos dos quais podemos destacar William Rowan Hamilton (1805-1865), Hermann Günther Grassmann (1809-1877) e Arthur Cayley (1821-1895), que desenvolveram um tipo de álgebra matricial que satisfazia leis estruturais diferentes da álgebra usual, abrindo as portas para o campo da álgebra abstrata.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.



Granger/Diomedia

Matemático inglês Arthur Cayley. Fotografia de autor desconhecido. c.1886.

R1. Explicite a matriz $C = \left(c_{ij}\right)_{1\times 3}$, em que $c_{ij} = i + 2$.

Resolução

A representação genérica de C é:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores de i e j em $c_{ij} = i + 2$, temos:

$$c_{11} = 1 + 2 = 3 \quad c_{12} = 1 + 2 = 3 \quad c_{13} = 1 + 2 = 3$$

Assim, $C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

R2. Explicite a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 4}$, em que $a_{ij} = 2i^2 - 4j$.

Resolução

Podemos representar genericamente uma matriz do tipo 3×4 por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores de i e j em $a_{ij} = 2i^2 - 4j$, temos:

1ª linha

$a_{11} = 2(1)^2 - 4(1) = -2$

$a_{12} = 2(1)^2 - 4(2) = -6$

$a_{13} = 2(1)^2 - 4(3) = -10$

$a_{14} = 2(1)^2 - 4(4) = -14$

2ª linha

$a_{21} = 2(2)^2 - 4(1) = 4$

$a_{22} = 2(2)^2 - 4(2) = 0$

$a_{23} = 2(2)^2 - 4(3) = -4$

$a_{24} = 2(2)^2 - 4(4) = -8$

3ª linha

$a_{31} = 2(3)^2 - 4(1) = 14$

$a_{32} = 2(3)^2 - 4(2) = 10$

$a_{33} = 2(3)^2 - 4(3) = 6$

$a_{34} = 2(3)^2 - 4(4) = 2$

Assim:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -10 & -14 \\ 4 & 0 & -4 & -8 \\ 14 & 10 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

R3. Explicite a matriz $B = \left(b_{ij}\right)_{4\times4}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} 2i + j, \text{se } i < j \\ 1, \text{se } i = j \\ 2i - j, \text{se } i > j \end{cases}$.

Resolução

A matriz genérica de B é:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

Determinaremos os valores dos elementos da matriz.

Para $i < j$

$b_{12} = 2(1) + 2 = 4$

$b_{13} = 2(1) + 3 = 5$

$b_{14} = 2(1) + 4 = 6$

$b_{23} = 2(2) + 3 = 7$

$b_{24} = 2(2) + 4 = 8$

$b_{34} = 2(3) + 4 = 10$

Para $i = j$

$b_{11} = 1$ $\quad b_{22} = 1$ $\quad b_{33} = 1$ $\quad b_{44} = 1$

Para $i > j$

$b_{21} = 2(2) - 1 = 3$

$b_{31} = 2(3) - 1 = 5$

$b_{32} = 2(3) - 2 = 4$

$b_{41} = 2(4) - 1 = 7$

$b_{42} = 2(4) - 2 = 6$

$b_{43} = 2(4) - 3 = 5$

Assim, a matriz B é:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 10 \\ 7 & 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

R4. A matriz B possui 15 elementos. Sabendo que o número de linhas dessa matriz é igual ao número de colunas mais 2 unidades, determine a ordem da matriz B.

Resolução

Sabemos que a ordem da matriz B é $m \times n$ e que $m \cdot n = 15$.

Como o número de linhas (m) é igual ao número de colunas (n) mais 2 unidades, substituímos m por $n + 2$, obtendo:

$$m \cdot n = 15 \Rightarrow (n + 2) \cdot n = 15 \Rightarrow n^2 + 2n - 15 = 0$$

Utilizando a fórmula resolutiva da equação do 2º grau, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) \Rightarrow \Delta = 64$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow n = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow n = \frac{-2 \pm 8}{2} \begin{cases} n_1 = 3 \\ \cancel{n_2 = -5} \end{cases}$$

Logo $n = 3$ e $m = 3 + 2 = 5$; assim, a ordem da matriz é 5×3.

Atividades

1. A tabela abaixo apresenta a população desocupada de fevereiro a junho de 2015 em São Paulo (SP).

População desocupada de fevereiro a junho de 2015 em São Paulo (SP) – 1 000 pessoas

Mês	Homens	Mulheres
Fevereiro	272	341
Março	277	328
Abril	313	338
Maio	349	358
Junho	335	401

Fonte de pesquisa: IBGE. Disponível em: <www.sidra.ibge.gov.br/bda/emprego/default.asp?t=4&z=t&o=16&u1=26674&u2=26674&u3=26674&u5=26674&u6=26674&u4=6565>. Acesso em: 18 set. 2015.

Rodrigo Bellizzi/Shutterstock.com/ID/BR

Carteira de Trabalho e Previdência Social (CTPS), documento obrigatório para o registro das ocupações laborais exercidas pelo trabalhador.

Baseando-se nos dados apresentados na tabela, resolva as questões abaixo.

a) Construa uma matriz 5×2 para representar as informações da tabela.

b) Na matriz do item **a**, o que representa:

- a primeira coluna?
- a terceira linha?
- o elemento a_{51}?
- o elemento a_{22}?

População desocupada: de acordo com o IBGE, compreende as pessoas que não tinham trabalho e estavam efetivamente procurando trabalho, em um determinado período de referência e com disponibilidade para assumir o trabalho na semana de entrevista.

2. Determine a ordem de cada matriz a seguir.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 12 & 3 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & 63 & 5 \\ -7 & 4 & 0 & 8 \\ 2 & 15 & 18 & -2 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -5 & 1 \\ 4 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \end{bmatrix}$

3. Considere a matriz A de ordem 4×4 abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 9 & 3 \\ 85 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 15 & 5 \\ 3 & 59 & 753 & 6 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) a_{23} b) a_{12} c) a_{43} d) a_{33}

4. A matriz A de ordem $m \times n$ possui 21 elementos e $m = 4 + n$. Determine a ordem da matriz A.

5. Explicite a matriz indicada em cada item.

a) $A = \left(a_{ij}\right)_{2\times 3}$, tal que $a_{ij} = 5i - j^2$

b) $B = \left(b_{ij}\right)_{4\times 2}$, tal que $b_{ij} = i - j^2$

c) $C = \left(c_{ij}\right)_{3\times 3}$, tal que $c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ \dfrac{i}{j}, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

d) $D = \left(d_{ij}\right)_{4\times 4}$, tal que $d_{ij} = \begin{cases} i - j, \text{ se } i < j \\ 0, \text{ se } i = j \\ (2i - j)^2, \text{ se } i > j \end{cases}$

6. Seja a matriz $C = \left(c_{ij}\right)_{4\times 4}$ tal que $c_{ij} = 2i - j$. Determine:

a) a soma de todos os elementos da matriz C.

b) o produto dos elementos da 3ª linha de C.

c) $c_{11} - c_{22} + 3c_{14} - c_{31}$.

d) $\left(c_{11} \cdot c_{22} \cdot c_{33} \cdot c_{44}\right) - \left(c_{14} \cdot c_{23} \cdot c_{32} \cdot c_{41}\right)$.

Alguns tipos de matrizes

Por possuírem certas características particulares, alguns tipos de matrizes recebem nomenclatura específica. Vejamos algumas delas.

Matriz quadrada

Uma matriz quadrada de ordem n é toda matriz do tipo $n \times n$, isto é, uma matriz com a quantidade de linhas igual à quantidade de colunas.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

matriz quadrada de ordem 1

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{3}{8} & -7 \end{bmatrix}$$

matriz quadrada de ordem 2

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -11 \\ 0 & 5 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

matriz quadrada de ordem 3

Em uma matriz quadrada A de ordem n, os elementos a_{ij} tais que $i = j$ formam a **diagonal principal** e os elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

Observe que, nesse caso, a soma dos índices dos elementos da diagonal secundária é 5 e a ordem da matriz quadrada é 4, isto é, $i + j = n + 1 = \underbrace{5}_{4+1}$.

Matriz triangular

Uma matriz triangular M é toda matriz quadrada com elementos m_{ij} nulos para $i < j$ ou $i > j$, ou seja, é uma matriz com todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal iguais a zero.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

matriz triangular A de ordem 2

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 8 & -6 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

matriz triangular B de ordem 3

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & -16 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matriz triangular C de ordem 4

Dizemos que M é uma matriz triangular inferior quando os elementos m_{ij}, com $i < j$, são nulos e que M é uma matriz triangular superior quando os elementos m_{ij}, com $i > j$, são nulos.

Nos exemplos acima, A e C são matrizes triangulares superiores e B é uma matriz triangular inferior.

Matriz diagonal

Uma matriz diagonal D é toda matriz quadrada cujos elementos d_{ij} são nulos para $i \neq j$, ou seja, é uma matriz com todos os elementos que não pertencem à diagonal principal iguais a zero.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

matriz diagonal A de ordem 2

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

matriz diagonal B de ordem 3

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matriz diagonal C de ordem 3

Matriz identidade

Uma matriz identidade A é toda matriz diagonal com elementos a_{ij} tais que $i = j$ são iguais a 1, isto é, uma matriz com todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 e os demais iguais a zero. Geralmente, uma matriz identidade de ordem n é indicada por I_n.

Exemplos

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz identidade de ordem 2

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz identidade de ordem 3

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz identidade de ordem 4

Matriz linha

Uma matriz linha é toda matriz do tipo $1 \times n$, isto é, possui uma única linha.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \end{bmatrix}$$

matriz linha de ordem 1×2

$$B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

matriz linha de ordem 1×3

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -7 & -9 \end{bmatrix}$$

matriz linha de ordem 1×5

Matriz coluna

Uma matriz coluna é toda matriz do tipo $m \times 1$, isto é, possui uma única coluna.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} -9 \end{bmatrix}$$

matriz coluna de ordem 1×1

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

matriz coluna de ordem 2×1

$$C = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

matriz coluna de ordem 3×1

Matriz nula

Uma matriz nula A é toda matriz com elementos a_{ij} nulos, para todo i e j, isto é, todos os seus elementos são iguais a zero. Geralmente, uma matriz nula de ordem $m \times n$ é indicada por $0_{m\times n}$. Caso seja uma matriz nula quadrada de ordem n, indicamos simplesmente por 0_n.

Exemplos

$$0_{2\times5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matriz nula de ordem 2×5

$$0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matriz nula de ordem 2

$$0_{1\times4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matriz nula de ordem 1×4

Igualdade de matrizes

Duas matrizes A e B são ditas iguais se, e somente se, $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ e $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i e j, ou seja, quando possuem a mesma ordem e todos os elementos correspondentes (elementos com os mesmos índices) iguais.

Exemplos

- Dados $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 19 & -5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 19 & -5 \end{bmatrix}$, temos A e B de mesma ordem e $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ e $a_{22} = b_{22}$. Logo $A = B$.
- Dados $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 4 & -8 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 4 & -8 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, temos C e D de mesma ordem, mas $c_{13} \neq d_{13}$, pois $-2 \neq 2$. Logo $C \neq D$.
- Dados $E = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 9 \\ -11 & 0 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -11 \\ -3 & 9 & 0 \end{bmatrix}$, temos C e D de ordens diferentes, pois E é de ordem 3×2 e F é de ordem 2×3. Logo $E \neq F$.

Transposta de uma matriz

Dada a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, denomina-se transposta de A a matriz $A^t = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, tal que $a'_{ji} = a_{ij}$ para todo i e j, ou seja, os elementos que compõem cada coluna i de A^t são ordenadamente iguais aos elementos que compõem cada linha i de A.

De maneira prática, a matriz A^t é obtida trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas da matriz A.

> Ao transpor uma matriz, as quantidades de linhas e de colunas ficam invertidas. Se A tiver ordem $m \times n$, então A^t terá ordem $n \times m$.

Exemplos

$$A=\begin{bmatrix}0\\-4\\7\end{bmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}0 & -4 & 7\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}6 & 13 & -1\\0 & -9 & -5\\1 & 5 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow C^t=\begin{bmatrix}6 & 0 & 1\\13 & -9 & 5\\-1 & -5 & 0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 9 & 2\\6 & -9 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{bmatrix}-1 & 6\\9 & -9\\2 & 4\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}3 & -8\end{bmatrix}\Rightarrow D^t=\begin{bmatrix}3\\-8\end{bmatrix}$$

Qual é a transposta da transposta de uma matriz A, ou seja, $\left(A^t\right)^t$?

Matriz simétrica

Uma matriz simétrica A é toda matriz quadrada em que $A^t=A$ com elementos $a_{ji}=a_{ij}$ para todo i e j, ou seja, é uma matriz com todos os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal.

Exemplos

$$A=\begin{bmatrix}-5 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}$$

matriz simétrica de ordem 2

$$B=\begin{bmatrix}9 & 1 & 0\\1 & 2 & -3\\0 & -3 & -17\end{bmatrix}$$

matriz simétrica de ordem 3

$$C=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5 & -6\\-1 & 1 & 7 & -8\\5 & 7 & \sqrt{3} & 0\\-6 & -8 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

matriz simétrica de ordem 4

Quando uma matriz A é tal que $A^t\neq A$, dizemos que A é uma matriz não simétrica.

Atividades resolvidas

R5. Classifique cada uma das afirmações a seguir em verdadeira ou falsa. Justifique e, quando a afirmação for falsa, dê um contraexemplo.

a) Uma matriz diagonal pode ser nula.

b) Existe matriz linha que é simétrica.

c) Em uma matriz triangular, todos os elementos fora da diagonal principal são nulos.

d) Toda matriz diagonal pode ser chamada matriz identidade.

Resolução

a) Verdadeira. A matriz diagonal é aquela em que os elementos a_{ij} são nulos para i ≠ j. No caso de termos uma matriz nula, a condição de matriz diagonal é satisfeita.

Exemplo: $A_{3\times3}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

b) Verdadeira. Seja a matriz $A=\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}$. Temos que a matriz A é uma matriz linha e $A^t=\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}$. Deste modo temos e $A=A^t$, ou seja, A é uma matriz simétrica.

c) Falsa. Em uma matriz triangular, os elementos acima ou abaixo da diagonal principal devem ser nulos.

Contraexemplo: $\begin{bmatrix}1 & 4 & 6\\0 & 2 & 5\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

d) Falsa. Uma matriz diagonal só é identidade se os elementos de sua diagonal principal forem iguais a 1.

Contraexemplo: $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$

R6. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} |2x + y| & 0 \\ 0 & 10^{3x^2} \end{bmatrix}$ e B a matriz identidade de ordem 2. Determine os valores não negativos de x e y, de maneira que $A^t = B$.

Resolução

Como A é uma matriz diagonal, temos $A^t = A$ e, portanto, devemos calcular os valores de x e y tais que $A = B = I_2$.

$$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} |2x + y| & 0 \\ 0 & 10^{3x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |2x + y| = 1 & \text{(I)} \\ 10^{3x^2} = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Vamos calcular o valor de x em **II**, fazendo:

$$10^{3x^2} = 1 \Rightarrow 10^{3x^2} = 10^0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Substituindo $x = 0$ em **I**, obtemos:

$$|2x + y| = 1 \Rightarrow |2 \cdot 0 + y| = 1 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

Como x e y devem ser não negativos, temos $x = 0$ e $y = 1$.

R7. Seja uma matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$, em que $a_{ij} = \left(i \cdot j\right)^2$.

a) Podemos afirmar que essa matriz é simétrica, sem construí-la? Por quê?

b) Construa a matriz A para $m = 3$.

Resolução

a) Sim, pois $a_{ji} = \left(j \cdot i\right)^2 = \left(i \cdot j\right)^2 = a_{ij}$.

b) $A = \begin{bmatrix} (1 \cdot 1)^2 & (1 \cdot 2)^2 & (1 \cdot 3)^2 \\ (2 \cdot 1)^2 & (2 \cdot 2)^2 & (2 \cdot 3)^2 \\ (3 \cdot 1)^2 & (3 \cdot 2)^2 & (3 \cdot 3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 4^2 & 6^2 \\ 3^2 & 6^2 & 9^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 16 & 36 \\ 9 & 36 & 81 \end{bmatrix}$

R8. Determine o valor dos elementos representados por letras minúsculas na matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{4 \times 4}$ abaixo considerando que A é simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ p & 1 & 3 & 7 \\ q & r & 1 & 4 \\ s & t & u & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução

Como A é matriz simétrica, temos $A^t = A$. Assim:

$$A^t = A \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ p & 1 & 3 & 7 \\ q & r & 1 & 4 \\ s & t & u & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p & q & s \\ 2 & 1 & r & t \\ 5 & 3 & 1 & u \\ 6 & 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $p = 2$, $q = 5$, $r = 3$, $s = 6$, $t = 7$ e $u = 4$.

Atividades

7. Explicite as matrizes a seguir.

a) Matriz linha A com 4 elementos, tal que $a_{ij} = i^2 - 2j$.

b) Matriz coluna B com 6 elementos, tal que $b_{ij} = 2i + j$.

c) $P = \left(p_{ij}\right)_{5\times5}$, tal que P é matriz identidade.

d) Matriz triangular superior Q de ordem 2, tal que $q_{ij} = \cos\left(ij\dfrac{\pi}{2}\right)$ para $i \leqslant j$.

8. Determine a transposta de cada matriz.

a) $M = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

b) $N = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 & 8 \\ 5 & 5 & 8 & 4 \\ 4 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 9 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

c) $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

d) $P = \left(p_{ij}\right)_{2\times2}$ tal que $p_{ij} = (1+i)^2$

e) $Q = \left(q_{ij}\right)_{2\times3}$ tal que $q_{ij} = \begin{cases} 3, \text{ se } i = j \\ 2 + j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

9. Determine pelo menos dois exemplos de matrizes que satisfaçam as condições de cada item.

a) Matriz triangular superior e inferior simultaneamente.

b) Matriz coluna e nula, simultaneamente.

c) Matriz quadrada cujos elementos da diagonal secundária são números inteiros.

d) Matriz de ordem 3×2 com todos os elementos pares.

10. Determine os valores de a, b e c na expressão abaixo.

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 & 8 \\ 4 & a+c & 3 \\ -1 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & c-2b & 8 \\ 4 & 8 & 3 \\ a+3b & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

11. Determine os valores de x, y e z para que as igualdades sejam verdadeiras.

a) $\begin{bmatrix} x & y \\ z & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \sqrt{x} & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3! \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ z+1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & y \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} x+y & 5 & 3 \\ z & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & y-x & 2 \end{bmatrix}$

12. Seja $M = \left(m_{ij}\right)_{2\times3}$, tal que $m_{ij} = i + 2j$. Determine os valores de r, s e t em $N = \begin{bmatrix} r-s & 5 & t-2s \\ 4 & t+3r & 8 \end{bmatrix}$ de modo que se tenha $M = N$.

13. Mostre que as matrizes $A_{5\times5} = \left(a_{ij}\right)$, com $a_{ij} = \dfrac{(i-2)^2}{7} + \dfrac{(j-1)^2}{8}$, e $B_{5\times5} = \left(b_{ij}\right)$, com $b_{ij} = \dfrac{8i^2 - 32i + 7j^2 - 14j + 39}{56}$, são iguais.

14. (Mackenzie-SP) Se a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & x+y+z & 3y-z+2 \\ 4 & 5 & -5 \\ y-2z+3 & z & 0 \end{bmatrix}$$

é simétrica, o valor de x é:

a) 0
b) 1
c) 6
d) 3
e) −5

15. (Uerj) Considere a sequência de matrizes $\left(A_1, A_2, A_3, \ldots\right)$, todas quadradas de ordem 4, respectivamente iguais a:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 32 & 33 & 34 & 35 \\ 36 & 37 & 38 & 39 \\ 40 & 41 & 42 & 43 \\ 44 & 45 & 46 & 47 \end{bmatrix}, \ldots$$

Sabendo que o elemento $a_{ij} = 75\,432$ é da matriz A_n, determine os valores de n, i e j.

Operações com matrizes

Desde os anos iniciais, estudamos as operações de adição, subtração e multiplicação com números reais. Agora estenderemos essas ideias para as matrizes.

Adição de matrizes

Uma escola de idiomas oferece aulas de inglês e espanhol no período da manhã e da tarde. Veja a quantidade de alunos matriculados em cada período de acordo com a faixa etária e o idioma do curso em 2017.

Alunos matriculados na escola de idiomas no período da manhã em 2017

Faixa etária \ Curso	Inglês	Espanhol
Até 16 anos	16	14
Maior do que 16 anos	13	11

Fonte de pesquisa: Secretaria do curso.

Alunos matriculados na escola de idiomas no período da tarde em 2017

Faixa etária \ Curso	Inglês	Espanhol
Até 16 anos	21	17
Maior do que 16 anos	22	15

Fonte de pesquisa: Secretaria do curso.

Qual foi a quantidade de alunos matriculados em cada curso, de acordo com a faixa etária, em 2017?

Para responder a essa pergunta, adicionamos, para cada faixa etária, as quantidades correspondentes de alunos matriculados em cada curso do período da manhã e da tarde.

Alunos matriculados na escola de idiomas em 2017

Faixa etária \ Curso	Inglês	Espanhol
Até 16 anos	37	31
Maior do que 16 anos	35	26

Fonte de pesquisa: Secretaria do curso.

Alexandre Koyama/ASC Imagens

A adição de matrizes ocorre de maneira semelhante. Representando a quantidade de alunos matriculados nos dois períodos por meio das matrizes $A = \begin{bmatrix} 16 & 14 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 21 & 17 \\ 22 & 15 \end{bmatrix}$, respectivamente, temos:

$$A + B = \begin{bmatrix} 16 & 14 \\ 13 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & 17 \\ 22 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 + 21 & 14 + 17 \\ 13 + 22 & 11 + 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 31 \\ 35 & 26 \end{bmatrix}$$

Dadas as matrizes $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ e $B = \left(b_{ij}\right)_{m \times n}$, a soma de A com B é a matriz $C = \left(c_{ij}\right)_{m \times n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i e j.

Em outras palavras, a soma de duas matrizes A e B de ordem $m \times n$ é uma matriz C de mesma ordem, em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

Exemplos

- Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -9 & 7 & 6 \end{bmatrix}$, temos:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -9 & 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+6 & 5+(-2) & 6+1 \\ 1+(-9) & 0+7 & -4+6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 3 & 7 \\ -8 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

- Dadas as matrizes $C = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & -4 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$, temos:

$$C + D = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & -4 \\ -9 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+(-5) & -3+3 \\ -1+1 & 4+(-4) \\ 9+(-9) & 6+(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nesse exemplo, como $C + D$ resulta em uma matriz nula, dizemos que D é a matriz oposta de C e vice-versa.

> Dada a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$, denomina-se a matriz oposta de A, indicada por $-A$, a matriz que adicionada com A resulta em uma matriz nula, $A + (-A) = 0$.

Observe que a matriz oposta $-A$ é obtida trocando os sinais de todos os elementos de A.

Qual é a relação entre os elementos correspondes das matrizes opostas?

Considerando as matrizes A, B e C de mesma ordem $(m \times n)$, são válidas, porém não demonstraremos, as seguintes propriedades:

a) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativa)

b) $A + B = B + A$ (comutativa)

c) $A + 0 = 0 + A = A$, sendo 0 a matriz nula de ordem $(m \times n)$ (elemento neutro)

d) $A + (-A) = (-A) + A = 0$, sendo 0 a matriz nula de ordem $(m \times n)$ (elemento oposto ou simétrico)

e) $(A + B)^t = A^t + B^t$

Subtração de matrizes

> Dadas as matrizes $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ e $B = \left(b_{ij}\right)_{m \times n}$, a diferença entre A e B é a matriz $C = \left(c_{ij}\right)_{m \times n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ para todo i e j.

Em outras palavras, a diferença entre duas matrizes A e B de ordem $m \times n$ é uma matriz C de mesma ordem, que pode ser obtida adicionando-se a matriz A com a oposta da matriz B.

Exemplos

- Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 11 & 0 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, temos:

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 11 & 0 \\ 6 & -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-5 & -2-(-5) \\ 11-1 & 0-4 \\ 6-2 & -9-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 10 & -4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

ou

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 11 & 0 \\ 6 & -9 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -1 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}_{-B} = \begin{bmatrix} 5+(-5) & -2+5 \\ 11+(-1) & 0+(-4) \\ 6+(-2) & -9+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 10 & -4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

- Dadas as matrizes $C = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, temos:

$$C - D = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-1 & -3-(-4) \\ 0-7 & 12-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

ou

$$C - D = C + (-D) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}}_{-D} = \begin{bmatrix} 6+(-1) & -3+4 \\ 0+(-7) & 12+(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Dado um número real k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, o produto $k \cdot A$ é uma matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ para todo i e j.

Em outras palavras, o produto de um número real k por uma matriz A de ordem $m \times n$ é uma matriz B de mesma ordem que A, no qual cada elemento é o produto de seu correspondente em A pelo número real k.

Considerando as matrizes A e B de mesma ordem $(m \times n)$ e os números reais k e ℓ, são válidas, porém não demonstraremos, as seguintes propriedades:

a) $k \cdot (\ell \cdot A) = (k \cdot \ell) \cdot A$ (associativa)

b) $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$ (distributiva da multiplicação em relação à adição)

c) $(k + \ell) \cdot A = k \cdot A + \ell \cdot A$ (distributiva da multiplicação em relação à adição)

d) $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$

e) $1 \cdot A = A$

Exemplos

- Dada a constante real 2 e a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 7 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, temos:

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 7 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 6 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 7 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-3) & 2 \cdot (-4) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 12 & 0 \\ 14 & 2 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

- Dada a constante real $-\dfrac{1}{3}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 9 \end{bmatrix}$, temos:

$$-\frac{1}{3} \cdot B = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \cdot 3 & -\frac{1}{3} \cdot (-4) & -\frac{1}{3} \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{4}{3} & -3 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

Em uma lanchonete, os sucos são comercializados em copos de 300 mL ou de 500 mL. Observe a quantidade e os valores dos três sucos mais vendidos em certo dia.

Quantidade de sucos vendidos

Sabor \ Copo	300mL	500mL
Uva	13	8
Maracujá	12	15
Laranja	8	10

Valor do copo de suco

Copo	Valor (R$)
300mL	4,00
500mL	6,00

Alexandre Koyama/ASC Imagens

Qual foi o valor arrecadado por essa lanchonete com a venda de cada tipo de suco nesse dia?

Para responder a essa pergunta, multiplicamos cada quantidade vendida pelo seu respectivo valor e, em seguida, adicionamos os valores correspondentes aos sucos de mesmo sabor.

- Sabor uva:

$13 \cdot 4 + 8 \cdot 6 = 100$

- Sabor maracujá:

$12 \cdot 4 + 15 \cdot 6 = 138$

- Sabor laranja:

$8 \cdot 4 + 10 \cdot 6 = 92$

Valor arrecadado

Sabor	Valor (R$)
Uva	100,00
Maracujá	138,00
Laranja	92,00

A multiplicação de matrizes ocorre de maneira semelhante. Representando a quantidade de sucos vendidos e o valor do copo de suco por meio das matrizes $A = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 12 & 15 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, respectivamente, temos:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 12 & 15 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \cdot 4 + 8 \cdot 6 \\ 12 \cdot 4 + 15 \cdot 6 \\ 8 \cdot 4 + 10 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 138 \\ 92 \end{bmatrix}$$

Dadas as matrizes $A = \left(a_{ik}\right)_{m \times n}$ e $B = \left(b_{kj}\right)_{m \times p}$, o produto de A por B é a matriz $C = \left(c_{ij}\right)_{m \times p}$, tal que $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Em outras palavras, o produto entre duas matrizes A e B de ordens $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente, é uma matriz C de ordem $m \times p$, na qual cada elemento é obtido pela adição das parcelas correspondentes aos produtos dos elementos das linhas da matriz A pelos elementos das colunas da matriz B, ordenadamente.

De acordo com a definição, o produto entre duas matrizes A e B só é possível quando a quantidade de colunas da matriz A for igual à quantidade de linhas da matriz B. A matriz C obtida possui a mesma quantidade de linhas da matriz A e a mesma quantidade de colunas da matriz B.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Exemplos

- Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, temos:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 4 & 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 & 1 \cdot 5 + (-3) \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

- Dadas as matrizes $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, temos:

$$C \cdot D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-3) & (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}$$

- Dadas as matrizes $E = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 16 \\ 9 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 13 & -9 \end{bmatrix}$, não é possível calcular $E \cdot F$, pois a quantidade de colunas da matriz E (3 colunas) é diferente da quantidade de linhas da matriz F (1 linha).

Para a multiplicação de matrizes são válidas, porém não demonstraremos, as seguintes propriedades:

a) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, para quaisquer matrizes $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$, $B = \left(b_{jk}\right)_{n \times p}$ e $C = \left(c_{k\ell}\right)_{p \times q}$ (associativa em relação à multiplicação);

b) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, para quaisquer matrizes $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ e $C = \left(c_{jk}\right)_{n\times p}$ (distributiva da multiplicação à direita, em relação à adição);

c) $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$, para quaisquer matrizes $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ e $C = \left(c_{ki}\right)_{p\times m}$ (distributiva da multiplicação à esquerda, em relação à adição);

d) $(k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B) = k \cdot (A \cdot B)$, para quaisquer matrizes $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e $B = \left(b_{jk}\right)_{n\times p}$ e $k \in \mathbb{R}$;

e) $(A \cdot B)^t = (B)^t \cdot (A)^t$, para quaisquer matrizes $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e $B = \left(b_{jk}\right)_{n\times p}$.

Existem diferenças fundamentais entre o produto de números reais e o produto de matrizes.

- O produto entre dois números reais está definido para todos os reais, enquanto o produto entre duas matrizes A e B não está definido para qualquer matriz A e B, pois $A \cdot B$ só é possível quando a quantidade de colunas de A é igual ao número de linhas de B.
- O produto entre dois números reais é comutativo, enquanto o produto entre duas matrizes A e B não é comutativo, pois, mesmo que $A \cdot B$ e $B \cdot A$ estejam definidas e tenham a mesma ordem, não se tem necessariamente $A \cdot B = B \cdot A$. Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, então:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

  logo, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

- O produto entre dois números reais não nulos é um número real não nulo, enquanto o produto entre duas matrizes A e B não nulas pode ser uma matriz nula, ou seja, de $A \neq 0$ e $B \neq 0$ não se infere que $A \cdot B \neq 0$.

  Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, então:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 2 & (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  logo, $A \neq 0$, $B \neq 0$ e $A \cdot B = 0$.

- Todo número real a diferente de zero possui inverso multiplicativo a^{-1}. Nesse caso, $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Mas não é para todas as matrizes quadradas A não nulas de ordem n que existe uma matriz quadrada B de ordem n, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Quando essa matriz B existe, a matriz A é dita invertível e B é nomeada de matriz inversa de A. Assim, escrevemos $B = A^{-1}$, conforme veremos no próximo tópico.

A matriz identidade (I_n) é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, ou seja, $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$ para toda matriz quadrada A de ordem n.

Matriz inversa

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, dizemos que A é uma matriz invertível ou inversível se existir uma matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Indicamos a inversa da matriz A por A^{-1}. Quando a matriz quadrada A não é invertível, A é uma matriz singular.

Se A é uma matriz invertível, então a matriz A^{-1}, tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, é única. De fato, seja A uma matriz invertível, sabendo que existe uma matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Suponha ainda que exista uma matriz quadrada C tal que $A \cdot C = C \cdot A = I_n$. Então $C = I_n \cdot C = (B \cdot A) \cdot C = B \cdot (A \cdot C) = B \cdot I_n = B$.

Exemplo

- Dada a matriz invertível $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, sua inversa é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, pois:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{A \cdot A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \text{ e } \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A^{-1} \cdot A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Matrizes associadas ao sistema linear

Todo sistema de equações lineares pode ser associado a uma **equação matricial**, isto é, a equações cuja incógnita é uma matriz.

Por exemplo, ao sistema de equações lineares $\begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ 3x + y = -8 \end{cases}$, podemos associar uma equação matricial do tipo $A \cdot X = B$, em que:

- A é a matriz dos coeficientes, isto é, $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$;
- X é a matriz das incógnitas, isto é, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$;
- B é a matriz dos termos independentes, isto é, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix}$.

Escrevendo a equação matricial, temos $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix}$.

Podemos verificar a veracidade dessa correspondência efetuando, inicialmente, a multiplicação entre a matriz dos coeficientes e a matriz das incógnitas:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \cdot x - 2 \cdot y \\ 3 \cdot x + 1 \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Utilizando a ideia de igualdade de matrizes, concluímos que:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ 3x + y = -8 \end{cases}$$

Dado um sistema com m equações lineares e n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

podemos associar a ele a equação matricial:

$$A_{m \times n} \cdot X_{n \times 1} = B_{m \times 1} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemplos

- Dado o sistema linear $\begin{cases} 2x - 4y - 3z = 9 \\ y + 7z = -6 \end{cases}$, temos a equação matricial $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix}$ associada a ele.

- Dada a equação matricial $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$, temos o sistema linear $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x + 2z = -5 \\ 4x + y = 9 \end{cases}$ associado a ela.

Portanto, para resolver uma equação matricial podemos associá-la a um sistema linear e resolvê-lo de acordo com os procedimentos apresentados no capítulo anterior.

Atividades resolvidas

R9. Efetue as expressões matriciais.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} + (-5) \cdot \begin{bmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - (-1) \cdot \begin{bmatrix} 6 & -12 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Resolução

a) Em expressões matriciais, efetuamos a adição e depois a subtração na ordem em que aparecem da esquerda para a direita, como em expressões numéricas.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0 & 5+(-2) \\ -1+1 & 2+4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3-1 & 3-1 \\ 0-0 & 6-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

b) De modo semelhante às expressões numéricas, primeiro, efetuaremos as multiplicações e, em seguida, as adições e subtrações na ordem em que aparecem.

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} + (-5) \cdot \begin{bmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - (-1) \cdot \begin{bmatrix} 6 & -12 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 6 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} (-5) \cdot 3 & (-5) \cdot (-6) & (-5) \cdot (-2) \\ (-5) \cdot 0 & (-5) \cdot 1 & (-5) \cdot 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (-1) \cdot 6 & (-1) \cdot (-12) & (-1) \cdot 5 \\ (-1) \cdot 0 & (-1) \cdot 3 & (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 12 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & 30 & 10 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 12 & -5 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-15) & -2+30 & 4+10 \\ 12+0 & 0+(-5) & 4+0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 12 & -5 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 28 & 14 \\ 12 & -5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 12 & -5 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -13-(-6) & 28-12 & 14-(-5) \\ 12-0 & -5-(-3) & 4-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 16 & 19 \\ 12 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

c) Como em expressões numéricas, neste caso efetuaremos primeiro as multiplicações e depois as adições.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \\ 7 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 2 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 1 & 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 0 \\ 10 \cdot 0 + 11 \cdot 0 + 12 \cdot 2 & 10 \cdot 2 + 11 \cdot 1 + 12 \cdot 1 & 10 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 7 & 5 \\ 18 & 31 & 23 \\ 24 & 43 & 32 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-0 & 7-4 & 5-2 \\ 18-0 & 31-2 & 23-4 \\ 24-4 & 43-2 & 32-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 18 & 29 & 19 \\ 20 & 41 & 32 \end{bmatrix}$$

R10. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 3 \end{bmatrix}$, determine, se possível, as matrizes $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Resolução

Calculando $A \cdot B$, temos:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 9 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + (-5) \cdot 8 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + (-5) \cdot 3 \\ 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 9 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 8 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \\ 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 7 \cdot 9 & 3 \cdot 0 + 5 \cdot 5 + 8 \cdot 1 + 7 \cdot 8 & 3 \cdot 1 + 5 \cdot 6 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -45 & -27 & 3 \\ -13 & -7 & 1 \\ 57 & 89 & 70 \end{bmatrix}$$

Para calcular $B \cdot A$, a quantidade de colunas da matriz B deveria ser igual à quantidade de linhas da matriz A, o que não ocorre. Assim, o produto $B \cdot A$ não está definido.

R11. Calcule a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, caso exista.

Resolução

Considere a matriz A^{-1} de ordem 2×2 e tal que $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. Pela definição de matriz inversa, se ela existir, temos de determinar os elementos x, y, z e w, tais que:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo a primeira igualdade, temos $\begin{bmatrix} x - 2z & y - 2w \\ 2x + 3z & 2y + 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Assim, pela igualdade de matrizes, devemos resolver o sistema linear $\begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - 2w = 0 \\ 2x + 3z = 0 \\ 2y + 3w = 1 \end{cases}$.

Neste caso, podemos separá-lo em dois novos sistemas, pois das quatro equações do sistema inicial, cada par de equações dadas nos novos sistemas dependem apenas das mesmas duas incógnitas.

I) $\begin{cases} x - 2z = 1 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$

II) $\begin{cases} y - 2w = 0 \\ 2y + 3w = 1 \end{cases}$

Atividades resolvidas

Resolvendo os sistemas, temos:

I) $\begin{cases} x - 2z = 1 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$

Na primeira equação, temos $x = 1 + 2z$, assim, podemos substituir o valor de x na segunda equação:

$$2(1 + 2z) + 3z = 0 \Rightarrow 2 + 4z + 3z = 0 \Rightarrow 7z = -2 \Rightarrow z = -\frac{2}{7}$$

Assim:

$$x = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}.$$

II) $\begin{cases} y - 2w = 0 \\ 2y + 3w = 1 \end{cases}$

Temos $y = 2w$. Assim, podemos substituir o valor de y na segunda equação:

$$2 \cdot 2w + 3w = 1 \Rightarrow 7w = 1 \Rightarrow w = \frac{1}{7}$$

Assim:

$$y = 2w = \frac{2}{7}.$$

Desta maneira, a solução do sistema inicial é $\left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right)$.

Logo, a matriz inversa de A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

Podemos verificar se essa matriz é de fato a inversa de A calculando o produto a seguir.

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \cdot 1 + \frac{2}{7} \cdot 2 & \frac{3}{7} \cdot (-2) + \frac{2}{7} \cdot 3 \\ \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot 1 + \frac{1}{7} \cdot 2 & \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot (-2) + \frac{1}{7} \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, A é invertível e sua inversa é $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

Atividades

16. Calcule no caderno.

a) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & \frac{1}{2} & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 5 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \\ 6 & -12 \\ 2 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 7 \\ 6 & -10 \\ 8 & 5 \\ -14 & 5 \end{bmatrix}$

17. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ \sqrt{2} & 8 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -5 \\ 20 & 12 \\ -9 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, determine no caderno:

a) $4 \cdot A$

b) $\frac{1}{2} \cdot B$

c) $-3 \cdot C$

18. Considere as matrizes $A = \left(a_{ij}\right)_{10\times 8}$, em que $a_{ij} = i + j$ e $B = \left(b_{ij}\right)_{10\times 8}$, sendo $b_{ij} = i - j$. Sabendo que $C = A + B$, com $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, calcule:

a) c_{15}

b) c_{105}

19. Efetue, se possível, as multiplicações. Justifique os casos não possíveis.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & 12 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$

20. Uma concessionária de veículos oferece três modelos de automóveis, que podem ser escolhidos dentre quatro versões. Esta concessionária lançou uma promoção em que os preços de todos os veículos terão desconto de 20% para pagamento à vista. Observe no quadro o preço, em reais, de cada modelo de automóvel de acordo com as suas versões.

	Modelo A	Modelo B	Modelo C
Básico	35 000,00	38 500,00	42 000,00
Intermediário	38 000,00	41 000,00	45 000,00
Completo	41 000,00	43 500,00	48 000,00
Luxo	44 000,00	46 000,00	51 000,00

O gerente da concessionária construiu uma matriz com os valores numéricos do quadro. Para obter uma matriz que informe o preço de cada veículo no pagamento à vista ele poderá multiplicar esta matriz por:

a) $\begin{bmatrix} \frac{80}{100} & \frac{80}{100} & \frac{80}{100} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{20}{100} \\ \frac{20}{100} \\ \frac{20}{100} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}20 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0{,}80 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}80 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}80 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0{,}80 & 0{,}80 & 0{,}80 \\ 0{,}80 & 0{,}80 & 0{,}80 \\ 0{,}80 & 0{,}80 & 0{,}80 \end{bmatrix}$

21. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 8 & 5 & 12 \\ 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 8 & 5 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 8 & 5 \end{bmatrix}$. Determine no caderno, quando possível, o que se pede nos itens a seguir.

a) $A + B - 2 \cdot A$

b) $2 \cdot A + A \cdot B$

c) $A + B + C$

22. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \cos x & 1 \\ \operatorname{sen} x & 0 \end{bmatrix}$, determine no caderno para quais valores de $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ temos $A \cdot B = I_2$.

23. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Definimos $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ vezes}}$, com $k \in \mathbb{N}$.
Por exemplo, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

Diante disso, calcule no caderno, para $A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{16} \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$:

a) A^2

b) $(2 \cdot A)^2$

c) A^3

24. Sabendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, determine no caderno $S = A^2 + A^3 + \ldots + A^{10}$.

25. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \sqrt{16} & \frac{1}{2} \\ 2 & 1{,}5 \end{bmatrix}$. Calcule no caderno:

a) $A \cdot B$

b) $B \cdot A$

c) $(A \cdot B)^{-1}$

d) $A + B$

e) $A - B$

f) $B - A$

g) A^t

h) $\left(A^t\right)^{-1}$

26. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$. Verifique se B é a matriz inversa de A. Justifique no caderno.

27. Dada a matriz invertível $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, determine no caderno a soma dos elementos da terceira linha da matriz A^{-1}.

28. Para cada item a seguir, escreva no caderno uma equação matricial correspondente ao sistema linear apresentado.

a) $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2 \\ -x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 \\ 5x_1 - 9x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x + 2y + w = 0 \\ 4y - 2z + 5w = -6 \\ 2x + 6z = 9 \end{cases}$

29. Considere a equação matricial $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \end{bmatrix}$ e seu sistema linear correspondente.

a) Quais são os coeficientes da incógnita z no sistema linear correspondente a essa equação matricial?

b) Escreva no caderno a equação desse sistema linear que possui a menor quantidade de coeficientes não nulos.

30. Resolva no caderno as equações matriciais a seguir.

a) $2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & \sqrt{16} & 3 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

31. (UEL-PR) Uma reserva florestal foi dividida em quadrantes de 1 m^2 de área cada um. Com o objetivo de saber quantas samambaias havia na reserva, o número delas foi contado por quadrante da seguinte forma:

número de samambaias por quadrante

$$A_{7\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

número de quadrantes

$$B_{7\times 1} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 7 \\ 16 \\ 14 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

O elemento a_{ij} da matriz A corresponde ao elemento b_{ij} da matriz B, por exemplo, 8 quadrantes contêm 0 (zero) samambaia, 12 quadrantes contêm 1 samambaia. Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a operação efetuada entre as matrizes A e B, que resulta no número total de samambaias existentes na reserva florestal.

a) $A^t \times B$

b) $B^t \times A^t$

c) $A \times B$

d) $A^t + B^t$

e) $A + B$

32. **Desafio** (UEL-PR) Uma das formas de se enviar uma mensagem secreta é por meio de códigos matemáticos, seguindo os passos:

1) Tanto o destinatário quanto o remetente possuem uma matriz chave C;

2) O destinatário recebe do remetente uma matriz P, tal que $MC = P$, em que M é a matriz mensagem a ser decodificada;

3) Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto: $1 = a, 2 = b, 3 = c, \ldots, 23 = z$;

4) Consideremos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras k, w e y;

5) O número zero corresponde ao ponto de exclamação;

6) A mensagem é lida, encontrando a matriz M, fazendo a correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue: $m_{11}\, m_{12}\, m_{13}\, m_{21}\, m_{22}\, m_{23}\, m_{31}\, m_{32}\, m_{33}$.

Considere as matrizes: $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{bmatrix}$.

Com base nos conhecimentos e nas informações descritas, assinale a alternativa que apresenta a mensagem que foi enviada por meio da matriz M.

a) Boasorte!

b) Boaprova!

c) Boatarde!

d) Ajudeme!

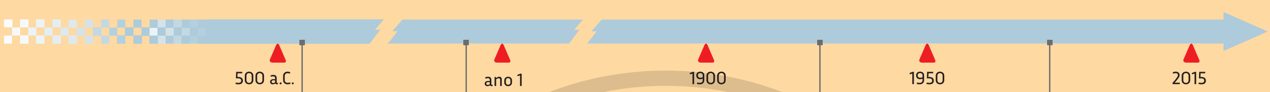
e) Socorro!

Criptografia

A palavra criptografia deriva das palavras em grego *kruptós* (oculto, secreto) e *graphía* (escrita), ou seja, escrita secreta. Historicamente, foi por causa de informações de caráter sigiloso, enviadas entre reis e generais durante as guerras, que nasceu a necessidade de técnicas para codificar mensagens. O intuito era o de proteger essas informações quando houvesse interceptação do inimigo, para que somente o destinatário, conhecendo a chave, conseguisse entendê-las.

Chave: conhecimento das convenções de um código secreto que permite decodificar mensagens.

Se pudéssemos contar com a honestidade de todas as pessoas, o sigilo e a segurança das informações não seriam necessários. Contudo, nos dias atuais, essa codificação tornou-se indispensável, devido aos avanços da tecnologia e da comunicação, pois, a ciência do sigilo é usada na segurança das informações trocadas como, por exemplo, na maior rede de comunicação existente: a internet.



E. Bellusci/ASC Imagens

Escrita secreta
Por volta de **480 a.C.** Heródoto raspou cera de tabuletas, escreveu uma mensagem e cobriu novamente com cera, assim avisou os gregos sobre os planos de seu inimigo Xerxes.

O código de César
Usado por Júlio César (**100-44 a.C.**), é um código simples que consiste em substituir letras por outras. Uma das maneiras é substituir cada letra pela seguinte do alfabeto.
Exemplo:
CESAR é DFTBS

Cifras de hill
Esse código foi inventado em **1929** e usa uma matriz para codificar e sua inversa para decodificar as mensagens.

Cifra RSA
Criada em **1977**, esse é um dos métodos mais conhecidos de criptografia para a internet. Sua principal característica é ser fácil de criptografar e difícil de decifrar. É baseado em números que são produto de números primos muito grandes.

Ao fazer uma compra com o cartão de crédito pela internet, os dados informados pelo cliente são criptografados. Assim, se alguma pessoa mal-intencionada interceptar essa informação não conseguirá entendê-la. Somente a loja terá a chave para decifrá-la.

Maxx-Studio/ Shutterstock.com/ ID/BR

A Em sua opinião, qual a importância da criptografia nas compras pela internet?

B Além da internet, que outras aplicações podemos identificar no dia a dia para a criptografia?

C Escreva uma frase usando o código de César. Depois, troque-a com um colega para que ele decifre sua mensagem e você decifre a dele.

D Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ um codificador de mensagens e sua chave, a matriz A^{-1}. Determine esta chave.

Determinantes

6 capítulo

Determinante de uma matriz

O determinante de uma matriz quadrada é um número real associado a ela. Sendo A uma matriz quadrada, indicamos o determinante de A por $\det A$. Embora exista uma definição geral de determinante de uma matriz quadrada de ordem qualquer, iremos apresentar, a seguir, como podemos definir o determinante de matrizes de ordem 1, 2 e 3.

Determinante de uma matriz de ordem 1

Dada uma matriz quadrada A de ordem 1, $A = [a_{11}]$, seu determinante corresponde ao único elemento, isto é, $\det A = a_{11}$.

Também podemos indicar o determinante de uma matriz A inserindo uma barra vertical de cada lado de seus elementos, neste caso $|a_{11}| = a_{11}$.

Observe que a notação $|a_{11}|$ é idêntica à notação utilizada para indicar o módulo ou valor absoluto de um número qualquer, mas, neste caso, representa um objeto matemático diferente.

Exemplos

- Se $A = [6]$, então $\det A = |6| = 6$.
- Se $B = [-7]$, então $\det B = |-7| = -7$.

Determinante de uma matriz de ordem 2

Dada uma matriz quadrada A de ordem 2, tal que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, seu determinante corresponde à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, isto é:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Exemplos

- Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$, então $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - (-3) \cdot 4 = -10 + 12 = 2$.
- Se $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, então $\det B = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 8 - 2 \cdot 7 = 4 - 14 = -10$.

Determinante de uma matriz de ordem 3

Dada uma matriz quadrada A de ordem 3, tal que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, seu determinante pode ser obtido por meio do seguinte cálculo:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Podemos obter esses seis produtos utilizando um dispositivo prático chamado **regra de Sarrus**. Para isso, procedemos da seguinte maneira:

- repetimos as duas primeiras colunas do lado direito da matriz;
- calculamos os produtos conforme indicado, conservando o sinal dos produtos obtidos no sentido da diagonal principal e invertendo o sinal dos produtos obtidos no sentido da diagonal secundária.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -\left(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}\right) & \qquad & \left(a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}\right) \\ -\left(a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}\right) & \qquad & \left(a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}\right) \\ -\left(a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}\right) & \qquad & \left(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}\right) \end{matrix}$$

Adicionando esses produtos, obtemos o determinante da matriz.

Exemplo

- Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, temos:

$$\left|\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{matrix}$$

$$-6 \quad -(-16) \quad -15 \qquad\qquad 10 \quad 8 \quad -18$$

$$\det A = 10 + 8 - 18 - 6 - (-16) - 15 = -5$$

Propriedades dos determinantes

Algumas propriedades dos determinantes nos permitem simplificar certos cálculos. Essas propriedades podem ser demonstradas, mas não faremos isso nesta coleção, vamos apenas expor a seguir.

- Matriz transposta

  O determinante de uma matriz quadrada A e o de sua transposta A^t são iguais, isto é, $\det A = \det A^t$.

Exemplo

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ e sua transposta $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$, temos:

$$\det A = 0 - 16 - 6 - 2 - 0 + 30 = 6 \text{ e } \det A^t = 0 - 6 - 16 - 2 - 0 + 30 = 6$$

Este exemplo ilustra que $\det A = \det A^t$.

- Linha ou coluna nula

Se todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz quadrada B forem nulos, então $\det B = 0$.

Exemplo

Se $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & -12 \end{bmatrix}$, então $\det B = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$.

- Troca de linha ou coluna

Se uma matriz quadrada B for obtida de uma matriz quadrada A, de ordem $n \geqslant 2$, trocando a ordem de duas linhas ou duas colunas, então $\det B = -\det A$.

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, então $\det A = -2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 = -17$.

Trocando as linhas de posição, obtemos a matriz $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Assim:

$$\det B = 5 \cdot 1 - 6 \cdot (-2) = 17$$

Logo, $\det B = -\det A$.

- Teorema de Binet

O determinante do produto de duas matrizes A e B, de mesma ordem, é igual ao produto dos determinantes dessas matrizes, isto é, $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Exemplo

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, temos:

$$\det(A) = (-4)(-7) - 8 \cdot 3 = 4 \qquad \text{e} \qquad \det(B) = 5 \cdot 0 - (-3) \cdot 1 = 3$$

Desse modo, $\det(A) \cdot \det(B) = 4 \cdot 3 = 12$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4) \cdot 5 + 8 \cdot 1 & (-4) \cdot (-3) + 8 \cdot 0 \\ 3 \cdot 5 + (-7) \cdot 1 & 3 \cdot (-3) + (-7) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 12 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\det(A \cdot B) = (-12)(-9) - 12 \cdot 8 = 12$$

Logo, $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

- Teorema de Jacobi

Se uma matriz quadrada B de ordem $n \geqslant 2$, for obtida de uma matriz quadrada A de mesma ordem, substituindo uma de suas linhas ou colunas pela soma desta com um múltiplo de outra linha ou coluna, respectivamente, então o determinante não se altera, isto é, $\det B = \det A$.

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, então $\det A = -6 + 14 + 0 - 0 - 8 - 5 = -5$.

Trocando a 2ª linha pela soma desta com a 1ª linha multiplicada por 2, obtemos a matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Assim:

$$\det B = -10 + 14 + 0 - 0 - 8 - 1 = -5$$

Portanto, $\det B = \det A$.

- Matriz triangular

O determinante de uma matriz triangular corresponde ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 4 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, então $\det A = -24 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = -24$, ou seja,

$\det A = \underbrace{3 \cdot 2 \cdot (-4)}_{\text{elementos da diagonal principal}} = -24$.

Atividades resolvidas

R1. Dada a equação abaixo, determine o valor de x.

$$\begin{vmatrix} x & 0 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 10$$

Resolução

Considere $A = \begin{bmatrix} x & 0 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & 2 & x \end{bmatrix}$. Utilizando a regra de Sarrus, temos:

$$\begin{array}{|ccc|cc} x & 0 & -\frac{5}{2} & x & 0 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 2 & 2 & x & 2 & 2 \end{array}$$

$$-5 \quad 3x \quad 0 \quad x^2 \quad 0 \quad -5$$

$$\det A = x^2 + 0 - 5 - (-5) - 3x - 0$$
$$= x^2 - 5 + 5 - 3x = x^2 - 3x$$

Substituindo a expressão encontrada para o $\det A$ na equação inicial, obtemos:

$$x^2 - 3x = 10 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

Utilizando a fórmula resolutiva da equação do 2º grau, temos:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Assim, $x = -2$ ou $x = 5$.

R2. Sabendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$, determine

$$|B| = \begin{vmatrix} a + 2d & b + 2e & c + 2f \\ d & e & f \\ g & b & i \end{vmatrix}$$

Resolução

Observe que a 1ª linha de B resulta da soma da 1ª linha de A com o dobro da 2ª linha de A. Assim, pelo teorema de Jacobi concluímos que:

$$|B| = \begin{vmatrix} a + 2d & b + 2e & c + 2f \\ d & e & f \\ g & b & i \end{vmatrix} = -2$$

R3. Considerando $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 23 & 100 \\ 6 & 12 & 15 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 23 & 12 \\ 5 & 100 & 15 \end{bmatrix}$, calcule $\det(A \cdot B)$.

Resolução

Para calcular $\det A$, trocamos a 3ª linha por sua soma com a 1ª linha multiplicada por -3, obtendo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 23 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, $\det A = 0$. Pelo teorema de Binet, concluímos que $\det(A \cdot B) = 0$.

Atividades

1. Calcule o determinante de cada matriz a seguir.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 5 & \log_2 16 \\ \log_2 256 & -2 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} x & 2x \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} a + b & b \\ a & b \end{bmatrix}$

2. Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 2x - 1 & x + 1 \end{bmatrix}$, calcule no caderno os possíveis valores de x para que $\det A = 27$.

3. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, calcule no caderno:

a) $\det A$ b) $\det B$ c) $\det A^t$ d) $\det C^t$

4. Nos itens a seguir, calcule no caderno os determinantes das matrizes.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 10 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

5. Calcule no caderno o valor de x para que o determinante da matriz $K = \begin{bmatrix} x + 1 & 2 & -3 \\ x & x & 1 \\ 4 & x - 1 & 5 \end{bmatrix}$ seja igual a -12.

6. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3x \\ -2 & 1 & x \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & -x & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. Para qual valor de x temos:

a) $\det A = \det B$?

b) $\det A = 2 \det A$?

c) $\det A + \det B = 0$?

7. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & x+1 \end{bmatrix}$, obtenha o valor de x tal que $\det A = \det B$.

8. Se $\det M = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 20$ e $N = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ x & y & z \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$, então o det N é igual a:

a) 120

b) −120

c) 24

d) 20

e) −20

9. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2x & 2 \\ 0 & -x \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ z & y \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} x & -1 & 2 \\ 4 & y & 0 \\ -2 & -1 & z \end{bmatrix}$. Sabendo que $A = B^t$, $\det C$ é igual a:

a) 30

b) 38

c) −30

d) 20

e) −20

10. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3x & 4 \\ y & z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 4 & y-z \end{bmatrix}$. Se $A = B^t$, então $\det A^t$ é igual a:

a) 12

b) −12

c) 24

d) −24

e) 20

11. (Uece) Uma matriz quadrada $P = \left(a_{ij}\right)$ é simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$. Por exemplo, a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica.

Se a matriz $M = \begin{bmatrix} x+y & x-y & xy \\ 1 & y-x & 2y \\ 6 & x+1 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, pode-se afirmar corretamente que o determinante de M é igual a:

a) −1.

b) −2.

c) 1.

d) 2.

12. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \cos 60° & -\operatorname{sen} 60° \\ \operatorname{sen} 60° & \cos 60° \end{bmatrix}$ e classifique os itens abaixo em verdadeiro ou falso. Justifique no caderno os itens falsos.

a) $\det A = 1$

b) $\det(2A) = 3$

c) $\det\left(A + A^t\right) = \cos^2 60°$

d) $\det\left(A^2\right) = \det(A)$

e) $\det\left(A + A^t\right) = 2\det\left(I_2\right)$

13. Verifique se é sempre verdade que $\det(k \cdot A) = k^3 \cdot \det A$ para uma matriz A de ordem 3, com $k \in \mathbb{R}$. Justifique sua resposta no caderno.

Consequência do teorema de Binet

Vimos que, se uma matriz quadrada A de ordem n admite inversa A^{-1}, então a igualdade $A \cdot A^{-1} = I_n$ é válida e A^{-1} é única. Dessa igualdade, segue que:

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$\det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det I_n \longrightarrow \text{utilizando o teorema de Binet}$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det I_n \longrightarrow \text{utilizando a propriedade da matriz triangular}$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

O determinante de uma matriz identidade de ordem qualquer é igual ao produto dos elementos da diagonal principal, pois a matriz identidade é uma matriz triangular. Logo, $\det A \neq 0$ e $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Assim, se uma matriz quadrada A de ordem n é invertível, então $\det A \neq 0$ e $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$. Desse modo, não é preciso conhecer a matriz inversa de A para calcular seu determinante. A recíproca também é verdadeira e pode ser demonstrada, pois se o determinante de uma matriz quadrada A de ordem n for diferente de zero, então a matriz A é invertível.

Exemplos

- Se $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então $\det A = 5 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 2$.

  Como $\det A = 2 \neq 0$, a matriz A admite inversa e o seu determinante é:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{2}$$

- Se $B = \begin{bmatrix} -7 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, então $\det B = (-7) \cdot 0 \cdot 5 = 0$.

  Como $\det B = 0$, a matriz B não admite inversa.

- Se $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, então $\det D = -3 + 2 - 4 = -5$.

  Como $\det D = -5 \neq 0$, então a matriz D admite inversa e o seu determinante é:

$$\det D^{-1} = \frac{1}{\det D} = \frac{1}{(-5)} = -\frac{1}{5}$$

Cálculo do determinante utilizando escalonamento

O determinante de uma matriz quadrada A de ordem n pode ser obtido por meio do escalonamento de matrizes, também conhecido por triangularização de matrizes. Utilizando as propriedades estudadas, principalmente o teorema de Jacobi e a troca de linhas, obtemos uma matriz triangular com base na matriz A dada. Por fim, basta calcular o determinante pela propriedade da matriz triangular, isto é, obtendo o produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplos

a Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 4 & -5 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, vamos obter seu determinante por meio do escalonamento. Primeiro, utilizamos o teorema de Jacobi, isto é, substituímos a:

- 2ª linha por sua soma com a 1ª linha multiplicada por 2;
- 3ª linha por sua soma com a 1ª linha multiplicada por −1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 4 & -5 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Ao utilizarmos a notação A_1, estamos nos referindo ao nome de uma matriz. Assim, é possível evitar eventuais confusões com a notação dos elementos de uma matriz.

Dessa maneira, obtemos a matriz A_1, que possui o mesmo determinante da matriz A, isto é, $\det A = \det A_1$.

Em seguida, aplicando o teorema de Jacobi na matriz A_1, substituímos a 3ª linha por sua soma com a 2ª linha multiplicada por −4.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Desse modo, obtemos a matriz triangular A_2 por escalonamento da matriz A, logo $\det A = \det A_1 = \det A_2$. Para obter o determinante da matriz A_2 e consequentemente da matriz A, basta obter o produto dos elementos da diagonal principal. Assim:

$$\det A_2 = 2 \cdot 2 \cdot (-5) = -20$$

Portanto, $\det A = \det A_2 = -20$.

b Seja a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & -7 \\ -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizamos o teorema de Jacobi para substituir a:

- 2ª linha por sua soma com a 1ª linha multiplicada por -3;
- 3ª linha por sua soma com a 1ª linha multiplicada por 4.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & -7 \\ -4 & -5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -12 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos a matriz B_1, que possui o mesmo determinante da matriz B, isto é, $\det B = \det B_1$.

Em seguida, trocamos a ordem da 2ª e da 3ª linha na matriz B_1.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Desse modo, obtemos a matriz triangular B_2 por escalonamento de B, porém, ao utilizarmos a propriedade de trocas de linhas, obtemos $\det B = -\det B_2$. Assim:

$$\det B_2 = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$$

Portanto, $\det B = -\det B_2 = -6$.

No escalonamento, utilizamos operações equivalentes tanto para calcular o determinante de uma matriz quadrada como para resolver um sistema de equações lineares visto em capítulos anteriores. A troca de ordem de linhas de uma matriz é equivalente à troca de ordem de equações de um sistema linear, e a aplicação do teorema de Jacobi em uma matriz é equivalente a substituir uma equação do sistema linear por sua soma com um múltiplo de outra equação do mesmo sistema.

> Por meio do escalonamento, é possível obter o determinante de uma matriz quadrada de ordem qualquer.

Atividades resolvidas

R4. Calcule o valor de $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -9 & \frac{1}{7} \\ -6 & 12 & 1 \end{vmatrix}$.

Resolução

Considere $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -9 & \frac{1}{7} \\ -6 & 12 & 1 \end{bmatrix}$. Utilizaremos o método do escalonamento para determinar $\det A$. Assim, substituímos a:

- 2ª linha por sua soma com a 1ª linha multiplicado por 2.
- 3ª linha por sua soma com a 1ª linha multiplicado por -3.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -9 & \frac{1}{7} \\ -6 & 12 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desse modo, obtemos a matriz A_1 por escalonamento de A, isto é, $\det A = \det A_1$. Assim:

$$\det A_1 = (-2) \cdot (-1) \cdot 1 = 2$$

Portanto, $\det A = 2$.

Atividades resolvidas

R5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Verifique se A é invertível;

b) Se A admite inversa calcule:

- $\det A^{-1}$
- $\det \left(A^{-1}\right)^{-1}$

Resolução

a) Para que A seja invertível é necessário que $\det A \neq 0$. Utilizaremos o método do escalonamento para determinar $\det A$. Assim, trocamos a ordem da 2ª linha e da 3ª linha.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Desse modo, obtemos a matriz A_1 por escalonamento de A, porém, como utilizamos a propriedade de troca de linhas temos $\det A = -\det A_1$. Assim:

$$\det A_1 = 5 \cdot (-3) \cdot (-12) = 180$$

Logo, $\det A = -\det A_1 = -180$. Como $\det A \neq 0$, A é invertível.

b) Por consequência do teorema de Binet, temos $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ e $\det \left(A^{-1}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\det A^{-1}}$.

- Como $\det A = -180$, segue que:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \Rightarrow \det A^{-1} = -\frac{1}{180}$$

- Sabendo que $\det A^{-1} = -\dfrac{1}{180}$, segue que:

$$\det \left(A^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{\det A^{-1}} \Rightarrow \det \left(A^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{180}} = -180$$

Atividades

14. Calcule no caderno o determinante das matrizes a seguir.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

15. Calcule no caderno o determinante da inversa de cada matriz invertível a seguir.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

16. Calcule no caderno o $\det\left(A^{-1} \cdot B^{-1}\right)$, dadas as matrizes invertíveis $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

17. Identifique qual das matrizes abaixo é a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

Escreva no caderno a estratégia que você utilizou para resolver essa atividade.

18. Sejam as matrizes quadradas A, B e C de mesma ordem, tais que $A^{-1} = BC$, $C = I_n$ e $\det A = 12$. Calcule no caderno o valor correspondente ao determinante da matriz B.

19. (UEG-GO) O determinante da matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 3^0 & 1 & \log_3 9 \\ \sqrt[3]{8} & 0 & 1 \\ 5 & -2 & \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \end{bmatrix}$ é:

a) 9 b) -9 c) $\frac{1}{9}$ d) $-\frac{1}{9}$

20. (UPF-RS) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ -\cos x & \operatorname{sen} x \end{bmatrix}$ e avalie as seguintes afirmações.

I) A matriz A é diagonal se, e somente se, $\operatorname{sen} x = \pm 1$.

II) O determinante da matriz A é um número maior do que 1.

III) A matriz A é simétrica se, e somente se, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

IV) A matriz A é invertível, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

É verdadeiro o que se afirma em:

a) I e II apenas.
b) II e III apenas.
c) II, III e IV apenas.
d) I, III e IV apenas.
e) I, II, III e IV.

21. Identifique quais das matrizes abaixo admitem inversa e, no caderno, determine-as.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

22. Mostre no caderno que:

$$\begin{vmatrix} x & x & x \\ x & y & y \\ x & y & z \end{vmatrix} = x(y - x)(z - y)$$

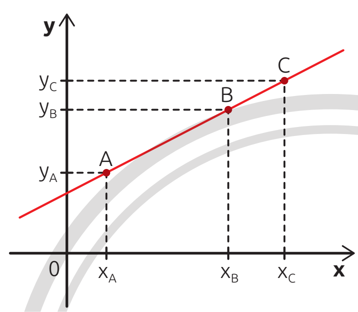
Determinantes e Geometria Analítica

As aplicações dos determinantes permeiam vários ramos da Matemática, entre eles a Geometria Analítica, que tem como uma das principais características relacionar Geometria com Álgebra. Veja algumas de suas aplicações.

Condição de alinhamento de três pontos

Quando é possível construir uma reta passando por três ou mais pontos distintos, dizemos que esses pontos estão alinhados, isto é, são colineares.

Utilizando as coordenadas de três pontos é possível verificar se eles são colineares. Considere os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ no plano cartesiano.



Sergio Lima/ID/BR

Pelo teorema de Tales, quando um feixe de retas paralelas é intersectado por duas retas transversais, a razão entre dois segmentos quaisquer sobre uma reta transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes sobre a outra reta transversal.

Se os pontos A, B e C são colineares, então pelo teorema de Tales temos:

- $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{x_B - x_A}{x_C - x_B}$
- $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{y_B - y_A}{y_C - y_B}$

Note que, nesse caso, consideramos dois pares de retas transversais, a reta destacada em vermelho com a reta correspondente ao eixo *Ox* e a reta destacada em vermelho com a reta correspondente ao eixo *Oy*.

Assim:

$$\frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B}$$

$$(x_B - x_A)(y_C - y_B) = (x_C - x_B)(y_B - y_A)$$

$$x_B y_C - \cancel{x_B y_B} - x_A y_C + x_A y_B = x_C y_B - x_C y_A - \cancel{x_B y_B} + x_B y_A$$

$$x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0$$

Essa expressão corresponde ao determinante de uma matriz quadrada de ordem 3, composta pelas coordenadas dos pontos A, B e C, tal que $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Se três pontos distintos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são colineares, então:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

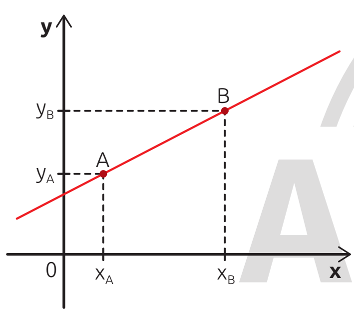
A recíproca também é verdadeira, isto é, se $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$, então os três pontos distintos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são colineares.

Ao aplicar o teorema de Tales nessa dedução, é necessário considerar $x_C \neq x_B$ e $y_C \neq y_B$. Porém, pode-se demonstrar que a condição é válida em qualquer caso, pois três pontos quaisquer $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são colineares se, e somente se, $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Equação da reta conhecendo dois de seus pontos

Você já deve ter estudado que dois pontos distintos determinam uma única reta.

Utilizando as coordenadas de dois pontos distintos, é possível obter a equação da reta determinada por esses pontos. Considere os pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ no plano cartesiano.



Sergio Lima/ID/BR

Supondo que em algum lugar da reta, determinada pelos pontos A e B, haja um ponto genérico $P(x, y)$, necessariamente os pontos A, B e P são colineares.

Logo, pela condição de alinhamento de três pontos, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo esse determinante, concluímos que:

$$xy_A + yx_B + x_Ay_B - x_By_A - xy_B - yx_A = 0$$

$$x(y_A - y_B) + y(x_B - x_A) + x_Ay_B - x_By_A = 0$$

Nesse determinante, as únicas variáveis são x e y. Os outros elementos (x_A, y_A, x_B, y_B) correspondem a números reais, pois são as coordenadas dos pontos A e B dados. Desse modo, podemos escrever $y_A - y_B = a$, $x_B - x_A = b$ e $x_A\,y_B - x_B\,y_A = c$. Assim:

$$x\overbrace{(y_A - y_B)}^{a} + y\overbrace{(x_B - x_A)}^{b} + \overbrace{x_Ay_B - x_B\,y_A}^{c} = 0$$

$$ax + by + c = 0$$

Além da equação da reta na forma geral, existem outros tipos de equações da reta, como a equação fundamental da reta e a equação da reta na forma reduzida, que serão apresentadas no volume 3 desta coleção.

Portanto, para qualquer reta no plano cartesiano, podemos escrever ao menos uma equação na forma $ax + by + c = 0$, com os coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo a e b não nulos simultaneamente. Essa é a equação da reta na forma geral.

Dados dois pontos distintos $A\left(x_A, y_A\right)$ e $B\left(x_B, y_B\right)$, a equação da reta determinada por esses pontos pode ser obtida por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ao considerar que A e B são pontos distintos, as diferenças $x_B - x_A$ e $y_B - y_A$ nunca são simultaneamente iguais a zero. Logo, na equação da reta $\underbrace{a}_{y_A - y_B} x + \underbrace{b}_{x_B - x_A} y + c = 0$, obtida no procedimento apresentado anteriormente, os coeficientes a e b nunca são simultaneamente nulos.

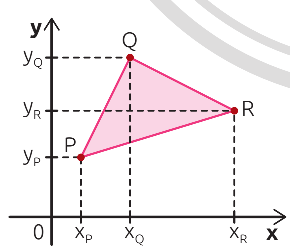
Área de um triângulo por meio de determinantes

Para calcular a área de um retângulo, multiplicamos a medida de sua base pela medida de sua altura, e para calcular a área de um triângulo, dividimos por dois o produto da medida de sua base pela medida de sua altura.

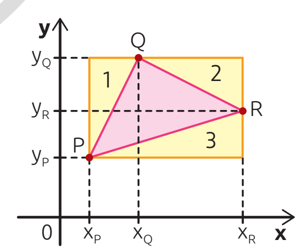
Toda linha poligonal fechada e simples é chamada polígono. Em Geometria, a palavra "polígono" pode ser utilizada tanto para indicar uma figura composta apenas por seus lados (contorno) como para indicar os lados mais a região interna a esse contorno. Quando falamos em determinar a área de um polígono (triângulo, quadrado, retângulo, entre outros), estamos considerando os seus lados e a sua região interna.

Com essas ideias, podemos calcular a área de um triângulo qualquer representado no plano cartesiano.

Considere os pontos distintos $P\left(x_P, y_P\right)$, $Q\left(x_Q, y_Q\right)$ e $R\left(x_R, y_R\right)$ no plano cartesiano, como sendo os vértices de um triângulo.



Em seguida, construímos o retângulo cujos lados são paralelos aos eixos ortogonais de modo que os três vértices do triângulo pertençam aos lados desse retângulo



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Podemos obter a área do triângulo de vértices P, Q e R subtraindo da área do retângulo as áreas dos triângulos nomeados por 1, 2 e 3.

Sejam:

$$A_{ret} = \overbrace{\left(x_R - x_P\right)\left(y_Q - y_P\right)}^{\text{área do retângulo}}$$

$$A_2 = \frac{\overbrace{\left(x_R - x_Q\right)\left(y_Q - y_R\right)}^{\text{área do triângulo 2}}}{2}$$

$$A_1 = \frac{\overbrace{\left(x_Q - x_P\right)\left(y_Q - y_P\right)}^{\text{área do triângulo 1}}}{2}$$

$$A_3 = \frac{\overbrace{\left(x_R - x_P\right)\left(y_R - y_P\right)}^{\text{área do triângulo 3}}}{2}$$

Assim, $A_{PQR} = A_{ret} - A_1 - A_2 - A_3$.

Desenvolvendo esses cálculos, a área do triângulo de vértices P, Q e R é dada por:

$$A_{PQR} = \frac{x_P y_Q + x_R y_P + x_Q y_R - x_R y_Q - x_P y_R - x_Q y_P}{2}$$

em que $x_P\, y_Q + x_R\, y_P + x_Q\, y_R - x_R\, y_Q - x_P\, y_R - x_Q\, y_P$ corresponde a $\begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix}$.

Dependendo da disposição dos pontos P, Q e R no plano cartesiano, esse determinante pode ser negativo, porém pode-se demonstrar que, em qualquer caso, a metade do valor absoluto desse número é sempre igual à área do triângulo. Assim, seguindo essas ideias, temos o teorema a seguir.

A área de um triângulo qualquer de vértices $P(x_P, y_P)$, $Q(x_Q, y_Q)$ e $R(x_R, y_R)$ é dada por:

$$A_{PQR} = \frac{1}{2}|D|\text{, em que } D \text{ é o determinante } \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix}$$

A indicação $|D|$ corresponde ao módulo do determinante. Lembre-se de que o módulo de um número real é sempre maior ou igual a zero.

Portanto, dados três pontos $P(x_P, y_P)$, $Q(x_Q, y_Q)$ e $R(x_R, y_R)$ em um plano cartesiano, se o determinante $\begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix} = k$, com $k \in \mathbb{R}$ tal que:

- $k \neq 0$, então o produto entre $\frac{1}{2}$ e o módulo de k $\left(\frac{1}{2}|k|\right)$ corresponde à área do triângulo de vértices P, Q e R;
- $k = 0$, então não existe o triângulo de vértices P, Q e R, isto é, os pontos P, Q e R são colineares, como vimos anteriormente.

Atividades resolvidas

R6. Determine se os pontos $A(1, 5)$, $B(-2, -1)$ e $C(3, 9)$ são colineares.

Resolução

Para que os pontos dados sejam colineares, é necessário que:

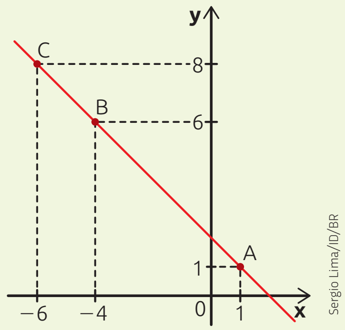
$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

De fato:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 15 - 18 + 3 - 9 + 10 = 28 - 28 = 0$$

Portanto, os pontos A, B e C são colineares.

R7. Determine uma equação para a reta representada no plano cartesiano abaixo.



Resolução

Como os pontos $A(1,1)$ e $B(-4,6)$ pertencentes à reta dada são colineares, podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo esse determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 4y + 6 + 4 - 6x - y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x - 5y + 10 = 0$$

Portanto, uma equação da reta é $x - 5y + 10 = 0$.

De modo semelhante, tomando os pontos $C(-6,8)$ e $B(-4,6)$, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -6 & 8 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x - 4y - 36 - (-32) - 6x + 6y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 2y - 4 = 0$$

Assim, outra equação da reta é $2x + 2y - 4 = 0$.

Ambas as equações determinadas representam a reta dada e são equivalentes à equação simplificada $x + y - 2 = 0$.

R8. Os pontos $A(1,3)$, $B(-4,0)$ e $C(2,7)$ são vértices de um triângulo?

Resolução

Os pontos $A(x_A, y_B)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ arbitrários serão vértices de um triângulo se:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Assim, para os pontos $A(1,3)$, $B(-4,0)$ e $C(2,7)$, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow 6 - 28 - 7 + 12 = -17$$

Portanto, os pontos dados são vértices de um triângulo.

R9. Em cada item, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo. Calcule a área dos triângulos formados por esses vértices.

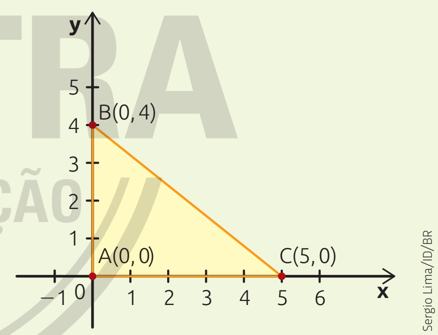
a) $A(0,0)$, $B(0,4)$ e $C(5,0)$

b) $A(-2,1)$, $B(1,6)$ e $C(4,2)$

Resolução

a) **1ª maneira**

Marcamos os pontos no sistema de coordenadas, ligando-os com segmentos para formar um triângulo.



O triângulo formado é retângulo no vértice A e seus catetos estão contidos nos eixos. Além disso, o comprimento do cateto $\overline{AC}$ é dado pelo módulo da diferença entre as abscissas dos pontos A e C, ou seja, $\overline{AC} = |0 - 5| = 5$. Do mesmo modo, calculando o módulo da diferença entre as ordenadas dos pontos A e B, obtemos o comprimento de $\overline{AB}$, ou seja, $\overline{AB} = |0 - 4| = 4$. Com essas medidas, calculamos a área de um triângulo:

$$A_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Portanto, a área desse triângulo é 10 u.a.

2ª maneira

Podemos calcular a área do triângulo por meio do determinante. Para isso, escrevemos, com os pontos A, B e C:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Em seguida, calculamos:

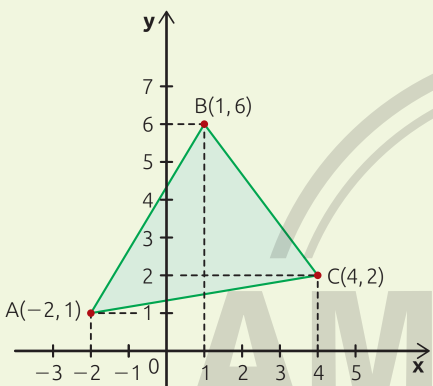
$$D = 0 + 0 + 0 - 20 - 0 - 0 = -20$$

Sendo assim:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\left|D\right| = \frac{1}{2}\left|-20\right| = \frac{20}{2} = 10$$

Portanto, a área desse triângulo é 10 u.a.

b) Representamos os pontos no sistema de coordenadas e formamos um triângulo ligando os pontos com segmentos.



Sergio Lima/ID/BR

Nesse triângulo, nenhum dos lados é paralelo ou coincidente com os eixos como no item **a**. Desse modo, não é possível determinar sua área com a estratégia apresentada anteriormente, pois não conhecemos a distância entre dois vértices consecutivos.

No entanto, podemos calcular essa área por meio de determinantes.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 + 4 + 4 - 1 - 24 = -27$$

Sendo assim:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\left|-27\right| = \frac{27}{2} = 13{,}5$$

Portanto, a área desse triângulo é 13,5 u.a.

Atividades

23. Em cada item, verifique se os pontos são colineares ou se são vértices de um triângulo. Se forem vértices de um triângulo, determine no caderno a área desse triângulo.

a) $A(-2, -6)$, $B(0, 0)$ e $C(5, -4)$

b) $P(-4, 4)$, $Q(-8, 4)$, $R(-5, -2)$

c) $D(-8, 1)$, $E(-7, 2)$ e $F(-5, -1)$

24. (UEA-AM) Num plano cartesiano, sabe-se que os pontos A, $B(1, 2)$ e $C(2, 3)$ pertencem a uma mesma reta, e que o ponto A está sobre o eixo Oy. O valor da ordenada de A é

a) 0
b) 3
c) −1
d) 2
e) 1

25. Desafio Sabendo que os pontos $P(a, b)$, $A(-4, -3)$ e $B(5, 9)$ são colineares, determine no caderno as coordenadas do ponto P em cada item a seguir.

a) $b = a + 5$

b) P pertence ao eixo Ox.

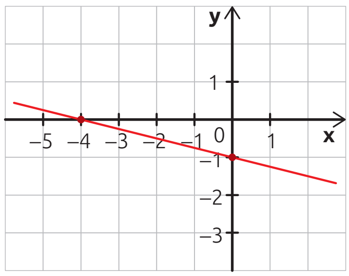
c) P pertence à bissetriz do 2º quadrante e do 4º quadrante.

26. Uma reta r contém os pontos $M(2, -5)$ e $N(-4, -1)$. Quais dos pontos a seguir não pertencem à reta r?

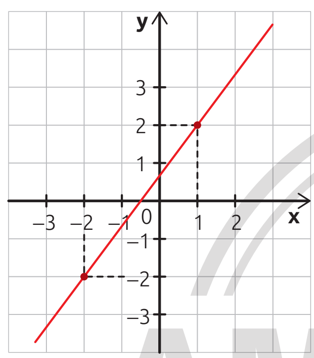
$A(-1, -3)$ $B(-3, -2)$ $C(0, -3)$ $D(-7, 1)$ $E\left(\frac{1}{2}, -4\right)$

27. Para cada item, escreva no caderno a equação da reta representada no plano cartesiano em sua forma geral.

a)

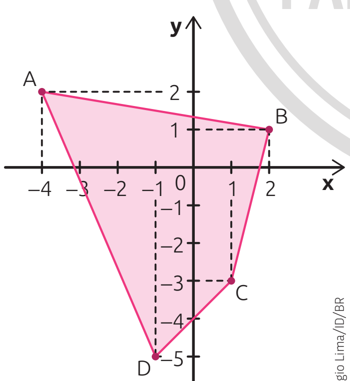


b)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

28. Observe o quadrilátero *ABCD* representado no plano cartesiano abaixo. Qual é a área desse quadrilátero?



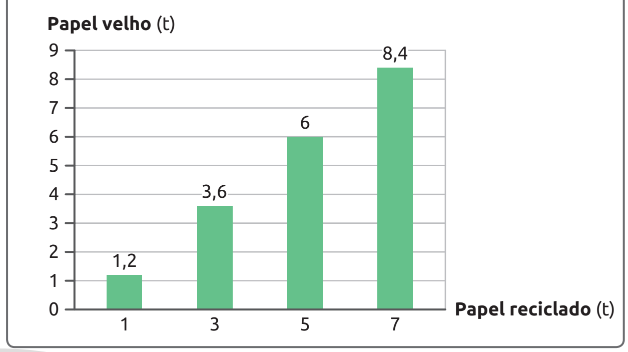
Sergio Lima/ID/BR

29. Sejam $A(4, -2x)$, $B(-7, x)$ e $C(10, 0)$ os vértices de um triângulo. Quais devem ser as coordenadas desses vértices para que a área desse triângulo seja 60 u.a.?

30. Sejam as retas *r*, *s* e *t*, dadas por $2x + y + 5 = 0$, $x - 4y + 16 = 0$ e $5x - 2y - 10 = 0$, respectivamente. No caderno, calcule a área da região triangular determinada pela representação dessas retas no plano cartesiano.

31. O gráfico de uma função $f: A \to \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $A = \{1, 3, 5, 7\}$, é um subconjunto de uma reta. Observe uma situação que pode ser representada por uma função desse tipo.

Quantidade de papel velho necessária para produzir papel reciclado (em toneladas) em 2008



Sergio Lima/ID/BR

Fonte de pesquisa: WWF Brasil. Disponível em: <www.wwf.org.br/?uNewsID=14001>. Acesso em: 20 out. 2015.

a) Associando os valores do gráfico a pontos no plano cartesiano, escreva as coordenadas desses pontos.

b) Determine a equação da reta que passa pelos pontos indicados no item **a**.

32. Desafio (Udesc) Seja *f* a função que representa a área do triângulo *ABC*, representado na figura.

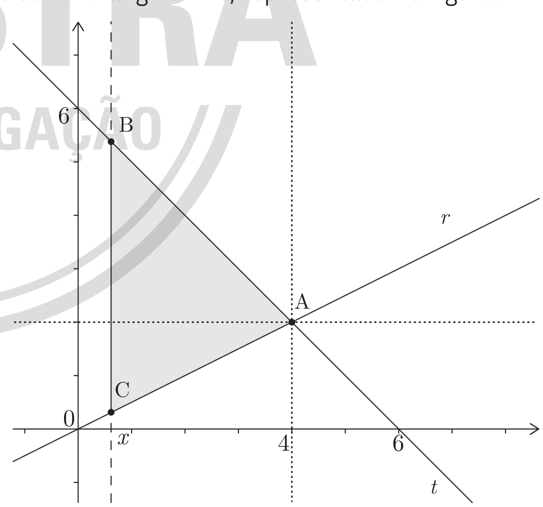


Figura 3

Udesc/Fac-símile: ID/BR

A expressão da função $f(x)$, para $0 \leqslant x \leqslant 4$, é:

a) $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - 6x + 12$

b) $f(x) = -3x + 12$

c) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x + 12$

d) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 12$

e) $f(x) = -x^2 + 8x - 16$

Ao resolver a atividade **32**, expresse as coordenadas dos vértices do triângulo em função de *x*.

Discussão de sistemas lineares

[...]

Comumente atribui-se a Leibniz, em 1693, a criação da teoria dos determinantes, visando o estudo de sistemas de equações lineares, embora considerações semelhantes já tivessem sido feitas dez anos antes no Japão por Seki Kōwa. [...]

Fonte de pesquisa: Eves, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 444.

Coleção particular. Fotografia: Granger/Diomedia

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Autor desconhecido, 1836. Gravura. Coleção particular.

Considere o sistema linear 2×2.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Utilizando o método do escalonamento, obtemos:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ 0x + (ae - bd)y = af - cd \end{cases}$$

Se o número $(ae - bd)$ for diferente de zero, o sistema será possível e determinado (SPD), pois obtemos um sistema escalonado com a mesma quantidade de equações e de incógnitas, com todas as equações contendo pelo menos uma incógnita cujo coeficiente é não nulo.

Agora, se o número $(ae - bd)$ for igual a zero, temos de analisar dois casos:

- $af - cd = 0$

  Nesse caso, o sistema será possível e indeterminado (SPI), pois obtemos um sistema escalonado com a quantidade de equações menor do que a quantidade de incógnitas, com todas as equações contendo pelo menos uma incógnita cujo coeficiente é não nulo;

- $af - cd \neq 0$

  Nesse caso o sistema será impossível (SI), pois obtemos um sistema escalonado com uma equação com todos os coeficientes nulos e termo independente diferente de zero.

No capítulo anterior vimos como associar matrizes a sistema linear. Note que o número $(ae - bd)$ é igual ao determinante D da matriz dos coeficientes do sistema linear, ou seja:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$$

Desse modo, em um sistema linear 2×2, se:

- $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado (SPD);
- $D = 0$, o sistema poderá ser possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI).

Exemplo

Discuta o sistema $\begin{cases} -2x - 3y = 1 \\ 4x + ay = -7 \end{cases}$.

Calculamos o determinante D da matriz dos coeficientes:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & a \end{vmatrix} = -2 \cdot a - (-3) \cdot 4 = -2a + 12$$

Para o sistema ser SPD, é necessário que $D \neq 0 \Rightarrow -2a + 12 \neq 0 \Rightarrow a \neq 6$.

Para o sistema ser SPI ou SI, é necessário que $D = 0 \Rightarrow -2a + 12 = 0 \Rightarrow a = 6$.

Substituindo a por 6 no sistema de equações, temos:

$$\begin{cases} -2x - 3y = 1 \\ 4x + ay = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 3y = 1 \\ 4x + 6y = -7 \end{cases}$$

Utilizando o escalonamento, podemos substituir a 2ª equação por sua soma com a 1ª equação multiplicada por 2.

$$\begin{cases} -2x - 3y = 1 \\ 4x + 6y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 3y = 1 \\ 0x + 0y = -5 \end{cases}$$

Como a equação $0x + 0y = -5$ não admite solução para $x, y \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que o sistema é impossível (SI).

Portanto, esse sistema é SI para $a = 6$ e SPD para $a \neq 6$, com $a \in \mathbb{R}$.

Considere o sistema linear 3×3.

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \\ kx + ly + mz = n \end{cases}$$

Utilizando o método do escalonamento, obtemos:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ 0x + (af - be)y + (ag - ce)z = ah - de \\ 0x + 0y + (afm + bgk + cel - cfk - agl - bem)z = afn + bhk + del - dfk - ahl - ben \end{cases}$$

Se o número $(afm + bgk + cel - cfk - agl - bem)$ for diferente de zero, o sistema será possível e determinado (SPD), pois obtemos um sistema escalonado com a mesma quantidade de equações e de incógnitas, com todas as equações contendo pelo menos uma incógnita cujo coeficiente é não nulo.

Agora, se o número $(afm + bgk + cel - cfk - agl - bem)$ for igual a zero, temos de analisar dois casos:

- $afn + bhk + del - dfk - ahl - ben = 0$

  Nesse caso o sistema será possível e indeterminado (SPI), pois obtemos um sistema escalonado com a quantidade de equações menor do que a quantidade de incógnitas, com todas as equações contendo pelo menos uma incógnita cujo coeficiente é não nulo;

- $afn + bhk + del - dfk - ahl - ben \neq 0$

  Nesse caso o sistema será impossível (SI), pois obtemos um sistema escalonado com uma equação com todos os coeficientes nulos e termo independente diferente de zero.

Note que, o número $(afm + bgk + cel - cfk - agl - bem)$ é igual ao determinante D da matriz dos coeficientes do sistema linear, ou seja:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ k & l & m \end{vmatrix} = afm + bgk + cel - cfk - agl - bem$$

Desse modo, em um sistema linear 3×3, se:

- $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado (SPD);
- $D = 0$, o sistema poderá ser possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI).

R10. Discuta os sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + ay - z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \\ 6x + 2a - 2z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + ay + z = 3 \\ 4x + 2y + 2z = 6 \\ ax + 6y + 6z = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + my = 3 \\ x + 2y = b + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 1 \\ 3x + my = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y + 2z + w = 3 \\ 4x + 3y + kz + w = 4 \\ 6x + 4y + z + 2w = 2 \end{cases}$

Resolução

a) Calculando o determinante da matriz dos coeficientes, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 6 & 2a & -2 \end{vmatrix} = -12 - 18a - 8a + 12 + 18a + 8a = 0$$

Assim, para todo $a \in \mathbb{R}$, temos $D = 0$, logo o sistema será possível e indeterminado ou impossível.

Observe que não precisamos escalonar o sistema para classificá-lo, pois como ele é homogêneo, a terna $(0, 0, 0)$ é uma solução. Consequentemente, o sistema possui infinitas soluções, ou seja, é possível e indeterminado para todo $a \in \mathbb{R}$.

b) Calculando o determinante da matriz dos coeficientes, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ a & 6 & 6 \end{vmatrix} = 24 + 2a^2 + 24 - 2a - 24 - 24a = 2a^2 - 26a + 24$$

O sistema será SPD, se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, ou seja, $D \neq 0$.

Para $D = 0$, dividimos a expressão por 2 e obtemos $a^2 - 13a + 12 = 0$. Utilizando a fórmula resolutiva da equação do 2º grau, calculamos:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12$$

$$\Delta = 121$$

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$a = \frac{-(-13) \pm \sqrt{121}}{2}$$

$$a = \frac{13 \pm 11}{2} \begin{cases} a_1 = 12 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Consequentemente, para $a \neq 12$ e $a \neq 1$, o sistema é possível e determinado.

Vamos analisar, agora, os casos em que $a = 12$ e $a = 1$.

1º caso:

Fazendo $a = 12$ e substituindo a 3ª linha multiplicada por sua soma com a 2ª linha multiplicada por -3, temos:

$$\begin{cases} 2x + 12y + z = 3 \\ 4x + 2y + 2z = 6 \\ 12x + 6y + 6z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 12y + z = 3 \\ 4x + 2y + 2z = 6 \\ 0z = -8 \end{cases}$$

Como a última equação é sempre falsa no sistema escalonado, o sistema é classificado como impossível.

2º caso

Fazendo $a = 1$ e substituindo a 2ª linha por sua soma com a 1ª linha multiplicada por -2, temos:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 4x + 2y + 2z = 6 \\ x + 6y + 6z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 0 = 0 \\ x + 6y + 6z = 10 \end{cases}$$

Desta maneira, o sistema é classificado como possível e indeterminado.

Portanto:

- para $a \neq 12$ ou $a \neq 1$, o sistema é SPD;
- para $a = 12$, o sistema é SI;
- para $a = 1$, o sistema é SPI.

c) Calculando o determinante D da matriz dos coeficientes, obtemos:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & m \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - m$$

Para o sistema ser SPD, é necessário que $D \neq 0$, ou seja, $8 - m \neq 0$. Deste modo, se $m \neq 8$, o sistema será possível e determinado, independentemente do valor de b.

Vamos analisar, agora, como será classificado o sistema se $m = 8$.

Substituindo m por 8 no sistema inicial, temos:

$$\begin{cases} 4x + 8y = 3 \\ x + 2y = b + 1 \end{cases}$$

Trocando a 2ª linha por sua soma com a 1ª linha multiplicada por $\left(-\frac{1}{4}\right)$, obtemos:

$$\begin{cases} 4x + 8y = 3 \\ 0y = b + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Nesse caso, o sistema será possível e indeterminado se $b + \frac{1}{4} = 0$. Assim:

$$b + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

Agora, se $b \neq -\frac{1}{4}$, o sistema será impossível, pois a ultima equação ficará falsa.

Portanto:

- para $m \neq 8$ e $b \in \mathbb{R}$, o sistema é SPD;
- para $m = 8$ e $b = -\frac{1}{4}$, o sistema é SPI;
- para $m = 8$ e $b \neq -\frac{1}{4}$, o sistema é SI.

d) A matriz dos coeficientes é dada por $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & m \end{bmatrix}$.

Como a matriz não é quadrada, não é possível calcular seu determinante. Porém, podemos obter um sistema equivalente a esse, possível de ser classificado. Assim, substituímos:

- a 1ª linha por sua soma com a 2ª linha multiplicada por (-2);
- a 3ª linha pela sua soma com 2ª linha multiplicada por (-3).

Assim:

$$\begin{cases} -y = 1 \\ x + y = 1 \\ (m-3)y = -3 \end{cases}$$

Por fim, substituindo a 3ª linha por sua soma com a 1ª linha multiplicada por $(m+3)$, obtemos:

$$\begin{cases} -y = 1 \\ x + y = 1 \\ 0y = -3 + (m-3) \end{cases}$$

Para que o sistema não seja impossível, devemos ter:

$$-3 + (m-3) = 0$$
$$m - 6 = 0$$

ou seja, $m = 6$. Como o valor de y já está definido, o sistema é possível e determinado.
Caso $m \neq 6$, a última equação será sempre falsa. Consequentemente, o sistema será impossível.
Portanto:

- para $m = 6$, o sistema é SPD;
- para $m \neq 6$, o sistema é SI.

e) A matriz dos coeficientes é dada por $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & k & 1 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Como na atividade acima, nesse caso não será possível calcular o determinante, pois a matriz não é quadrada. Sendo assim, vamos obter um sistema equivalente a este. Para isso, substituímos:

- a 2ª linha por sua soma com a 1ª linha multiplicada por (-2);
- a 3ª linha por sua soma com a 1ª linha multiplicada por (-3).

Assim:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + w = 3 \\ y + (k-4)z - w = -2 \\ y - 5z - w = -7 \end{cases}$$

Por fim, substituindo a 3ª linha por sua soma com a 2ª linha multiplicada por (-1) obtemos:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + w = 3 \\ y + (k-4)z - w = -2 \\ -(k+1)z = -5 \end{cases}$$

Se um sistema linear escalonado tem a quantidade de equações menor do que a de incógnitas, com todas as equações contendo pelo menos uma incógnita com coeficiente não nulo, então o sistema é possível e indeterminado. Portanto, para todo $k \in \mathbb{R}$, o sistema é SPI.

Atividades

33. Atribua um valor real diferente de 6 para a e determine a solução do sistema:

$$\begin{cases} -2x - 3y = 1 \\ 4x + ay = -7 \end{cases}$$

34. Qual a relação entre m e n de modo que o sistema $\begin{cases} 3x - 6y = n \\ -x + 2y = m \end{cases}$ seja possível e indeterminado?

35. Discuta os sistemas abaixo sabendo que $a, m \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} 3x + ay = 0 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + my = 2 \\ \dfrac{x}{2} - 3y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + y - 3z = 2 \\ 4x + 3y - z = 4 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$

36. Para quais valores reais de a e b, o sistema:

a) $\begin{cases} -x + ay = b \\ -3x - y = -3 \end{cases}$ é possível e determinado?

b) $\begin{cases} ax + 2y = -1 \\ -3x + y = b + 3 \end{cases}$ é possível e indeterminado?

c) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -ax + 3y - 2z = 9 \\ 2x + 2y - 4z = 2b \end{cases}$ é impossível?

37. Discuta os sistemas abaixo sabendo que a, m e p são números reais.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ mx + 3y = 1 \\ -2x - y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -ax + 3y - z + 4w = 2 \\ x + \dfrac{1}{2}y - 3z = 1 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 12 \\ 3x - py + 2z = -1 \\ 3x + y - 5z = 10 \\ x - 3y - 4z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + ay - z = 3 \\ -2x - y + 2z = 5 \end{cases}$

38. Considere o sistema homogêneo abaixo.

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ dx + ey + fz = 0 \\ gx + hy + iz = 0 \end{cases}$$

Sabendo que o determinante da matriz dos coeficientes é igual a zero, determine se o sistema é SPD, SPI ou SI. Justifique sua resposta.

39. Determine os valores reais de a para os quais a equação matricial abaixo admita apenas uma solução.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & a & -1 \\ 7 & 8 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

40. Sendo a, b, c e d diferentes de zero, determine m e n para que o sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = d \end{cases}$ seja possível e indeterminado.

41. Desafio (Uece) Em relação ao sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - my + z = 0, \\ mx - y - z = 0 \end{cases}$$

pode-se afirmar corretamente que:

a) o sistema admite solução não nula apenas quando $m = -1$.

b) para qualquer valor de m, a solução nula $(x = 0, y = 0, z = 0)$ é a única solução do sistema.

c) o sistema admite solução não nula quando $m = 2$ ou $m = -2$.

d) não temos dados suficientes para concluir que o sistema tem solução não nula.

42. (Fuvest-SP) No sistema linear $\begin{cases} ax - y = 1 \\ y + z = 1, \\ x + z = m \end{cases}$ nas variáveis x, y e z, a e m são constantes reais. É correto afirmar:

a) No caso em que $a = 1$, o sistema tem solução se, e somente se, $m = 2$.

b) O sistema tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.

c) No caso em que $m = 2$, o sistema tem solução se, e somente se, $a = 1$.

d) O sistema só tem solução se $a = m = 1$.

e) O sistema não tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.

Verificando rota

1. De acordo com o capítulo **4**, quais valores os coeficientes de uma equação linear pode assumir?

2. O que são equações lineares homogêneas?

3. Quantas equações e incógnitas possui um sistema linear $m \times n$?

4. Quantas soluções possui um sistema linear:
   - possível e determinado?
   - possível e indeterminado?
   - impossível?

5. Cite um método com o qual seja possível resolver sistemas lineares de qualquer ordem.

6. Quais sistemas lineares admitem pelo menos uma incógnita livre?

7. O que são sistemas lineares equivalentes?

8. Defina com suas palavras o que são matrizes.

9. Em uma matriz de ordem $m \times n$, o que representam as letras m e n?

10. O que é matriz identidade?

11. Quais condições devem ser satisfeitas para que duas matrizes sejam iguais?

12. Por que não é possível realizar a adição das matrizes A e B a seguir?

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

13. Considerando duas matrizes, A e B, verifique se a afirmação do quadro é verdadeira. Justifique sua resposta.

> Se for possível a multiplicação de A por B, então é possível a multiplicação de B por A.

14. O que significa dizer que o produto entre duas matrizes não é comutativo?

15. Qual é o elemento neutro da multiplicação de matrizes?

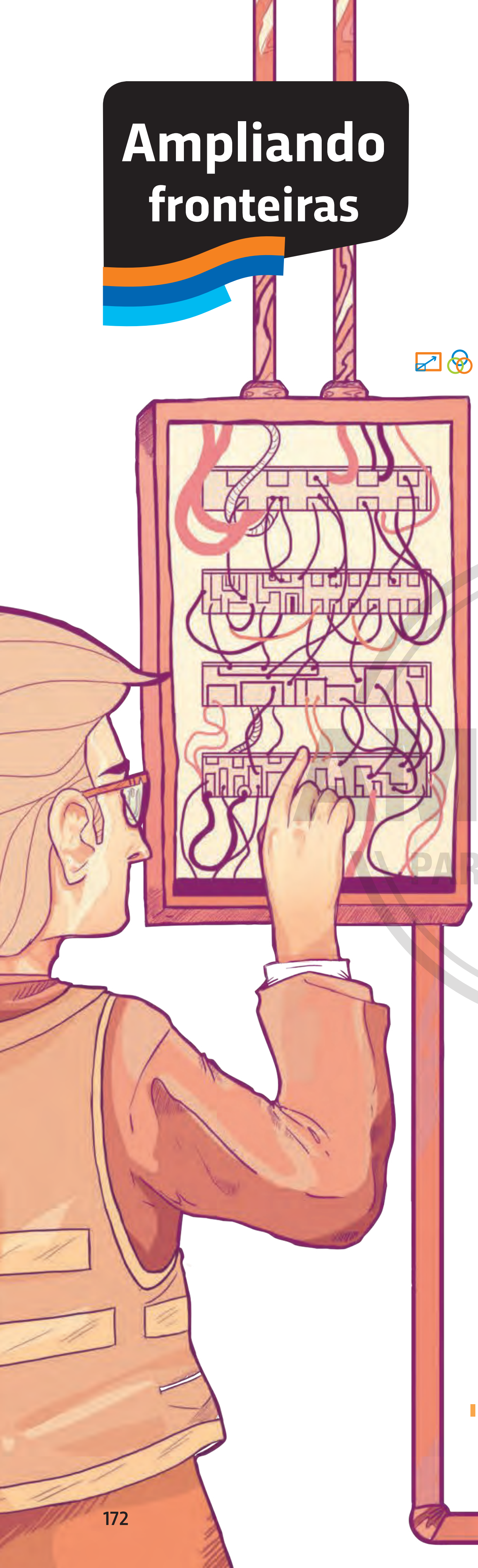
16. O que é o determinante de uma matriz quadrada?

17. Qual deve ser o valor do determinante de uma matriz para que esta seja invertível?

18. Cite algumas aplicações dos determinantes na Geometria Analítica.

19. A página de abertura da unidade **3** apresentou as planilhas eletrônicas como assunto inicial. Qual dos conteúdos trabalhados nesta unidade se relaciona com esse tema?

Ampliando fronteiras



A Matemática do acender das luzes

Você já parou para pensar em como é feita a distribuição elétrica em sua residência?

Ao acender uma lâmpada ou ligar um aparelho na tomada estamos acionando o funcionamento de um circuito elétrico.

Circuito elétrico é um conjunto de componentes interligados em sequência formando o percurso pelo qual circulam cargas elétricas.

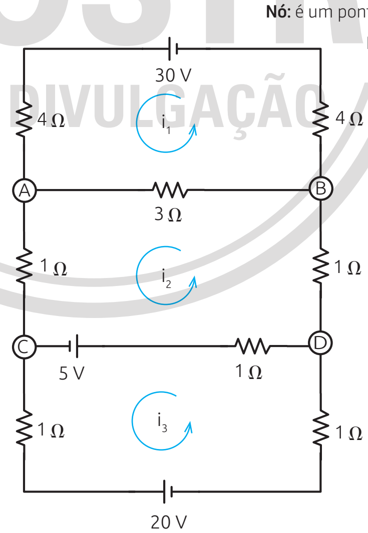
Os principais componentes em um circuito elétrico são as fontes geradoras de energia, os fios condutores e os resistores.

Algumas das grandezas físicas envolvidas em um circuito elétrico são descritas pela relação $U = R \cdot i$, em que **U** é a voltagem, medida em volts (V); **R** é a resistência elétrica, medida em ohm (Ω) e **i** é a intensidade de corrente elétrica, medida em ampere (A).

Para compreender um circuito elétrico, as Leis de Kirchhoff são fundamentais. Na Lei dos Nós, a soma das correntes que entram em qualquer nó é igual à soma das correntes que saem dele; na Lei das Malhas, a soma das quedas de voltagem ao longo de qualquer circuito é igual à voltagem total em torno do circuito.

Nó: é um ponto onde três (ou mais) condutores são ligados.

Malha: é qualquer caminho condutor fechado.



Maryane Silva/ASC Imagens

Analisando o circuito elétrico ao lado, percebemos que ele possui três malhas fechadas 1, 2 e 3 com correntes médias i_1, i_2 e i_3, e seus sentidos são arbitrários.

Por convenção, o sentido de uma corrente parte do lado positivo para o lado negativo do gerador. Se o sentido definido arbitrariamente para a corrente média na malha coincidir com o convencional, o sinal do produto $R \cdot i$ e da voltagem serão positivos. Caso contrário, teremos sinal negativo para o produto $R \cdot i$ e para a voltagem.

Alguns dispositivos de manobra e de segurança são usados para acionar ou interromper o funcionamento de um circuito elétrico. Os mais comuns são os interruptores, os fusíveis, as chaves e os disjuntores.

Determinação da corrente em cada malha do circuito utilizando sistema linear

A equação para a malha 1 é $11i_1 - 3i_2 = 30$, pois a corrente i_1 atravessa três resistores $(4i_1 + 4i_1 + 3i_1)$.

Pelo ramo *AB* a malha 2 atravessa parte da malha 1 e a queda correspondente é de $3i_2$ volts na direção oposta à da malha 2. Assim, pela Lei das Malhas a voltagem é 30 V.

Já para a malha 2, a equação é $-3i_1 + 6i_2 - i_3 = 5$, em que $-3i_1$ é a queda de voltagem da malha 1 pelo ramo *AB* na direção oposta da malha 2. O $6i_2$ é a soma dos quatro resistores da malha 2 e o $-i_3$ é a queda de voltagem da malha 3 pelo ramo *CD* na direção oposta à da malha 2.

Para a malha 3, a equação é $-i_2 + 3i_3 = -25$, pois $-i_2$ é a queda de voltagem da malha 2 pelo ramo *CD* na direção oposta à da malha 3. O $3i_3$ é a soma dos três resistores da malha 3 e, pela Lei das Malhas, a soma dessas voltagens corresponde a −25 V, pois é a soma de −5 V e −20 V, por causa da direção escolhida para a corrente na malha 3.

Logo, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 11i_1 - 3i_2 = 30 \\ -3i_1 + 6i_2 - i_3 = 5 \\ -i_2 + 3i_3 = -25 \end{cases}$$

Por meio desse sistema, obtemos as seguintes intensidades médias para cada malha:

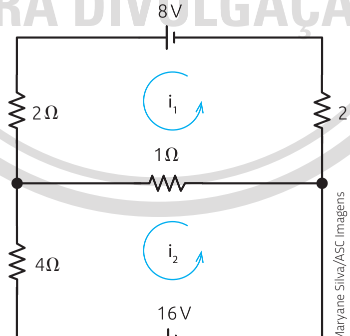
$i_1 = 3$ A, $i_2 = 1$ A e $i_3 = -8$ A.

A Para tratar de circuitos elétricos são utilizadas algumas leis físicas. Quais são essas leis?

B Resolva o sistema linear dado no texto e verifique se o resultado fornecido é verdadeiro. Depois, responda: o que significa o valor de i_3 ser negativo?

C Observe o circuito elétrico abaixo e o sistema linear definido a partir da análise desse circuito. Em seguida, resolva-o.

$$\begin{cases} 5i_1 - i_2 = 8 \\ i_1 - 5i_2 = 16 \end{cases}$$

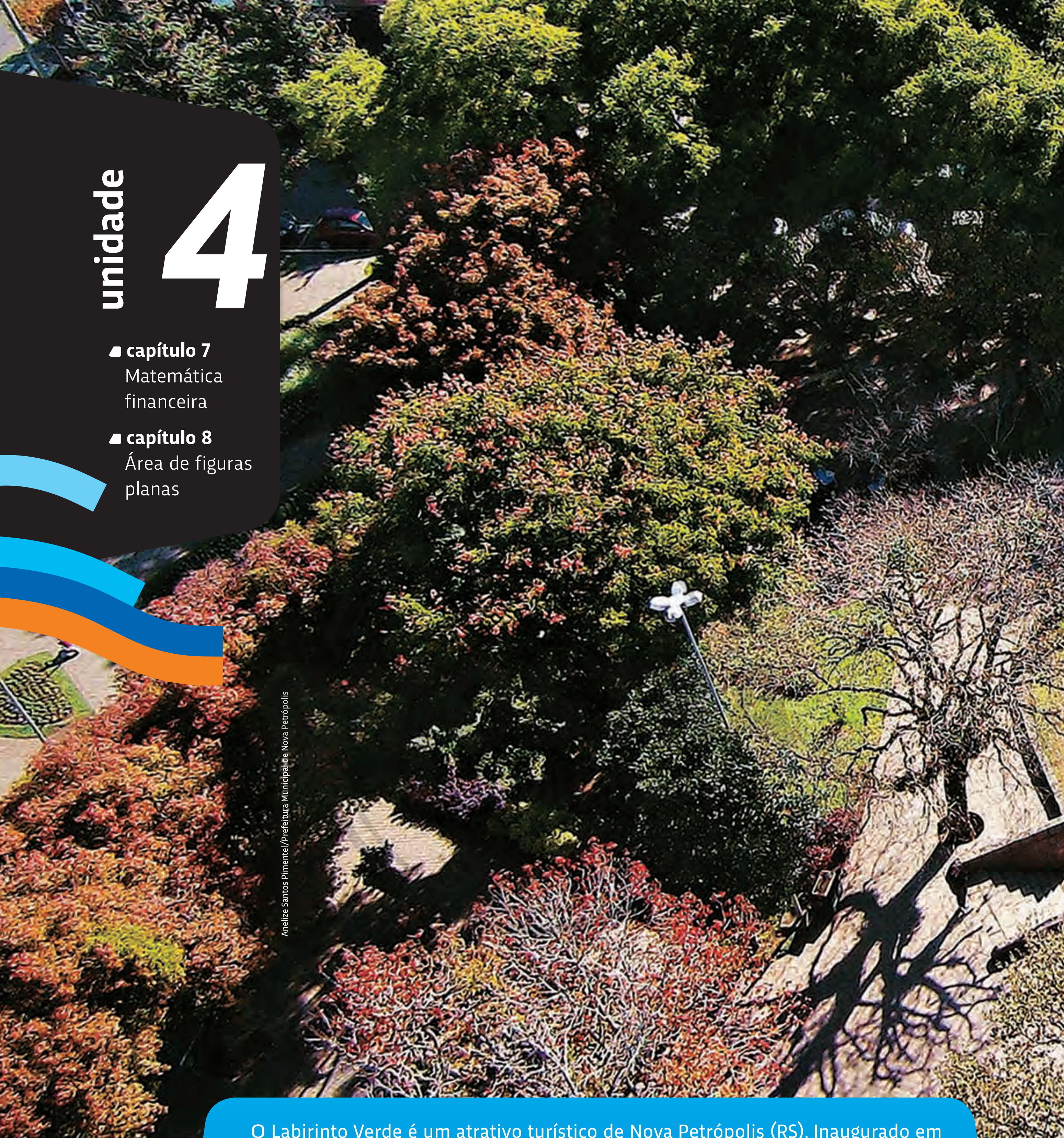


Maryane Silva/ASC Imagens

Rogério Casagrande/ASC Imagens

unidade 4

- **capítulo 7**
  Matemática financeira
- **capítulo 8**
  Área de figuras planas



Anelize Santos Pimentel/Prefeitura Municipal de Nova Petrópolis

O Labirinto Verde é um atrativo turístico de Nova Petrópolis (RS). Inaugurado em 1989, fica na Praça das Flores, no centro dessa cidade tipicamente alemã da Serra Gaúcha. Cerca de 1 700 ciprestes de 2 m de altura compõem seu formato circular de 36 m de diâmetro. Os turistas que o visitam são motivados a chegar em seu centro e sair dele, desafio que não é tão simples, pois a área ocupada por esse labirinto é bem extensa. Nesta unidade, veremos como calcular a área de figuras planas, entre elas a área de um círculo.

Cipreste: árvore conífera, com copa estreita, muito utilizada como ornamento; também é uma importante fonte de madeira, pois é forte, durável e aromática.

Vista panorâmica do Labirinto Verde, inaugurado em 1989, em Nova Petrópolis (RS), no centro da Praça das Flores, também chamada Praça da República. Imagem capturada em 2014.

Nesta unidade, você vai estudar investimentos financeiros e juros, conhecer alguns sistemas de amortização, calcular a área de figuras planas e estudar a razão entre áreas de figuras planas semelhantes.

capítulo 7 Matemática financeira

A matemática financeira é uma área da Matemática que fornece subsídios para que as pessoas possam analisar criticamente situações cotidianas envolvendo porcentagem, juro, investimentos, entre outros.

Porcentagem

De acordo com a Lei Federal n. 12 651 de 26 de maio de 2012, em geral, as propriedades rurais devem destinar parte de sua área total para a Reserva Legal. Essa reserva tem a função de assegurar o uso econômico de modo sustentável dos recursos naturais do imóvel rural, auxiliar a conservação e a reabilitação dos processos ecológicos e promover a conservação da biodiversidade, bem como o abrigo e a proteção de fauna silvestre e da flora nativa.

Ernesto Reghran/Pulsar Imagens

Vista aérea de propriedade rural de Londrina (PR) com diversidade agrícola e áreas de reserva florestal, em agosto de 2014. A Reserva Legal não deve ser vista apenas como uma formalidade, mas é um dever de todo cidadão preocupado com o ambiente e com a preservação da natureza.

Supondo que uma propriedade rural possua 484 000 m^2 de área total e deva destinar 20% dessa área à Reserva Legal, qual é a área a ser destinada?

Para calcular a área destinada à reserva, podemos imaginar essa propriedade repartida em 100 partes e 20 delas formando a Reserva Legal.

Pensando desse modo, fazemos:

$$484\,000 : 100 = 4\,840$$

Em seguida, $4\,840 \cdot 20 = 96\,800$.

Assim, a área dessa propriedade destinada à Reserva Legal deve medir 96 800 m^2.

A porcentagem também pode ser representada na forma de fração e na forma de número decimal. Por exemplo:

$$20\% = \frac{20}{100} = 0{,}20$$

Veja outras maneiras de determinar 20% de 484 000.

1ª maneira

$$\frac{20}{100} \cdot 484\,000 = \frac{20 \cdot 484\,000}{100} = \frac{9\,680\,000}{100} = 96\,800$$

2ª maneira

$$0{,}20 \cdot 484\,000 = 96\,800$$

3ª maneira

Área (m^2)	Porcentagem
484 000	100
x	20

$$100x = 484\,000 \cdot 20$$
$$100x = 9\,680\,000$$
$$x = \frac{9\,680\,000}{100} \Rightarrow x = 96\,800$$

Considere agora outra propriedade com área total de 726 000 m^2, que destina 254 100 m^2 à formação da Reserva Legal. Essa área destinada à Reserva Legal está de acordo com a Lei Federal n. 12 651 de 26 de maio de 2012?

Utilizando a ideia de relação parte-todo, podemos representar essa situação da seguinte maneira:

$$\frac{254\,100}{726\,000} = \frac{35}{100} = 0{,}35 = 35\%$$

Também podemos utilizar uma regra de três simples:

Área (m^2)	Porcentagem
726 000	100
254 100	x

$$726\,000x = 100 \cdot 254\,100$$
$$726\,000x = 25\,410\,000$$
$$x = \frac{25\,410\,000}{726\,000} \Rightarrow x = 35$$

Portanto, a Reserva Legal ocupa 35% dessa propriedade, estando de acordo com a exigência da lei.

Acréscimos e descontos sucessivos

Acréscimos sucessivos

Nos últimos dois anos, o salário de Alex passou por dois reajustes. Em janeiro de 2017, seu salário era R$ 1500,00 e sofreu um acréscimo de 6%. Em janeiro de 2018, teve outro acréscimo, dessa vez de 7%. Que valor passou a corresponder ao salário de Alex após o segundo acréscimo?

Para responder a esta pergunta, determinamos o valor correspondente ao salário após o primeiro acréscimo:

$$1\,500 + \underbrace{1\,500 \cdot 0{,}06}_{6\%\text{ de }1\,500} = 1\,500 + 90 = 1\,590$$

Em seguida, determinamos o valor correspondente ao salário após o segundo acréscimo:

$$1\,590 + \underbrace{1\,590 \cdot 0{,}07}_{7\%\text{ de }1\,590} = 1\,590 + 111{,}3 = 1\,701{,}3$$

Logo, após o segundo acréscimo, o salário de Alex passou a ser R$ 1 701,30.

Analisando as operações para determinar o salário após o primeiro acréscimo, temos:

$$1\,500 + 1\,500 \cdot 0{,}06 = 1\,500 \cdot (1 + 0{,}06) = 1\,500 \cdot (1{,}06) = 1\,590{,}00$$

Determinamos o salário após o segundo acréscimo, utilizando a mesma ideia:

$$1590 + 1590 \cdot 0{,}07 = 1590 \cdot (1 + 0{,}07) = 1590 \cdot (1{,}07) = 1701{,}30$$

Podemos avançar um pouco mais nesta análise. Sabendo que $1590 = 1500 \cdot (1{,}06)$, temos:

$$1590 \cdot (1{,}07) = \underbrace{1500 \cdot (1{,}06)}_{1590} \cdot (1{,}07) = 1701{,}30$$

Em resumo, para determinar o valor correspondente ao salário de Alex após os dois acréscimos sucessivos, podemos calcular:

$$1500 \cdot (1 + 0{,}06) \cdot (1 + 0{,}07) = 1500 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}07 = 1701{,}3$$

Portanto, o salário de Alex passará a ser R$ 1701,30.

O salário de Alex seria o mesmo após os acréscimos, caso sofresse primeiro um acréscimo de 7% e depois outro acréscimo de 6%? Justifique.

Dados o valor inicial P_0 e as taxas de acréscimos sucessivos $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$, os valores $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, obtidos após cada acréscimo, são determinados por:

$$P_1 = P_0 \cdot (1 + i_1)$$

$$P_2 = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2)$$

$$P_3 = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3)$$

$$\vdots$$

$$P_n = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)$$

O valor final $P = P_n$ é dado por $P = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)$

Descontos sucessivos

Fotomontagem de Rafael Luís Gaion criada com a fotografia Ozaiachin/Shutterstock.com/ID/BR

Em uma liquidação, certo modelo de fogão está com 20% de desconto em relação ao preço da etiqueta. Se o pagamento for à vista, é concedido mais um desconto de 10%, calculado após o desconto de 20%. Se um cliente deseja comprar esse modelo de fogão pagando à vista, quanto vai desembolsar?

Para responder a esta pergunta, vamos determinar o primeiro desconto:

$$1250 - \underbrace{1250 \cdot 0{,}20}_{20\% \text{ de } 1250} = 1250 - 250 = 1000$$

Em seguida, determinamos o segundo desconto:

$$1000 - \underbrace{1000 \cdot 0{,}10}_{10\% \text{ de } 1000} = 1000 - 100 = 900$$

Portanto, o cliente vai desembolsar R$ 900,00.

Analisando as operações para determinar o primeiro desconto, temos:

$$1\,250 - 1\,250 \cdot 0{,}20 = 1\,250 \cdot (1 - 0{,}20) = 1\,250 \cdot (0{,}80) = 1\,000$$

A mesma ideia pode ser utilizada na determinação do segundo desconto:

$$1\,000 - 1\,000 \cdot 0{,}10 = 1\,000 \cdot (1 - 0{,}10) = 1\,000 \cdot (0{,}90) = 900$$

Podemos avançar um pouco mais nesta análise. Sabendo que $1\,000 = 1\,250 \cdot (0{,}80)$, temos:

$$1\,000 \cdot (0{,}90) = \underbrace{1\,250 \cdot (0{,}80)}_{1\,000} \cdot (0{,}90) = 900$$

Em resumo, para determinar o valor que o cliente pagará pelo fogão após os dois descontos sucessivos, podemos calcular:

$$1\,250 \cdot (1 - 0{,}20) \cdot (1 - 0{,}10) = 1\,250 \cdot 0{,}80 \cdot 0{,}90 = 900$$

Portanto, o cliente pagará R$ 900,00.

O que vai custar menos ao cliente: dois descontos sucessivos de 20% e 10% ou um único desconto de 30%? Justifique.

Dados o valor inicial P_0 e as taxas de descontos sucessivos $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$, os valores $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, obtidos após cada desconto, são determinados por:

$$P_1 = P_0 \cdot (1 - i_1)$$

$$P_2 = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2)$$

$$P_3 = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2) \cdot (1 - i_3)$$

$$\vdots$$

$$P_n = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2) \cdot (1 - i_3) \cdot \ldots \cdot (1 - i_n)$$

O valor final $P = P_n$ é dado por $P = P_0 \cdot (1 - i_1) \cdot (1 - i_2) \cdot (1 - i_3) \cdot \ldots \cdot (1 - i_n)$

Atividades resolvidas

R1. Um aparelho de telefone celular foi comprado a prazo com um desconto de 4% sobre o preço da etiqueta. Se a compra tivesse sido efetuada à vista, o valor pago pelo aparelho seria de R$ 1300,00. Qual é a taxa de desconto que incide sobre o preço da etiqueta no caso do pagamento à vista, tendo o cliente pago a prazo um total de R$ 1560,00?

Resolução

Vamos resolver este problema de duas maneiras.

1ª maneira

Como o aparelho de telefone celular foi comprado a prazo com um desconto de 4%, foi pago 96% do preço da etiqueta. Sendo P esse preço, temos:

$$1\,560{,}00 = 0{,}96 \cdot P \Rightarrow 1\,560 = \frac{96}{100} \cdot P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1\,560 \cdot 100}{96} = P \Rightarrow P = 1\,625$$

Logo, o preço da etiqueta é R$ 1625,00.

Sendo i o percentual incidido sobre o preço da etiqueta, no caso de a compra ser efetuada à vista, temos:

$$P \cdot i = 1\,300 \Rightarrow 1\,625 \cdot i = 1\,300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = \frac{1\,300}{1\,625} \Rightarrow i = 0{,}8$$

Assim, como o valor pago à vista corresponde a 80% do valor da etiqueta, a taxa de desconto dado é $\underbrace{20\%}_{100\% - 80\%}$.

2ª maneira

Podemos calcular o preço P da etiqueta utilizando uma regra de três simples.

Preço (R$)	Porcentagem
1560	96
P	100

$96 \cdot P = 1560 \cdot 100 \Rightarrow 96 \cdot P = 156\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow P = \dfrac{156\,000}{96} \Rightarrow P = 1625$

De maneira semelhante, determinamos o percentual incidido sobre o preço da etiqueta no caso da compra à vista fazendo:

Preço (R$)	Porcentagem
1625	100
1300	x

$1625 \cdot x = 1300 \cdot 100 \Rightarrow 1625 \cdot x = 130\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{130\,000}{1625} \Rightarrow x = 80$

Logo, a taxa de desconto que incide sobre o preço da etiqueta no caso do pagamento à vista é 20%.

R2. Certo produto recebeu dois descontos sucessivos de 10% e 20% e depois um acréscimo de 30%. Pode-se dizer que o seu preço final, em relação ao inicial:

a) permaneceu o mesmo
b) aumentou em 6,4%
c) decresceu em 6,4%
d) decresceu em 3,2%
e) aumentou em 3,2%

Resolução

Vamos resolver esse problema de duas maneiras.

1ª maneira

Seja P_0 o valor inicial do produto. O valor P_1 do produto após o primeiro desconto corresponde a 90% do valor P_0, pois o desconto é $\underbrace{10\%}_{100\% - 90\%}$. Assim, $P_1 = 0{,}9 \cdot P_0$.

O valor P_2 do produto após o segundo desconto corresponde a 80% do valor P_1, sendo o desconto de $\underbrace{20\%}_{100\% - 80\%}$. Assim, temos:

$$P_2 = 0{,}8 \cdot P_1 = 0{,}8 \cdot \left(0{,}9 \cdot P_0\right) = 0{,}72 \cdot P_0$$

O valor P_3 do produto, após os descontos e o acréscimo, corresponde a 130% do valor P_2, pois o acréscimo é de $\underbrace{30\%}_{130\% - 100\%}$. Assim:

$$P_3 = 1{,}3 \cdot P_2 = 1{,}3 \cdot 0{,}72 \cdot P_0 = 0{,}936 \cdot P_0$$

Observe que $P_3 < P_0$, pois P_3 é igual ao produto de P_0 por um número menor do que 1. Portanto, houve um decréscimo e não um acréscimo no valor P_0 inicial.

Em outras palavras, P_3 corresponde a 93,6% do valor P_0. Logo, o desconto (ou decréscimo) total foi de 100% − 93,6% = 6,4%. Portanto, a alternativa correta é **c**.

2ª maneira

Utilizando a mesma ideia da resolução anterior, por meio de regra de três simples temos:

I)

Preço (R$)	Porcentagem
P_0	100
P_1	90

$100 \cdot P_1 = 90 \cdot P_0 \Rightarrow P_1 = 0{,}9 \cdot P_0$

II)

Preço (R$)	Porcentagem
P_1	100
P_2	80

$100 \cdot P_2 = 80 \cdot P_1 \Rightarrow P_2 = 0{,}8 \cdot P_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow P_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot P_0 \Rightarrow P_2 = 0{,}72 \cdot P_0$

III)

Preço (R$)	Porcentagem
P_2	100
P_3	130

$100 \cdot P_3 = 130 \cdot P_2 \Rightarrow P_3 = 1{,}3 \cdot P_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow P_3 = 1{,}3 \cdot 0{,}72 \cdot P_0 = 0{,}936 \cdot P_0$

Assim, P_3 corresponde a 93,6% do valor P_0.

Portanto, a alternativa correta é **c**.

R3. Certo modelo de automóvel novo sofre uma depreciação de 5% ao ano durante os 6 primeiros anos de uso. Calcule o valor de venda de um desses automóveis adquirido novo por R$ 50 000,00 após 4 anos de uso.

Resolução

Seja $P_0 = 50\,000$ o valor inicial do automóvel. O seu valor P_1 após a primeira depreciação, isto é, após um ano, equivale a 95% do valor de P_0, pois a taxa de depreciação é de 5% ao ano. O valor P_2, correspondente ao valor do automóvel decorridos 2 anos, equivale a 95% de P_1. Utilizando a mesma ideia, podemos determinar o valor P_4 do automóvel, decorridos 4 anos, fazendo:

$P_1 = 0{,}95 \cdot P_0$

$P_2 = 0{,}95 \cdot P_1 = 0{,}95 \cdot \left(0{,}95 \cdot P_0\right) = \left(0{,}95\right)^2 \cdot P_0$

$P_3 = 0{,}95 \cdot P_2 = 0{,}95 \cdot \left(0{,}95\right)^2 \cdot P_0 = \left(0{,}95\right)^3 \cdot P_0$

$P_4 = 0{,}95 \cdot P_3 = 0{,}95 \cdot \left(0{,}95\right)^3 \cdot P_0 = \left(0{,}95\right)^4 \cdot P_0$

Nessas condições, o valor P_4 é:

$P_4 = \left(0{,}95\right)^4 \cdot P_0 \Rightarrow P_4 \simeq 0{,}81 \cdot 50\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow P_4 = 40\,500{,}00$

Logo, o valor do automóvel após 4 anos de uso é, aproximadamente, R$ 40 500,00.

Atividades

1. Represente no caderno as porcentagens em forma de frações irredutíveis e de números decimais.

a) 15%
b) 23%
c) 48%
d) 52%
e) 17%
f) 77%

2. Calcule no caderno os valores correspondentes em cada situação abaixo.

a) 23% de R$ 230,00
b) 48% de 250 kg
c) 45% de 8 000 m
d) 60% de 450 g
e) 72% de 2 L

3. No Brasil, pagamos impostos sobre tudo que compramos: alimentos, roupas, equipamentos eletrônicos, água, energia elétrica, etc. Imposto é uma taxa obrigatória paga ao governo (municipal, estadual ou federal) por todas as pessoas e empresas; em troca, o governo oferece serviços, como educação e saúde à população.

Ivone comprou um pacote com 4 rolos de papel higiênico por R$ 4,05 e verificou que sobre o papel higiênico é cobrado R$ 1,62 de impostos. Qual é a taxa do imposto relativa ao preço final do produto?

4. **Em grupo** Segundo os economistas, uma pessoa não deve comprometer mais de 30% de sua renda com dívidas. O ideal seria comprometer menos de 20% da renda; o comprometimento de mais de 40% da renda gera grandes chances de a pessoa não conseguir pagar suas dívidas em algum momento.

Considerem uma pessoa com renda mensal de R$ 1785,00, cujo gasto total com aluguel, água, energia elétrica, internet e fatura do cartão de crédito é de R$ 885,00.

a) As dívidas dessa pessoa representam que porcentagem aproximada de sua renda?

b) Em algum momento, pode acontecer de essa pessoa não conseguir pagar suas dívidas? Justifique.

c) Na opinião de vocês, que atitudes essa pessoa poderia tomar para economizar dinheiro?

5. (Uema) Em algumas atividades financeiras, o cálculo da porcentagem não é feito sobre o valor inicial, mas sobre o valor final. Esse cálculo é denominado porcentagem por dentro. O valor dos encargos da conta de luz é calculado por dentro, segundo a expressão:

$$\text{Valor da conta ao consumidor} = \frac{\text{Valor da Tarifa Definida pela ANEEL}}{1 - (\text{PIS}+\text{COFINS}+\text{ICMS})}$$

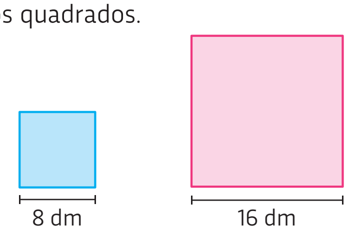
Fonte: ANEEL. *Por dentro da conta de luz*. Brasília: ANEEL, 2014.

Nessa expressão, o valor da tarifa é publicado pela Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), de acordo com o consumo, além dos tributos federais e estaduais recolhidos pela concessionária, respectivamente: Programa de Integração Social (PIS) com alíquota 1,65% e a Contribuição para Financiamento da Seguridade Social (CONFINS) com alíquota 7,6%; Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços (ICMS), com alíquota distinta para cada Estado.

Considerando o valor da tarifa definida pela ANEEL a um certo cliente em R$ 85,00, residente em um Estado com alíquota de ICMS regulamentada em 22,75%, o valor, em reais, dessa conta de luz ao consumidor, utilizando as alíquotas citadas e a fórmula da ANEEL, é igual a:

a) 110,00
b) 112,20
c) 117,00
d) 120,00
e) 125,00

6. Observe os quadrados.



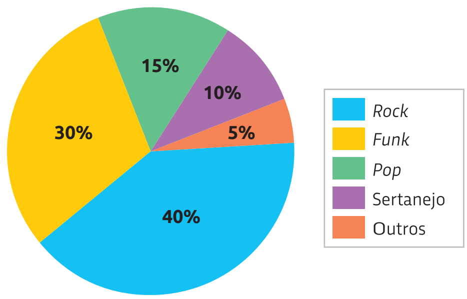
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

a) Qual é a área de cada um deles?

b) Que porcentagem da área do quadrado maior a área do quadrado menor representa?

7. Em uma escola foi realizada uma pesquisa com os 300 alunos a respeito do gênero musical preferido de cada um. O resultado foi apresentado no seguinte gráfico:

Preferência de gênero musical dos alunos da escola em 2017



Sergio Lima/ID/BR

Fonte de pesquisa: Direção da escola.

Determine no caderno a quantidade de alunos correspondente a cada categoria apresentada no gráfico.

8. A gasolina rende em torno de 32% a mais que o etanol no desempenho dos veículos, mas o etanol é mais barato que a gasolina. Quem possui veículo *flex* (que funciona com gasolina, etanol ou com a mistura deles) tem a possibilidade de abastecer com etanol quando o preço da gasolina está alto, mas isso nem sempre é vantajoso para o consumidor. Para saber quando é mais vantajoso para o consumidor, o cálculo é simples: o preço do etanol tem de ser menor do que ou igual a 70% do preço da gasolina, caso contrário, é mais vantajoso para o consumidor abastecer com gasolina.

Considere que o preço do litro da gasolina seja R$ 3,81 e o litro do etanol R$ 2,73.

a) A que porcentagem do preço da gasolina o preço do etanol corresponde aproximadamente?

b) Nesse caso, é mais vantajoso para o consumidor abastecer com etanol ou com gasolina? Justifique.

c) Fixando o valor do litro da gasolina em R$ 3,81, a partir de que valor do litro do etanol é mais vantajoso o consumidor abastecer com gasolina?

9. Em 2017, houve dois acréscimos no valor da energia elétrica de um país, um no mês de março, de 36,79%, e outro no mês de junho, de 15,32%.

a) Que porcentagem aproximada representa o total de acréscimos no valor pago pela energia elétrica nesse país?

b) Supondo que uma pessoa pagava em média R$ 80,00 por mês de energia elétrica nesse país, qual deve ser o valor a pagar por ela após os acréscimos?

10. (Enem/Inep) Uma ponte precisa ser dimensionada de forma que possa ter três pontos de sustentação. Sabe-se que a carga máxima suportada pela ponte será de 12 t. O ponto de sustentação central receberá 60% da carga da ponte, e o restante da carga será distribuído igualmente entre os outros dois pontos de sustentação.

No caso de carga máxima, as cargas recebidas pelos três pontos de sustentação serão, respectivamente,

a) 1,8 t; 8,4 t; 1,8 t

b) 3,0 t; 6,0 t; 3,0 t

c) 2,4 t; 7,2 t; 2,4 t

d) 3,6 t; 4,8 t; 3,6 t

e) 4,2 t; 3,6 t; 4,2 t

11. (PUC-RJ) Dois descontos sucessivos de 3% no preço de uma mercadoria equivalem a um único desconto de:

a) menos de 6%

b) 6%

c) entre 6% e 9%

d) 9%

e) mais de 9%

12. Um supermercado reajustou o preço de alguns alimentos. A batata-doce, cujo custo era R$ 4,05 o quilograma, sofreu três descontos sucessivos de 5%, 8% e 7%; e a ameixa, que custava R$ 6,89 o quilograma, sofreu três acréscimos sucessivos de 12%, 18% e 7%. Qual é o preço do quilograma desses alimentos após os reajustes?

13. Uma pessoa pagou um boleto bancário no valor de R$ 522,12 após 4 dias do vencimento. Por isso, foi acrescentada uma mesma taxa por dia de atraso e essa pessoa pagou um total de R$ 547,64.

a) Qual o valor aproximado da taxa cobrada por dia de atraso?

b) Se essa dívida fosse paga com 30 dias de atraso, qual seria seu valor aproximado?

14. Uma loja de eletrodomésticos está oferecendo 40% de descontos sobre o preço da etiqueta de alguns produtos. Uma pessoa decide comprar um forno de micro-ondas, cujo valor da etiqueta é R$ 385,00, e verifica que os pagamentos realizados em dinheiro têm mais 10% de desconto.

a) Qual é a taxa de desconto efetivo sobre os produtos pagos em dinheiro?

b) Sabendo que essa pessoa pagou o forno de micro-ondas em dinheiro, qual foi o valor pago por ela?

Orçamento familiar

A renda familiar é a soma dos salários e receitas de cada integrante dessa família. O ideal é conseguir pagar com o que se ganha tudo o que se consome e poupar parte da renda para algum planejamento futuro ou para ter uma reserva, caso aconteça algum imprevisto. Muitas famílias não conseguem poupar, pois acabam gastando tudo o que ganham e, pior, algumas gastam mais do que recebem, ficando endividadas. Para ajudar a organizar o orçamento familiar veja algumas recomendações que todos podem seguir.

1. Conhecer suas despesas

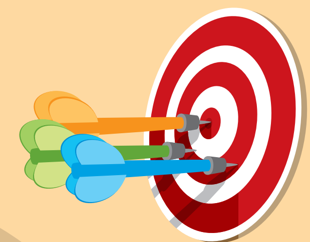
É importante para a organização financeira saber tudo o que se ganha e tudo o que se consome.

Uma estratégia é anotar diariamente cada gasto e no fim de um período maior, que pode ser um mês, verificar quanto foi gasto com chocolates ou balas, por exemplo. O que parece um valor tão pequeno, mas que se consumido todos os dias, no fim de um mês torna-se um valor considerável.

2. Reduzir gastos desnecessários

Após conhecer todas as despesas, é preciso separar o que é necessário do que não é. Alimentação, água e luz, por exemplo, são necessidades, mas tomar café na padaria todos os dias e comprar uma roupa nova todo mês não são tão essenciais assim. Hábitos desnecessários devem ser cortados para garantir economia e regular o orçamento.

3. Definir metas



Ilustrações: Rafael Luís Galon/ASC Imagens

Depois de conhecer as despesas e reduzir os gastos desnecessários, é hora de planejar. Defina um objetivo, algo que deseje adquirir, como um pacote turístico, por exemplo. Comece a poupar e, assim que atingir a meta, faça um novo projeto. Lembre-se de que imprevistos podem acontecer e por isso é importante não usar toda a reserva para satisfazer os desejos, deixando sempre um pouco guardado.

A Escreva exemplos de gastos que você considera necessários e de outros que considera supérfluos.

Supérfluo: o que não é necessário, mais que o suficiente.

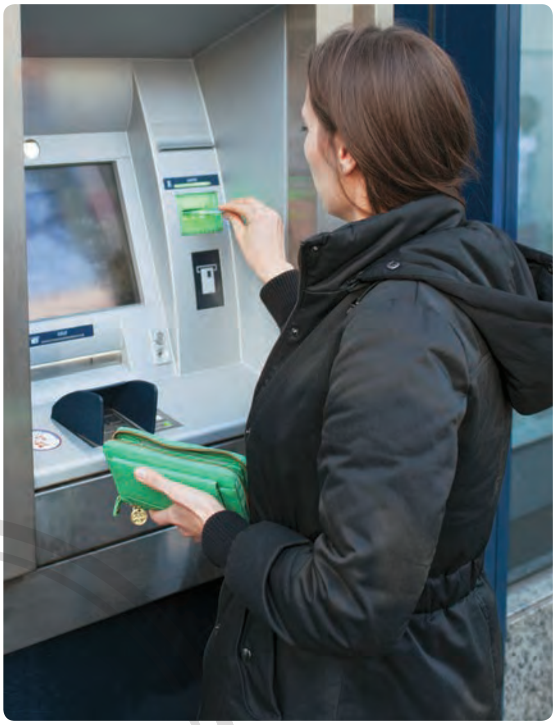
B Uma família tem uma renda mensal de R$ 3 200,00 e decide guardar 10% todo mês para comprar um aparelho de televisão e para ter uma reserva. Sabendo que o aparelho desejado custa R$ 800,00 e que pretendem reservar R$ 2 000,00, após quanto tempo terão a quantia da qual precisam?

A tradição de relacionar o porquinho com a poupança pode ter surgido do hábito de guardar dinheiro em vasinhos de argila chamados *pigg clay*, no século XVI. Pode, também, ter surgido da criação de porcos, desde a Idade Média, como fonte de renda familiar e chance de prosperidade.

Fernando Samaan Granzote/Shutterstock.com/ID/BR

Empréstimo e juro

Uma das operações mais básicas em matemática financeira é a do empréstimo, que pode ser de uma pessoa a uma instituição financeira ou o contrário. Imagine que uma pessoa vá a um banco e faça um depósito em sua conta poupança e, após um ano retire o valor depositado, acrescentado de uma remuneração por ter emprestado essa quantia ao banco. O valor depositado recebe o nome de capital (C) e a remuneração por esse depósito, juro (J). A soma do capital e do juro é chamada montante (M). Temos ainda a taxa de juro (i) que, neste caso, nos informa a taxa de aumento do capital em um dado período de tempo (t) (dia, mês, semestre, ano, etc.).


Adam Gregor/Shutterstock.com/ID/BR

mulher utilizando um caixa eletrônico

Juro simples

Vimos que a ideia de juro simples é utilizada em transações financeiras nas quais a taxa de juro é calculada sobre o capital. O montante de uma aplicação financeira no regime de juro simples é determinado por meio da expressão $M = C + C \cdot i \cdot t$, com a taxa de juro e o tempo na mesma unidade de tempo.

A expressão que determina o montante no regime de juro simples também pode ser escrita como $M = C \cdot (1 + i \cdot t)$.

A ideia de juro simples relaciona-se com a de função afim, pois temos a função $M: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $M(t) = C + C \cdot i \cdot t$, na qual o montante varia em função do tempo.

Observe que a função M está escrita na forma $f(x) = ax + b$.

Na função $M: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $M(t) = C + C \cdot i \cdot t$, qual é a taxa de variação? E o coeficiente linear?

Juro composto

Também vimos em anos anteriores o regime de juro composto. O montante de uma aplicação financeira no regime de juro composto, pode ser obtido aplicando sobre o capital, uma taxa i sucessivas vezes, durante um período t de tempo.

$$M = C \cdot \underbrace{(1 + i) \cdot (1 + i) \cdot \ldots \cdot (1 + i)}_{t \text{ vezes}}$$

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

A ideia de juro composto relaciona-se com a de função do tipo exponencial, pois temos a função $M: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $M(t) = C \cdot (1 + i)^t$, sendo C um número real positivo diferente de 1, $(1 + i)$ um número real positivo e t um número natural.

Para efeitos de comparação, considere uma aplicação de R$ 1000,00 a uma taxa de juro de 15% ao ano, por 5 anos. Após esse período, qual será o montante no regime de juro simples? E no regime de juro composto? Ao responder a essas perguntas, podemos organizar os cálculos em um quadro, obtendo os montantes ano a ano.

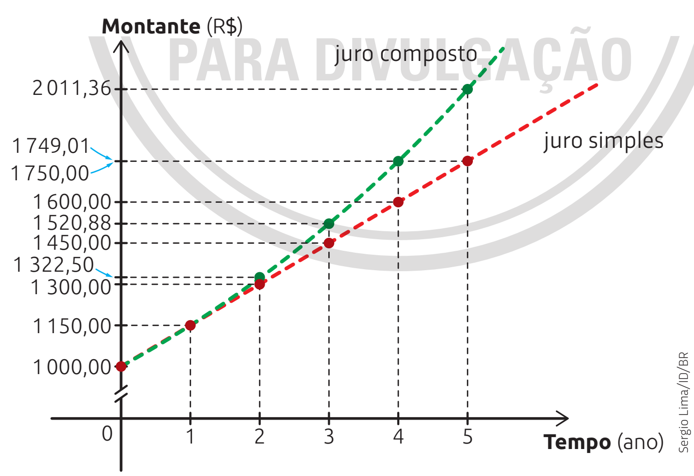
Lembre-se de que a taxa de juro e o tempo de aplicação devem estar na mesma unidade de medida de tempo. Além disso, a taxa de juro é representada na forma de número decimal.

Tempo (ano)	Montante no regime de juro simples (R$)	Montante no regime de juro composto (R$)
$t = 0$	$M = 1000 + 1000 \cdot 0{,}15 \cdot 0 = 1000$	$M = 1000 \cdot (1 + 0{,}15)^0 = 1000$
$t = 1$	$M = 1000 + 1000 \cdot 0{,}15 \cdot 1 = 1150$	$M = 1000 \cdot (1 + 0{,}15)^1 = 1150$
$t = 2$	$M = 1000 + 1000 \cdot 0{,}15 \cdot 2 = 1300$	$M = 1000 \cdot (1 + 0{,}15)^2 = 1322{,}5$
$t = 3$	$M = 1000 + 1000 \cdot 0{,}15 \cdot 3 = 1450$	$M = 1000 \cdot (1 + 0{,}15)^3 \simeq 1520{,}88$
$t = 4$	$M = 1000 + 1000 \cdot 0{,}15 \cdot 4 = 1600$	$M = 1000 \cdot (1 + 0{,}15)^4 \simeq 1749{,}01$
$t = 5$	$M = 1000 + 1000 \cdot 0{,}15 \cdot 5 = 1750$	$M = 1000 \cdot (1 + 0{,}15)^5 \simeq 2011{,}36$

Após 5 anos nessa aplicação, o montante no regime de juro simples será R$ 1750,00 e no regime de juro composto, aproximadamente, R$ 2011,36.

Perceba que para $t = 0$ e $t = 1$, o montante obtido em cada uma das aplicações é o mesmo. A partir de $t = 2$, o montante no regime de juro composto é maior do que o verificado no regime de juro simples.

Podemos representar geometricamente a variação do montante em função do tempo, seja no regime de juro simples ou no de juro composto.



As linhas pontilhadas entre os pontos indicam uma tendência de crescimento do montante. Como os domínios de ambas as funções estão definidos no conjunto dos números naturais, não é correto ligar esses pontos nem atribuir valores negativos à variável independente, que nos dois casos é o tempo de duração da aplicação.

Ao analisar o quadro e o gráfico acima, observe que os valores do montante no regime de juro:

- simples formam uma PA, neste caso, uma progressão cuja razão é $1000 \cdot 0{,}15 = 150$ e o primeiro termo é 1000;
- composto formam uma PG, neste caso, uma progressão cuja razão é 1,15 e o primeiro termo é 1000.

Atividades resolvidas

R4. Após um período de 3 meses e a uma taxa de 4% de juro ao mês, o montante de um empréstimo era R$ 560,00. Determine o capital no caso em que o regime seja de:

a) juro simples

b) juro composto

Resolução

Considere C_1 e C_2 como sendo o capital do empréstimo no regime de juro simples e no de juro composto, respectivamente.

a) Do enunciado, temos que $t = 3$, $i = 4\% = 0{,}04$ e $M(3) = 560$. No regime de juro simples, o montante é dado por $M(t) = C + C \cdot i \cdot t$. Assim:

$$M(t) = C + C \cdot i \cdot t$$

$$560 = C_1 + C_1 \cdot 0{,}04 \cdot 3$$

$$560 = C_1 + C_1 \cdot 0{,}12$$

$$560 = C_1 \cdot (1 + 0{,}12)$$

$$560 = 1{,}12 \cdot C_1$$

$$C_1 = 500$$

Portanto, nesse caso, o capital do empréstimo era R$ 500,00.

b) No caso do regime de juro composto, fazemos:

$$M(t) = C \cdot (1 + i)^t$$

$$560 = C_2 \cdot (1 + 0{,}04)^3$$

$$560 = C_2 \cdot (1{,}04)^3$$

$$C_2 = \frac{560}{(1{,}04)^3}$$

$$C_2 \simeq 497{,}84$$

Portanto, o capital aplicado nesse caso era, aproximadamente, R$ 497,84.

R5. Duas taxas de juro se dizem equivalentes quando, aplicadas em capitais iguais, produzem juro iguais (e montantes iguais) em tempos iguais. Determine as taxas equivalentes em cada caso.

a) Um capital de R$ 2 400,00 foi investido a juro simples pelo prazo de 2 anos, produzindo um montante de R$ 3 552,00. A que taxa anual esteve aplicado esse capital? Qual é a taxa mensal equivalente nesse caso?

b) Sob o regime de juro composto, um capital de R$ 1 200,00 foi investido a uma taxa de 3% ao mês pelo prazo de 3 anos. Calcule o montante e a taxa de juro anual equivalente para esse capital.

Resolução

a) Calculamos a taxa i_1 de juro anual da seguinte maneira:

$$M(t) = C + C \cdot i \cdot t$$

$$3\,552 = 2\,400 + 2\,400 \cdot i_1 \cdot 2$$

$$i_1 = \frac{3\,552 - 2\,400}{2\,400 \cdot 2}$$

$$i_1 = 0{,}24$$

Como 2 anos equivalem a 24 meses, para calcular a taxa i_2 de juro mensal fazemos:

$$M(t) = C + C \cdot i \cdot t$$

$$3\,552 = 2\,400 + 2\,400 \cdot i_2 \cdot 24$$

$$i_2 = \frac{3\,552 - 2400}{2400 \cdot 24}$$

$$i_2 = 0{,}02$$

Portanto, as taxas $i_1 = 24\%$ a.a. (ao ano) e $i_2 = 2\%$ a.m. (ao mês) são equivalentes neste caso.

b) Sabendo que 3 anos equivalem a 36 meses, temos:

$$M(t) = C \cdot (1 + i)^t$$

$$M(36) = 1200 \cdot (1{,}03)^{36}$$

$$M(36) \simeq 3\,477{,}93$$

Desse modo, o montante é R$ 3 477,93. Assim, a taxa de juro anual i para $t = 3$ é:

$$M(t) = C \cdot (1 + i)^t$$

$$3\,477{,}93 = 1200 \cdot (1 + i)^3$$

$$(1 + i)^3 = \frac{3\,477{,}93}{1200}$$

$$1 + i \simeq \sqrt[3]{2{,}9}$$

$$1 + i \simeq 1{,}43 \Rightarrow i \simeq 0{,}43$$

Portanto, a taxa de juro composto de 3% a.m. é equivalente à taxa de 43% a.a. para esse caso.

R6. Determine a taxa anual de juro composto de um investimento de R$ 100 000,00, num período de 4 anos, que obteve um montante de R$ 160 000,00 nesse período.

Resolução

Para determinar a taxa i, fazemos:

$$M(t) = C \cdot (1 + i)^t$$

$$160\,000 = 100\,000 \cdot (1 + i)^4$$

$$\frac{160\,000}{100\,000} = (1 + i)^4$$

$$(1 + i)^4 = 1{,}6$$

$$1 + i = \sqrt[4]{1{,}6}$$

$$1 + i \simeq 1{,}1247$$

$$i \simeq 0{,}1247$$

Portanto, a taxa de juro composto nesse caso foi de aproximadamente 12,47% a.a.

R7. Investindo certo capital a juro mensal de 7% no regime de juro composto, após quanto tempo, no mínimo, obteremos o triplo do capital investido?

Resolução

Sendo C o capital investido, $3C$ corresponderá ao triplo do capital. Queremos determinar t tal que $M(t) = 3C$. Assim, como o regime é de juro composto, temos:

$$M(t) = C \cdot (1 + i)^t$$

$$3\cancel{C} = \cancel{C} \cdot (1 + 0{,}07)^t$$

$$3 = (1{,}07)^t$$

$$\log 3 = \log (1{,}07)^t$$

$$\log 3 = t \cdot \log 1{,}07$$

$$t = \frac{\log 3}{\log 1{,}07}$$

$$t \simeq 16{,}24$$

Portanto, obteremos o triplo do capital investido ao final de 17 meses, equivalente a 1 ano e 5 meses.

Atividades

15. Se uma pessoa investe R$ 3 457,00 a juro simples, qual deve ser o montante após:

a) 3 anos a uma taxa de 5% a.a.?

b) 4 anos e 7 meses a uma taxa de 2,6% a.m.?

c) 8 meses a uma taxa de 4,3% a.a.?

16. Sob o regime de juro simples, Aline depositou R$ 4 623,00 em um fundo de investimento. Depois de 3 anos e 4 meses, ela obteve um montante de R$ 5 898,95. Qual foi a taxa mensal de juro desse fundo de investimento?

Fundo de investimento: maneira organizada de reunir e investir coletivamente capital sobre empresas.

17. (Uepa) Um agricultor financiou junto a uma cooperativa os insumos utilizados na lavoura em 2014. Pagou 20% do valor dos insumos no ato da compra, utilizando parte do lucro obtido no ano anterior, e financiou o restante em 10 meses a uma taxa de 2% ao mês a juros simples. Observou que havia gastado o montante de R$ 208 800,00 com a parte financiada. Neste caso, o valor financiado dos insumos pelo agricultor foi de:

a) R$ 217 500,00

b) R$ 174 000,00

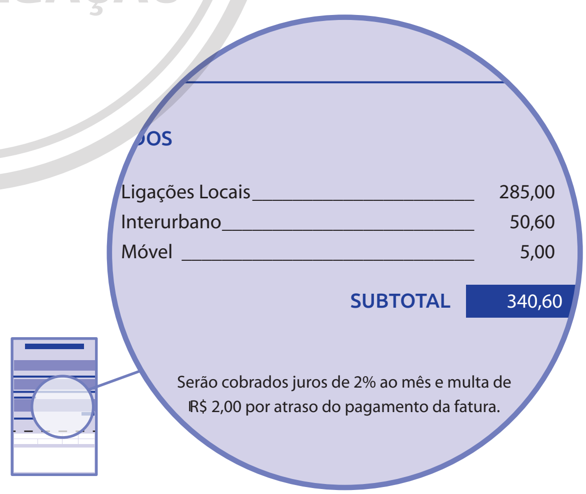
c) R$ 164 000,00

d) R$ 144 000,00

e) R$ 136 000,00

18. Em certa fatura telefônica, quando há atraso no pagamento é cobrado juro de mora. Veja parte de uma dessas faturas.

Juro de mora: taxa paga pelo devedor por não cumprir o prazo de vencimento da dívida.



Eduardo dos Santos/ASC Imagens

O valor dessa fatura é de R$ 340,60, e houve um atraso de 14 dias para pagá-la. Sabendo que o juro de mora é calculado no regime de juro simples, determine:

a) quanto será cobrado de juro?

b) qual é o valor devido acrescentado de multas e juro?

19. Em grupo Maria analisa duas possibilidades para investir seu capital de R$ 1 480,00 por 3 anos e 4 meses.

I) investimento rende uma taxa de juro composto de 1% a.m.

II) investimento rende uma taxa de juro composto de 15% a.a.

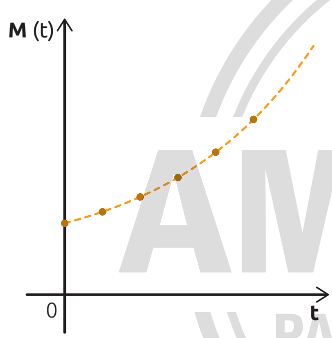
a) Qual proposta lhes pareceu mais vantajosa? Justifiquem.

b) Qual é o montante de cada uma das propostas?

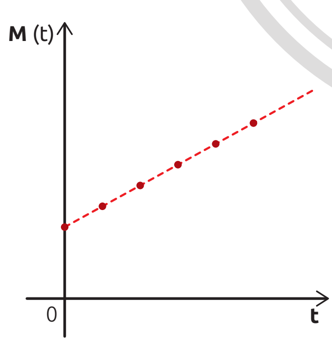
c) A proposta que lhes pareceu ser a mais vantajosa é a que apresenta o maior rendimento? Justifiquem.

20. Os gráficos a seguir representam o montante de duas aplicações de um mesmo capital, sendo uma aplicação no regime de juro simples e outra no regime de juro composto.

I)



II)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Qual dos gráficos representa o montante no regime de juro:

a) simples? Justifique.

b) composto? Justifique.

21. Eliane pegou emprestado certa quantia em dinheiro de uma instituição financeira, pelo prazo de 9 meses, a uma taxa de juro composto de 8,5% a.m., pagando ao final do empréstimo um total de R$ 5 209,64. Qual foi o valor que ela tomou emprestado?

22. Se uma pessoa deseja aplicar em um fundo de renda fixa que utiliza o regime de juro composto a uma taxa de 20% a.a., qual deve ser o capital aplicado para obter R$ 2 200,00 ao final de três anos?

23. Leonardo abriu uma conta poupança na qual depositou R$ 320,00. Esse investimento lhe rende juro composto e, depois de 24 meses, ele possuía um montante de R$ 360,70. Determine no caderno a taxa de juro mensal dessa poupança.

24. Ferramentas Angélica pretende quadruplicar seu dinheiro investindo-o em um fundo que lhe rende juro composto de 6,3% a.m. Em quantos meses, no mínimo, ela atingirá seu objetivo?

25. Ao final de 10 meses, uma pessoa pagou R$ 683,83 de juro por um empréstimo feito a uma taxa de juro composto de 2,6% a.m. Qual foi o capital que essa pessoa pegou emprestado?

26. Um investidor aplicou um total de R$ 3 000,00 em duas instituições financeiras diferentes que operam sob o regime de juro composto. Na instituição **A**, a taxa de juro é 6% a.m.; na instituição **B**, a taxa de juro é 3% a.m. Se após um mês o investidor obtiver o mesmo capital em ambas as aplicações, determine o capital aplicado em cada instituição financeira.

27. Desafio (UFSM-RS) Uma empresa de cartão de crédito opera com juros compostos de 6% ao mês. Um usuário dessa empresa contraiu uma dívida de R$ 2 000,00 e, durante 6 meses, não pôde efetuar o pagamento. Ao procurar a empresa para renegociar a dívida, a empresa propôs que fosse quitada em uma única parcela, com juros simples de 5% ao mês, referentes aos 6 meses de atraso.

Aceita a proposta, o total de juros pagos e o desconto obtido, em reais, são, respectivamente, iguais a

a) 600,00 e 117,00

b) 600,00 e 120,00

c) 600,00 e 237,00

d) 720,00 e 117,00

e) 720,00 e 120,00

Dado: $(1,06)^6 \simeq 1,4185$

28. Arnaldo e Luiz aplicaram, cada um, R$ 5 000,00 por 3 meses. Sobre a aplicação de Arnaldo incidiu uma taxa de 6% a.m. a juro simples e sobre a de Luiz, outra taxa mensal a juro composto. Se os dois obtiveram o mesmo montante ao final do período, qual foi a taxa de juro aproximada em que Luiz aplicou seu dinheiro?

Não escreva no livro.

Sistemas de amortização

Quando você ou alguém de sua casa precisa comprar determinado bem ou produto, qual tipo de pagamento prefere: à vista ou a prazo? Em geral, o melhor seria se pudéssemos comprar à vista, mas, em algumas situações, a compra a prazo se faz necessário.

Fresh Meat Media LLC/Getty Images

A compra de um imóvel a prazo exige um rigoroso planejamento familiar, pois as prestações assumidas costumam comprometer boa parte da renda familiar durante um longo período de tempo.

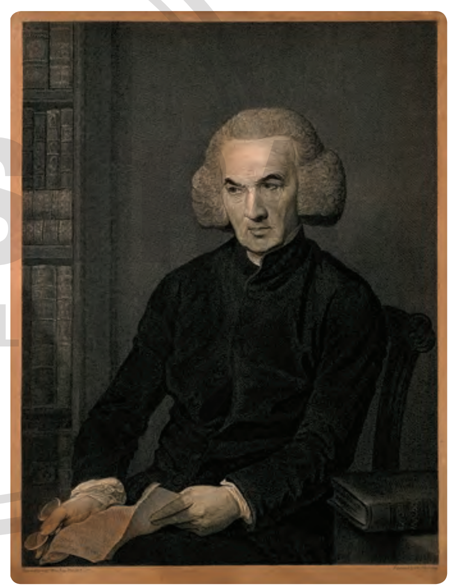
Nesses casos, nos deparamos principalmente com duas maneiras de quitar (amortizar) a dívida: o **sistema Price** e o **sistema de amortização constante (SAC)**.

Sistema Price

O sistema de amortização conhecido como sistema Price foi desenvolvido pelo inglês Richard Price, cujo campo de estudos envolvia matemática, filosofia, política e economia. A principal característica desse sistema é que as prestações possuem um valor fixo, sendo amplamente utilizado na compra a prazo de bens de consumo, como eletrodomésticos, roupas, automóveis, pacotes de viagens, etc.

Para determinar o valor P de cada prestação nesse sistema, utiliza-se a seguinte fórmula, em que C é o valor do produto ou do empréstimo, i a taxa de juro e n a quantidade de prestações.

$$P = \frac{C \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$



Coleção particular. Fotografia: Wellcome Images CC/Diomedia

Richard Price (1723-1791).
HOLLOWAY, T. Técnica: gravura.

Nessa fórmula, que pode ser demonstrada, P corresponde à prestação que faz o valor final da dívida ser zerado no fluxo de caixa, como o apresentado na página seguinte.

Considere um empréstimo no valor de R$ 36 500,00 a uma taxa de juro de 8% ao mês, que deverá ser pago em 6 prestações mensais de mesmo valor cada uma. Pela fórmula, temos:

$$P = \frac{36\,500 \cdot 0{,}08}{1 - (1 + 0{,}08)^{-6}} \simeq 7\,895{,}51$$

O valor de P foi obtido utilizando a calculadora científica.

Logo, o valor de cada prestação será R$ 7 895,51.

No quadro a seguir, podemos observar o juro pago em cada prestação e o valor amortizado mês a mês.

Os valores apresentados no quadro foram aproximados até a segunda casa decimal. Em situações reais de empréstimos, podem incidir outras taxas e cobranças, alterando assim o valor de cada uma das prestações.

n	Prestação (R$)	Juro (R$)	Valor amortizado (R$)	Saldo devedor (R$)
0	—	—	—	36 500,00
1	7 895,51	$\underbrace{2\,920{,}00}_{8\%\text{ de }36\,500{,}00}$	$\underbrace{4\,975{,}51}_{7\,895{,}51\,-\,2\,920{,}00}$	$\underbrace{31\,524{,}49}_{36\,500{,}00\,-\,4\,975{,}51}$
2	7 895,51	$\underbrace{2\,521{,}96}_{8\%\text{ de }31\,524{,}49}$	$\underbrace{5\,373{,}55}_{7\,895{,}51\,-\,2\,521{,}96}$	$\underbrace{26\,150{,}94}_{31\,524{,}49\,-\,5\,373{,}55}$
3	7 895,51	$\underbrace{2\,092{,}07}_{8\%\text{ de }26\,150{,}94}$	$\underbrace{5\,803{,}44}_{7\,895{,}51\,-\,2\,092{,}07}$	$\underbrace{20\,347{,}50}_{26\,150{,}94\,-\,5\,803{,}44}$
4	7 895,51	1 627,80	6 267,71	14 079,79
5	7 895,51	1 126,38	6 769,13	7 310,66
6	7 895,51	584,85	7 310,66	0

Como é calculado sobre o saldo devedor, o juro nas prestações iniciais são maiores do que nas últimas. Com o valor amortizado acontece o inverso, ou seja, o valor utilizado para quitar efetivamente o empréstimo aumenta conforme o tempo passa. Na sexta e última parcela, o valor amortizado é igual ao saldo devedor do período anterior.

Sistema de amortização constante (SAC)

No SAC, como o próprio nome diz, o valor amortizado em cada prestação é constante e o valor das prestações diminui com o tempo. Este sistema é amplamente utilizado em financiamento habitacional e imobiliário, pois tem-se a sensação de cada vez pagar menos.

Suponha um empréstimo no valor de R$ 25 000,00 a uma taxa de juro de 6% ao mês, com o pagamento em 5 prestações. Como a amortização é constante, o valor amortizado em cada prestação é $\underbrace{\text{R\$ }5\,000{,}00}_{25\,000\,:\,5}$.

No quadro a seguir, podemos observar o valor de cada prestação e o saldo devedor após cada pagamento.

Em situações reais de empréstimos, podem incidir outras taxas e cobranças que alteram o valor das prestações.

n	Valor amortizado (R$)	Juro (R$)	Prestação (R$)	Saldo devedor (R$)
0	—	—	—	25 000,00
1	5 000,00	$\underbrace{1\,500{,}00}_{6\%\text{ de }25\,000{,}00}$	$\underbrace{6\,500{,}00}_{5\,000{,}00\,+\,1\,500{,}00}$	$\underbrace{20\,000{,}00}_{25\,000{,}00\,-\,5\,000{,}00}$
2	5 000,00	$\underbrace{1\,200{,}00}_{6\%\text{ de }20\,000{,}00}$	$\underbrace{6\,200{,}00}_{5\,000{,}00\,+\,1\,200{,}00}$	$\underbrace{15\,000{,}00}_{20\,000{,}00\,-\,5\,000{,}00}$
3	5 000,00	$\underbrace{900{,}00}_{6\%\text{ de }15\,000{,}00}$	$\underbrace{5\,900{,}00}_{5\,000{,}00\,+\,900{,}00}$	$\underbrace{10\,000{,}00}_{15\,000{,}00\,-\,5\,000{,}00}$
4	5 000,00	600,00	5 600,00	5 000,00
5	5 000,00	300,00	5 300,00	0

Observe que os valores do juro e das prestações formam, cada um deles, uma PA, ambas com a razão igual a −300. Os valores do saldo devedor também formam uma PA, porém, neste caso, a razão é o valor amortizado em cada prestação, isto é, −5 000.

R8. Certa empresa financeira realizou um empréstimo no valor de R$ 270 000,00 a ser pago em 4 anos, a uma taxa de juro de 10% ao ano no sistema Price.

a) Construa um quadro contendo o valor da prestação (P), o juro (J), o valor amortizado (VA) e o saldo devedor (SD) para cada prestação (n).

b) Construa um gráfico de barras verticais que represente o juro (J) e o valor amortizado (VA) a cada prestação (P).

Resolução

a) O valor P é dado por:

$$P = \frac{C \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}} = \frac{270\,000 \cdot 0{,}1}{1 - (1 + 0{,}1)^{-4}} \simeq 85\,177{,}12$$

Para $n = 1$, temos:

- $J_1 = i \cdot SD_0 = 0{,}1 \cdot 270\,000 = 27\,000$
- $VA_1 = P - J_1 = 85\,177{,}12 - 27\,000 = 58\,177{,}12$
- $SD_1 = SD_0 - VA_1 = 270\,000 - 58\,177{,}12 = 211\,822{,}88$

Para $n = 2$, temos:

- $J_2 = i \cdot SD_1 = 0{,}1 \cdot 211\,822{,}88 \simeq 21\,182{,}29$
- $VA_2 = P - J_2 = 85\,177{,}12 - 21\,182{,}29 = 63\,994{,}83$
- $SD_2 = SD_1 - VA_2 = 211\,822{,}88 - 63\,994{,}83 = 147\,828{,}05$

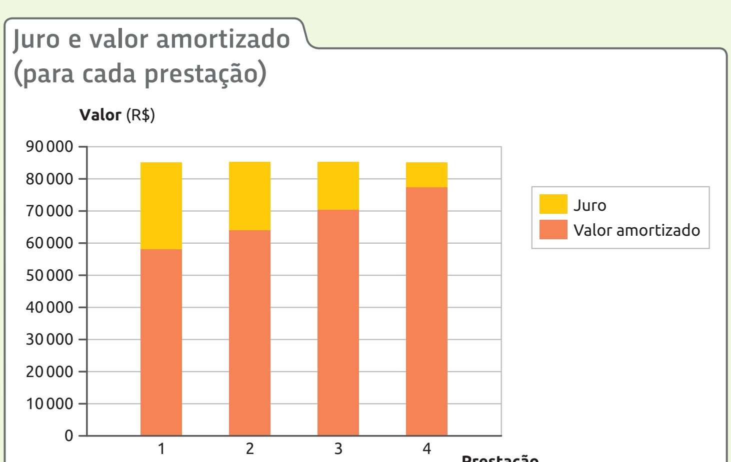
Dessa maneira, para uma parcela n qualquer, temos:

- $J_n = i \cdot SD_{n-1}$
- $VA_n = P - J_n$
- $SD_n = SD_{n-1} - VA_n$

O quadro abaixo apresenta os valores de juro, amortização e saldo devedor para as 4 parcelas, de acordo com o enunciado.

n	P (R$)	J (R$)	VA (R$)	SD (R$)
0	—	—	—	270 000,00
1	85 177,12	27 000,00	58 177,12	211 822,88
2	85 177,12	21 182,29	63 994,83	147 828,05
3	85 177,12	14 782,80	70 394,32	77 433,73
4	85 177,12	7 743,37	77 433,73	0

b)



Sergio Lima/ID/BR

Fonte de pesquisa: Empresa Financeira.

R9. Compare as formas de amortização de uma dívida no valor de R$ 2 400,00, à taxa de 7% ao mês, ao prazo de 6 meses, nos sistemas Price e SAC.

Resolução

Vamos comparar a amortização dessa dívida utilizando quadros.

- Sistema Price

$$P = \frac{C \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}} = \frac{2\,400 \cdot 0{,}07}{1 - (1 + 0{,}07)^{-6}} \simeq 503{,}51$$

n	Prestação (R$)	Juro (R$)	Valor amortizado (R$)	Saldo devedor (R$)
0	—	—	—	2 400,00
1	503,51	$\underbrace{168{,}00}_{7\%\text{ de } 2\,400{,}00}$	$\underbrace{335{,}51}_{503{,}51 - 168{,}00}$	$\underbrace{2\,064{,}49}_{2\,400{,}00 - 335{,}49}$
2	503,51	$\underbrace{144{,}51}_{7\%\text{ de } 2\,064{,}49}$	$\underbrace{359{,}00}_{503{,}51 - 144{,}51}$	$\underbrace{1\,705{,}49}_{2\,064{,}49 - 359{,}00}$
3	503,51	$\underbrace{119{,}38}_{7\%\text{ de } 1\,705{,}49}$	$\underbrace{384{,}13}_{503{,}51 - 119{,}38}$	$\underbrace{1\,321{,}36}_{1\,705{,}49 - 384{,}13}$
4	503,51	92,50	411,01	910,35
5	503,51	63,73	439,78	470,57
6	503,51	32,94	470,57	0

- Sistema SAC

Valor amortizado: $\dfrac{\text{Saldo devedor}}{\text{Quantidade de prestação}} = \dfrac{2\,400}{6} = 400$

n	Valor amortizado (R$)	Juro (R$)	Prestação (R$)	Saldo devedor (R$)
0	—	—	—	2 400,00
1	400,00	$\underbrace{168{,}00}_{7\%\text{ de } 2\,400{,}00}$	$\underbrace{568{,}00}_{400{,}00 + 168{,}00}$	$\underbrace{2\,000{,}00}_{2\,400{,}00 - 400{,}00}$
2	400,00	$\underbrace{140{,}00}_{7\%\text{ de } 2\,000{,}00}$	$\underbrace{540{,}00}_{400{,}00 + 140{,}00}$	$\underbrace{1\,600{,}00}_{2\,000{,}00 - 400{,}00}$
3	400,00	$\underbrace{112{,}00}_{7\%\text{ de } 1\,600{,}00}$	$\underbrace{512{,}00}_{400{,}00 + 112{,}00}$	$\underbrace{1\,200{,}00}_{1\,600{,}00 - 400{,}00}$
4	400,00	84,00	484,00	800
5	400,00	56,00	456,00	400
6	400,00	28,00	428,00	0

Com base nesses quadros, podemos comparar algumas características de cada sistema de amortização com o seguinte esquema:

	Price	SAC
Prestações	constantes	decrescentes
Valores amortizados	crescentes	constantes
Saldo devedor	O decréscimo aumenta de prestação em prestação.	O decréscimo é constante.

Atividades

29. Observe os quadros **I** e **II**.

I)

n	Valor amortizado (R$)	Juro (R$)	Prestação (R$)	Saldo devedor (R$)
0	—	—	—	420 000,00
1	1 400,00	3 465,00	4 865,00	418 600,00
2	1 400,00	3 453,45	4 853,45	417 200,00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
299	1 400,00	23,10	1 423,10	1 400,00
300	1 400,00	11,55	1 411,55	0

II)

n	Prestação (R$)	Juro (R$)	Valor amortizado (R$)	Saldo devedor (R$)
0	—	—	—	420 000,00
1	3 786,97	3 465,00	321,97	419 678,03
2	3 786,97	3 462,34	324,63	419 353,40
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
299	3 786,97	61,72	3 725,25	3 755,98
300	3 786,97	30,99	3 755,98	0

a) Qual dos quadros representa um financiamento realizado com o sistema:

- Price?
- de amortização constante (SAC)?

b) Em ambos os quadros, qual é:

- o valor financiado?
- a taxa de juro?

c) De acordo com o quadro do SAC, qual valor deve corresponder:

- à 4ª prestação?
- ao 297º saldo devedor?

d) De acordo com o quadro do sistema Price, qual valor deve corresponder:

- ao 5º juro?
- ao 298º saldo devedor?

30. Observe o anúncio.

Supondo que o parcelamento seja realizado pelo sistema Price, determine:

a) o valor de cada parcela;

b) o valor total pago ao longo do financiamento;

c) o total de juro.

Fotomontagem de Rafael Luís Gaion criada com a fotografia DanielDante/Shutterstock.com/ID/BR

31. Igor pretende realizar um financiamento, pois quer comprar um terreno no valor de R$ 150 000,00, parcelado em 240 prestações mensais, com juro de 5% ao ano. Para efetivar o empréstimo, foi estabelecida uma entrada de 20% do valor financiado. Supondo que o financiamento seja pelo sistema de amortização constante (SAC), determine:

a) o valor amortizado em cada prestação;

b) o valor da primeira e da última prestação;

c) o total de juro;

d) o total pago para quitar o financiamento.

capítulo 8

Área de figuras planas

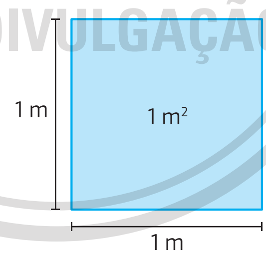
Conceito de área

Ao comprar um terreno, o comprador presta atenção em sua área, geralmente dada em metros quadrados (m^2). Essa medida expressa o tamanho da superfície disponível para a construção, que pode incluir, além de uma casa, uma garagem, um quintal, uma piscina, etc.

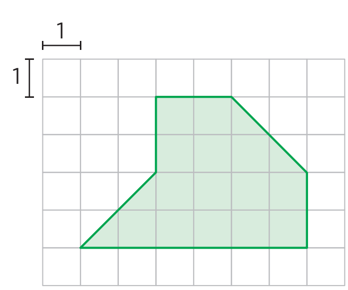
Fotomontagem de Rafael Luís Gaion criada com Ball00025/Shutterstock.com/ID/BR

O baixo custo de manutenção, a valorização com o passar dos anos e a estabilidade são alguns aspectos que favorecem a compra de lotes como uma maneira de investimento, seja para moradia ou como alternativa de renda.

Para cada unidade de comprimento, podemos definir uma unidade de área. Ao considerar o metro (m) como unidade de comprimento, por exemplo, utilizamos o quadrado cujos lados medem 1 m como unidade de área. Por definição, esse quadrado tem 1 m^2 de área.



Um quadrado cujos lados medem uma unidade de comprimento é denominado quadrado unitário. De modo informal, dizemos que a área de uma região do plano corresponde à quantidade de vezes que o quadrado unitário "cabe" nessa região. Na figura a seguir, cada quadradinho da malha representa um quadrado unitário.



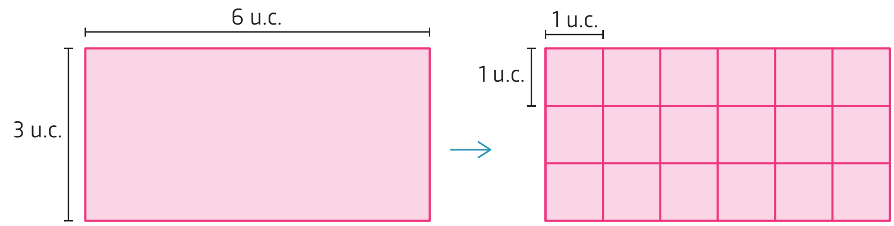
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

A área da região em verde corresponde a 16 unidades de área (u.a.).

Área de polígonos

Área do retângulo

Suponha que um retângulo tenha lados de 6 e 3 unidades de comprimento (u.c.). Esse retângulo pode ser decomposto em $6 \cdot 3$ quadrados unitários.

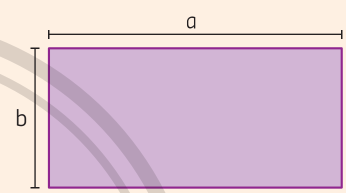


Logo, a área desse retângulo é $\underbrace{18}_{6 \cdot 3}$ unidades de área. Ela pode ser obtida multiplicando-se as medidas do comprimento e da largura do retângulo.

Pode-se demonstrar que a área A do retângulo é dada por $A = a \cdot b$, sendo a e b as medidas do comprimento e da largura do retângulo, respectivamente. Essa fórmula é válida para qualquer valor real positivo de a e de b.

A área A de um retângulo de comprimento a e largura b é dada por:

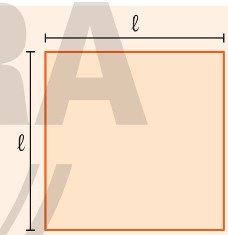
$$A = a \cdot b$$



Em particular, como todo quadrado é um retângulo cujos lados possuem medidas iguais, a fórmula para o cálculo da área de um quadrado qualquer é dada ao lado.

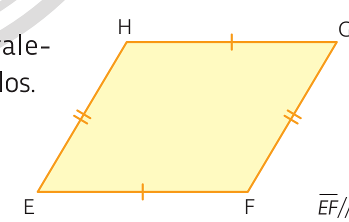
A área A de um quadrado cujo lado mede ℓ é dada por:

$$A = \ell^2$$



Área do paralelogramo

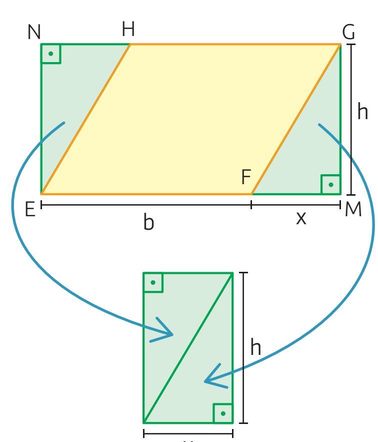
Provavelmente você já estudou em anos anteriores que paralelogramo é todo quadrilátero com dois pares de lados opostos paralelos. Em um paralelogramo, lados opostos são congruentes entre si.



$\overline{EF} // \overline{HG}$ e $\overline{FG} // \overline{EH}$

Seja $EFGH$ um paralelogramo cuja base mede b e altura mede h. Ele determina o retângulo $EMGN$, cujos lados medem $(b + x)$ e h.

Ao adicionar a área do paralelogramo $EFGH$ com as áreas dos triângulos EHN e FMG, obtemos a área do retângulo $EMGN$. Observe que os dois triângulos correspondem às duas metades de um retângulo de lados medindo x e h.



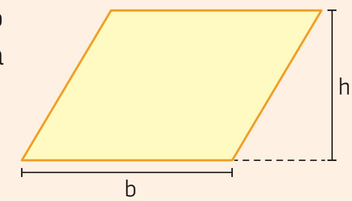
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Assim, denotando por A a área do paralelogramo $EFGH$, temos:

$$A + \underbrace{x \cdot h}_{\substack{\text{área dos} \\ \text{triângulos}}} = \underbrace{(b + x) \cdot h}_{\substack{\text{área do} \\ \text{retângulo } EMGN}} \Rightarrow A + x \cdot h = b \cdot h + x \cdot h \Rightarrow A = b \cdot h$$

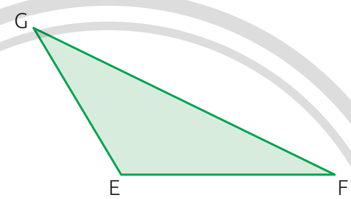
A área A de um paralelogramo cuja base mede b e cuja altura mede h é dada por:

$$A = b \cdot h$$



Área do triângulo

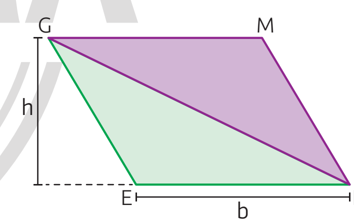
Considere um triângulo EFG qualquer.



Podemos traçar por F um segmento de reta paralelo a $\overline{EG}$ e, a partir de G, um segmento paralelo a $\overline{EF}$ de modo que esses segmentos possuam uma extremidade comum M. O quadrilátero $EFMG$ será, então, um paralelogramo, pois os lados opostos são paralelos.

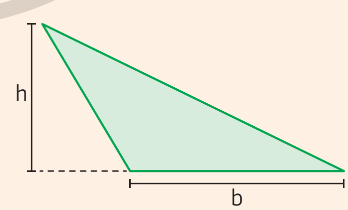
Os triângulos EFG e MGF são congruentes, pois $EF = MG$, $GE = FM$ e $\overline{FG}$ é um lado comum (caso LLL de congruência de triângulos). Logo, a área A do triângulo EFG corresponde à metade da área do paralelogramo $EFMG$, ou seja:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

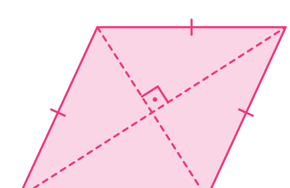


A área A de um triângulo cuja base mede b e cuja altura mede h é dada por:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



Área do losango



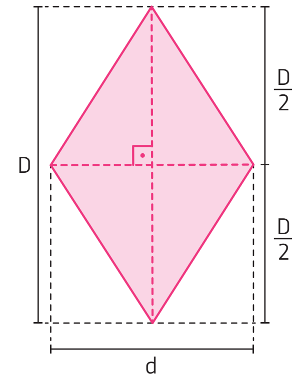
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Provavelmente você também estudou que o losango é um paralelogramo cujos quatro lados possuem medidas iguais. As diagonais de um losango são perpendiculares e se intersectam em seus respectivos pontos médios.

Como todo losango é um paralelogramo, o cálculo de sua área pode ser realizado com a fórmula da área do paralelogramo, ou seja, multiplicando-se a medida da base pela medida da altura. Porém, deduziremos uma fórmula específica para o losango.

Não escreva no livro.

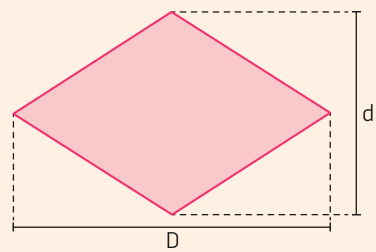
Vamos indicar por D a medida da diagonal maior e por d a medida da diagonal menor do losango. Podemos decompor esse losango em dois triângulos com base medindo d e altura medindo $\frac{D}{2}$. Logo, a área do losango é dada por:



$$A = 2 \cdot \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{d \cdot D}{2}$$

A área A de um losango cujas diagonais medem D e d é dada por:

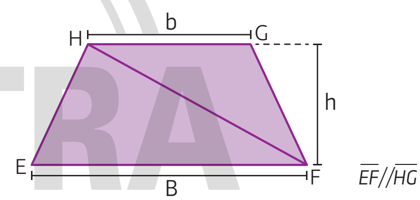
$$A = \frac{d \cdot D}{2}$$



Área do trapézio

Você provavelmente estudou, em anos anteriores, que um trapézio é um quadrilátero com apenas um par de lados paralelos.

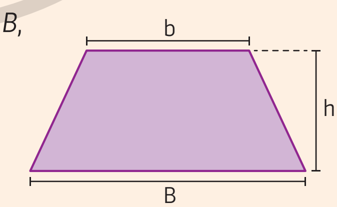
Ao traçar uma diagonal, o trapézio $EFGH$ é decomposto em dois triângulos. O lado $\overline{EF}$ do triângulo EFH corresponde à base maior do trapézio; o lado $\overline{GH}$ do triângulo FGH corresponde à base menor do trapézio; e a medida da altura dos triângulos EFH e FGH em relação aos lados $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, respectivamente, é igual à medida da altura do trapézio. Logo, a área A do trapézio $EFGH$ é dada por:



$$A = \underbrace{\frac{B \cdot h}{2}}_{\substack{\text{área do} \\ \text{triângulo } EFH}} + \underbrace{\frac{b \cdot h}{2}}_{\substack{\text{área do} \\ \text{triângulo } FGH}} = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

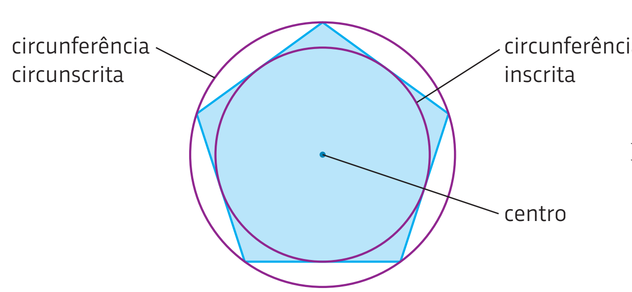
A área A de um trapézio cuja base maior mede B, base menor mede b e altura mede h é dada por:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$



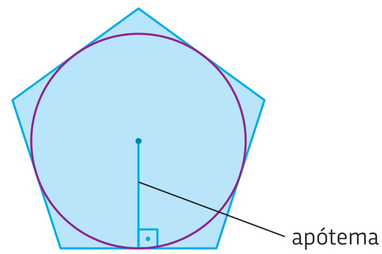
Área de polígonos regulares

Um polígono regular possui todos os lados com medidas iguais e todos os ângulos internos congruentes. Qualquer polígono regular admite uma circunferência inscrita e uma circunferência circunscrita. O centro comum dessas duas circunferências é denominado centro do polígono regular.

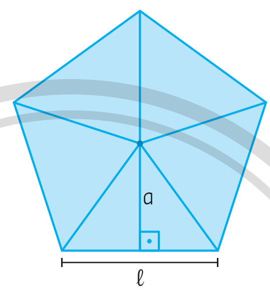


Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Um segmento cujas extremidades são o centro do polígono e o ponto médio de um de seus lados é denominado apótema (a). Um apótema do polígono corresponde a um raio da circunferência inscrita a esse polígono e é perpendicular ao lado que o intersecta.



Em um polígono regular de n lados, ao traçar n segmentos de reta, cada um unindo o centro do polígono a um vértice, decompomos o polígono em n triângulos, todos congruentes entre si.



Assim, a área A do polígono regular corresponde a n vezes a área de um desses triângulos, ou seja:

$$A = \underbrace{n}_{\text{quantidade de lados}} \cdot \underbrace{\frac{\ell \cdot a}{2}}_{\text{área de cada triângulo}}$$

Outra maneira de se escrever essa fórmula é:

$$A = \frac{n \cdot \ell}{2} \cdot a$$

O número $\frac{n \cdot \ell}{2}$ corresponde à metade do perímetro do polígono, e é denominado semiperímetro. Assim, a área de um polígono regular qualquer corresponde ao produto de seu semiperímetro pela medida de seu apótema.

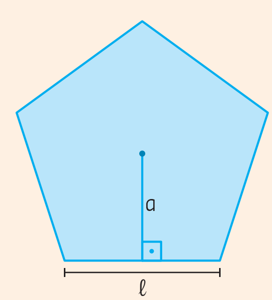
A área A de um polígono regular de n lados, cujo lado mede ℓ, é dada por:

$$A = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2}$$

sendo a a medida do seu apótema. De modo equivalente, temos:

$$A = p \cdot a$$

Tal que p é o semiperímetro, ou seja, $p = \frac{n \cdot \ell}{2}$.

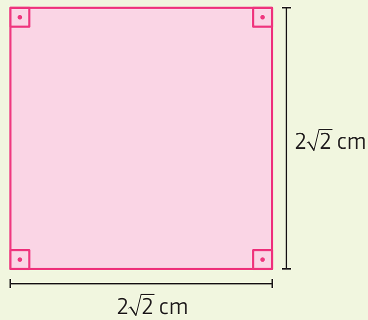


Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

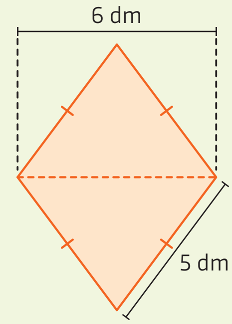
Na prática, em vez de apenas memorizar a fórmula da área do polígono regular, é útil também saber os passos que levam a ela, ou seja, decompomos o polígono em n triângulos cuja medida da base é ℓ e medida da altura é a. Em seguida, calculamos a soma da área desses triângulos.

R1. Calcule a área A de cada uma das figuras planas abaixo.

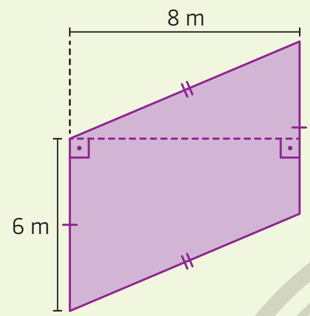
a)



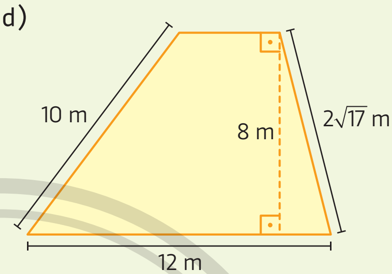
c)



b)



d)



Resolução

a) A área de um quadrado cujo lado mede ℓ é dada por $A = \ell^2$. Assim:

$$A = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 2^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 4 \cdot 2 = 8$$

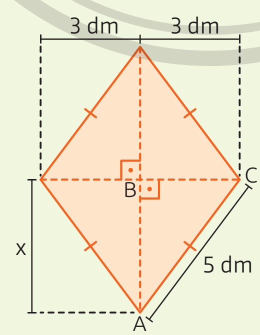
Logo, a área do quadrado é 8 cm^2.

b) A área de um paralelogramo é dada por $A = b \cdot h$. Assim:

$$A = 6 \cdot 8 = 48$$

Logo, a área do paralelogramo é 48 m^2.

c) Uma das diagonais do losango mede 6 dm. Para determinar a medida D da outra diagonal, consideramos a figura a seguir, em que $BC = \dfrac{6}{2} = 3$ e x é a medida do segmento BA.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Como o triângulo ABC é retângulo em B, temos:

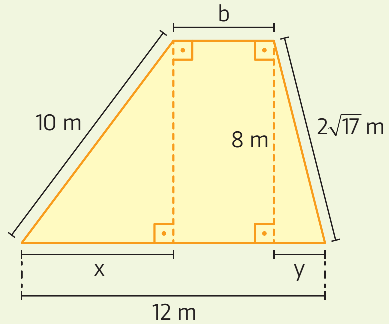
$$5^2 = x^2 + 3^2 \Rightarrow 25 = x^2 + 9 \Rightarrow x = 4$$

Logo $AB = 4$ dm. Como $D = 2x$, temos $D = 8$ dm e a área de um losango é dada por $A = \dfrac{d \cdot D}{2}$. Assim:

$$A = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

Portanto, a área do losango é 24 dm^2.

d) A base maior do trapézio mede 12 m. De acordo com a figura, temos:



Sergio Lima/ID/BR

I) $b = 12 - x - y$

II) $10^2 = 8^2 + x^2$

III) $\left(2\sqrt{17}\right)^2 = 8^2 + y^2$

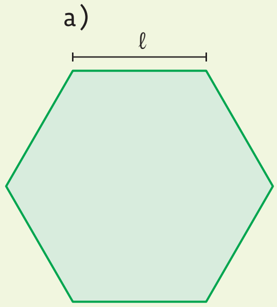
De **II** e **III**, temos $x = 6$ e $y = 2$. Como a área de um trapézio é dada por $A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$, segue que:

$$A = \frac{\left[12 + (\overbrace{12}^{6} - \overbrace{x}^{2} - y)\right] \cdot 8}{2} = \frac{16 \cdot 8}{2} = 64$$

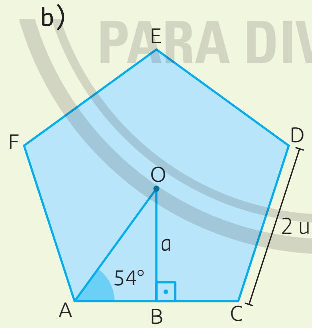
Logo, a área do trapézio é 64 m^2.

R2. Determine a área de cada um dos polígonos regulares a seguir. (Utilize tg 54° ≃ 1,4).

a)

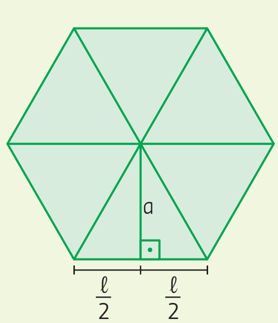


b)



Resolução

a) Partindo do centro do hexágono, podemos dividi-lo em 6 triângulos equiláteros congruentes entre si.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Calculando a medida do apótema a, que corresponde à altura de um triângulo equilátero, temos:

$$\ell^2 = a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 3 \cdot \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Como a área A do hexágono é dada pela soma das áreas dos 6 triângulos equiláteros, temos:

$$A = 6 \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} = 6 \cdot \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a área do hexágono regular de lado ℓ é $\dfrac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$.

b) Para o cálculo do apótema, fazemos:

$$\text{tg}54° = \frac{a}{\frac{2}{2}} \Rightarrow 1{,}4 \simeq a$$

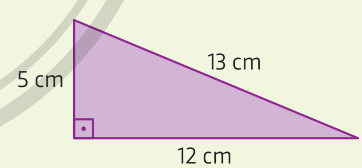
A área de um polígono regular é dada por $A = n \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2}$. Assim:

$$A = 5 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}4}{2} = 7$$

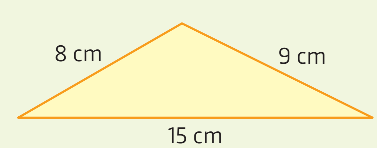
Portanto, a área do pentágono é aproximadamente 7 u.a.

R3. Calcule a área dos triângulos.

a)



b)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Resolução

a) Vamos calcular a área desse triângulo de duas maneiras distintas.

1ª maneira

A área de um triângulo é dada por $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$. Assim:

$$A = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$$

Portanto, a área desse triângulo é 30 cm^2.

2ª maneira

Utilizando a fórmula $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, em que p é o semiperímetro do triângulo e a, b e c são as medidas dos três lados. Assim:

$$p = \frac{5+12+13}{2} = 15$$

$$A = \sqrt{15(15-5)(15-12)(15-13)} =$$
$$= \sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{900} = 30$$

Portanto, a área desse triângulo é 30 cm^2.

A fórmula $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ é conhecida como fórmula de Heron e é válida para qualquer triângulo de lados a, b e c, em que $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro. É possível deduzir essa fórmula, mas não o faremos neste momento.
Note ainda que a expressão $p = \frac{n \cdot \ell}{2}$, apresentada na teoria, é utilizada para determinar o semiperímetro de polígonos regulares, e a expressão $p = \frac{a+b+c}{2}$ é utilizada para determinar o semiperímetro de um triângulo qualquer.

b) Em geral, quando conhecemos as medidas dos três lados de um triângulo escaleno é mais vantajoso determinar sua área por meio da fórmula de Heron. Assim:

$$p = \frac{8+9+15}{2} = 16$$

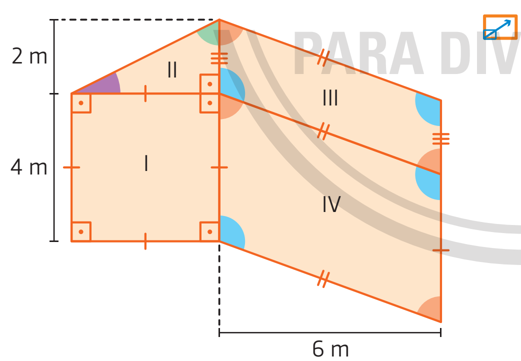
$$A = \sqrt{16(16-8)(16-9)(16-15)} = \sqrt{16 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1} = \sqrt{896} = 8\sqrt{14}$$

Portanto, a área desse triângulo é $8\sqrt{14}$ cm^2.

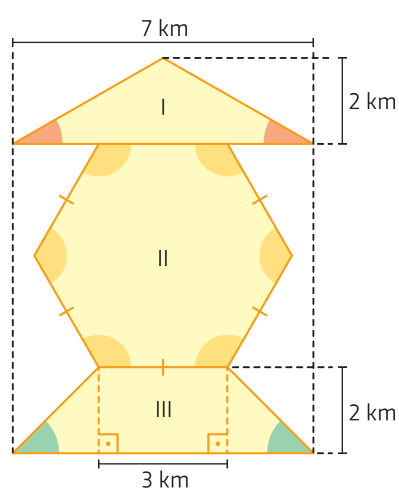
Atividades

1. As figuras abaixo foram decompostas em polígonos. Calcule no caderno a área de cada polígono e depois a área total da figura formada por eles.

a)



b)



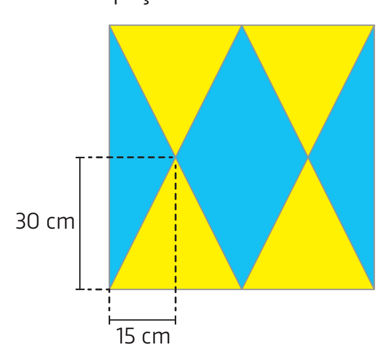
2. (PUC-RJ) A medida da área, em cm^2, de um quadrado que pode ser inscrito em um círculo de raio igual a 5 cm é:

a) 20
b) $25\sqrt{2}$
c) 25
d) $50\sqrt{2}$
e) 50

3. Ferramentas Em cada item, calcule no caderno a área do triângulo dadas as medidas de seus lados.

a) 6,54 m; 8,72 m; 10,9 m
b) 33,75 km; 45 km; 56,25 km
c) 51 dam; 68 dam; 85 dam

4. Observe uma peça de cerâmica decorativa.



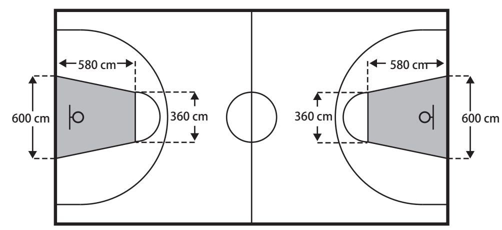
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Determine no caderno a área de toda superfície:

a) azul dessa peça;
b) amarela dessa peça.

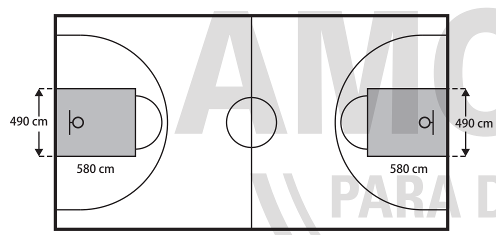
5. O tampo de uma mesa tem formato triangular e seus lados medem 1,7 m, 1,5 m e 0,8 m. Qual é a área desse tampo de mesa?

6. (Enem/Inep) O esquema **I** mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema **I**: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2 010, que unificou as marcações de diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o esquema **II**.



Enem/Inep/Fac-símile: ID/BR

Esquema **II**: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas em cada garrafão, houve uma alteração na área ocupada, que corresponde a um(a)

a) aumento de 5 800 cm^2.

b) aumento de 75 400 cm^2.

c) aumento de 214 600 cm^2.

d) diminuição de 63 800 cm^2.

e) diminuição de 272 600 cm^2.

7. Desafio Considere um quadrado com área de 0,21 m^2 e lado medindo ℓ.
O intervalo em centímetros que contém a medida ℓ será:

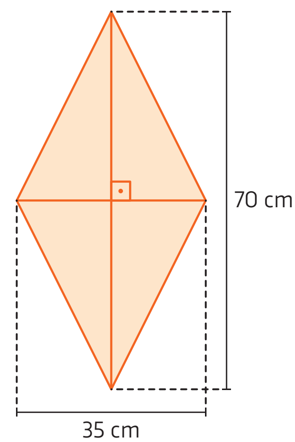
a) $0 < \ell < 15$

b) $15 < \ell < 30$

c) $30 < \ell < 45$

d) $45 < \ell < 60$

8. A pipa, também conhecida como papagaio em algumas regiões do Brasil, pode assumir diversas formas e tamanhos. Veja o esquema matemático de um modelo de pipa.



Sergio Lima/ID/BR

Para encapar esse modelo de pipa pode ser utilizada uma folha de papel de seda com formato retangular medindo 50 cm por 80 cm.

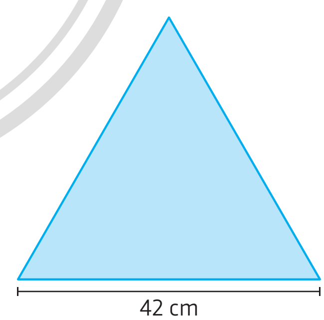
a) Determine a área de uma folha de papel de seda.

b) Qual é a área desse modelo de pipa?

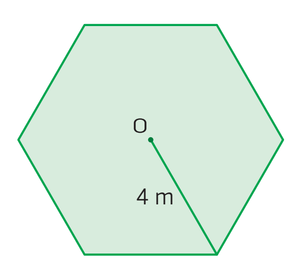
c) Para encapar uma pipa do modelo apresentado, uma folha de papel de seda é suficiente? Justifique.

9. Calcule no caderno a área dos polígonos regulares de cada item.

a)



b)

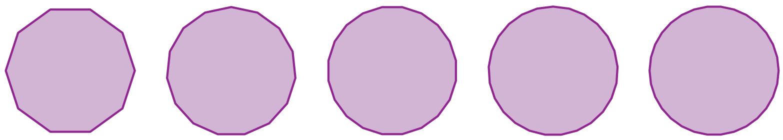


Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

10. Qual é a razão entre as áreas de um quadrado circunscrito e um quadrado inscrito em uma mesma circunferência?

Área do círculo

Alguns *softwares* de computador permitem construir polígonos regulares com certa precisão. Observe alguns polígonos construídos com um desses programas.

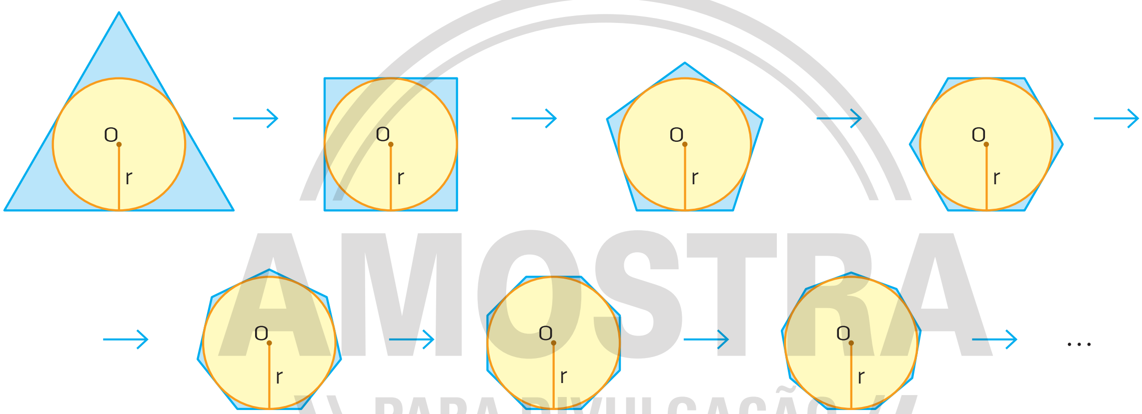


10 lados 15 lados 20 lados 25 lados 30 lados

Podemos observar que, quanto maior a quantidade de lados, mais a representação do polígono se parece com a de um círculo.

> Círculo é uma figura geométrica plana correspondente à união de uma circunferência com todos os pontos do seu interior.

Agora, considere um círculo de raio *r*. Esse círculo pode ser circunscrito por um polígono regular com qualquer quantidade de lados.



Temos:

- a medida do raio do círculo é igual à medida do apótema do polígono regular;
- conforme a quantidade de lados do polígono aumenta, seu perímetro se aproxima do comprimento da circunferência de raio *r*;
- a área do polígono é uma aproximação da área do círculo, e essa aproximação é melhor quanto maior for a quantidade de lados do polígono.

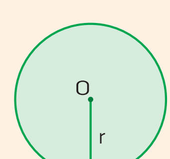
Sabemos que a área do polígono regular é igual ao produto de seu semiperímetro por seu apótema. Assim, para um polígono regular circunscrito ao círculo com uma quantidade suficientemente grande de lados, a área *A* do círculo é dada, aproximadamente, por:

$$A \simeq \underbrace{p}_{\text{semiperímetro do polígono}} \cdot \underbrace{r}_{\text{apótema do polígono}}$$

Nesse caso, o semiperímetro *p* é aproximadamente igual à metade do comprimento da circunferência de raio *r*, ou seja, $p \simeq \frac{2\pi r}{2} = \pi r$. Com base nessas ideias, pode-se demonstrar que a área exata do círculo de raio *r* é dada por:

$$A = \pi r \cdot r = \pi r^2$$

> A área *A* de um círculo de raio *r* é dada por:
>
> $$A = \pi r^2$$

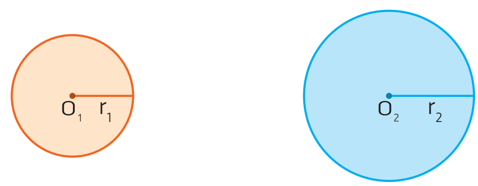


Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Razão entre áreas de figuras planas semelhantes

Duas figuras planas são semelhantes quando todos os segmentos que aparecem em uma aparecem na outra, multiplicados por uma constante.

Considere dois círculos quaisquer com centros O_1 e O_2.



Esses círculos são figuras semelhantes entre si. A razão entre dois elementos lineares homólogos quaisquer é igual a uma constante k, denominada razão de semelhança. Intuitivamente, percebemos que dois círculos quaisquer são semelhantes porque todos os círculos possuem a mesma forma, diferenciando-se entre si apenas pelo tamanho e pela posição de cada um no plano.

Homólogos: que possuem entre si uma relação de correspondência, por exemplo, de localização, de forma, etc.

Se r_1 e r_2 são as medidas dos raios desses círculos, que são grandezas lineares, então a razão de semelhança é dada por $k = \frac{r_1}{r_2}$, e a razão entre as áreas dos círculos é:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = k^2$$

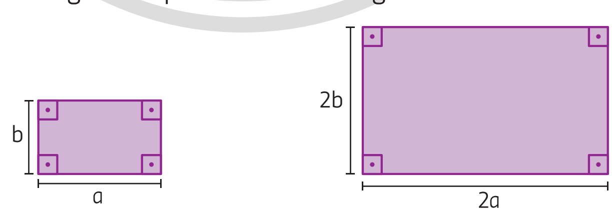
Grandezas lineares: todas aquelas que expressam comprimento, por exemplo, o comprimento da circunferência, a medida do diâmetro, a medida de uma corda, etc.

Esse resultado pode ser generalizado para duas figuras planas semelhantes quaisquer.

Se duas figuras geométricas planas são semelhantes, então a razão entre suas áreas é igual a k^2, sendo k a razão de semelhança.

Exemplos

a Considere os retângulos representados a seguir.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

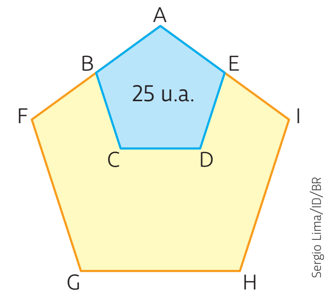
Esses retângulos são semelhantes, pois possuem os lados correspondentes com medidas proporcionais e os respectivos ângulos internos congruentes, sendo a razão de semelhança igual a $k = \frac{a}{2a} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$. Vamos verificar que a razão entre suas áreas é $k^2 = \frac{1}{4}$.

O retângulo menor tem área $A_1 = ab$, e o retângulo maior, $A_2 = 2a \cdot 2b = 4ab$. Assim:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{ab}{4ab} = \frac{1}{4}$$

Logo, $\frac{A_1}{A_2} = k^2$.

b Na figura, os pentágonos *ABCDE* e *AFGHI* são regulares. Os vértices *B* e *E* do pentágono menor correspondem, respectivamente, aos pontos médios dos lados $\overline{AF}$ e $\overline{AI}$ do pentágono maior. Supondo que a área do pentágono menor é de 25 u.a., vamos calcular a área da região em amarelo.



Primeiro, observamos que os polígonos regulares com o mesmo número de lados são semelhantes. Como a medida de um lado do pentágono maior é o dobro da medida do lado do pentágono menor, a razão de semelhança é $k = 2$, e a razão entre suas áreas é:

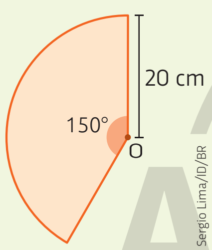
$$\frac{A_{AFGHI}}{A_{ABCDE}} = k^2 \Rightarrow \frac{A_{AFGHI}}{25} = 2^2 \Rightarrow A_{AFGHI} = 100$$

A área da região em amarelo corresponde à diferença entre A_{AFGHI} e A_{ABCDE}, ou seja:

$$A_{AFGHI} - A_{ABCDE} = 100 - 25 = 75$$

Portanto, a área da região em amarelo é 75 u.a.

R4. Determine a área do setor circular.



Setor circular: região contida em um círculo e limitada pelos lados de um ângulo central.

Resolução

Sabemos calcular a área de um círculo completo, que corresponde a um setor circular com ângulo central de medida 360° ou 2π. Assim, podemos determinar a área desse setor circular por meio de uma regra de três simples. Para isso, vamos considerar $\pi \simeq 3{,}14$.

Área do círculo de raio 20 cm (círculo completo):

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot 20^2 = 400\pi$$

área (cm²)	ângulo central (°)
A_{setor}	150
400π	360

$$\frac{A_{\text{setor}}}{400\pi} = \frac{150}{360} \Rightarrow \frac{A_{\text{setor}}}{400\pi} = \frac{5}{12} \Rightarrow$$

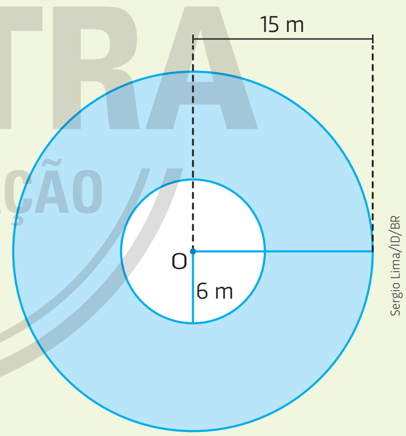
$$\Rightarrow A_{\text{setor}} = \frac{5}{12} \cdot 400\pi \Rightarrow A_{\text{setor}} = \frac{500\pi}{3} \simeq$$

$$\simeq \frac{500 \cdot 3{,}14}{3} \simeq 523{,}3$$

Portanto, a área desse setor circular é aproximadamente 523,3 cm².

R5. Calcule a área da coroa circular limitada pelas circunferências de raios 6 m e 15 m.

Coroa circular: figura geométrica plana, limitada por duas circunferências concêntricas, isto é, que possuem o mesmo centro.



Resolução

A área dessa coroa circular corresponde à diferença entre a área do círculo de raio 15 m e a área do círculo de raio 6 m. Assim:

$$A = \pi \cdot 15^2 - \pi \cdot 6^2 =$$

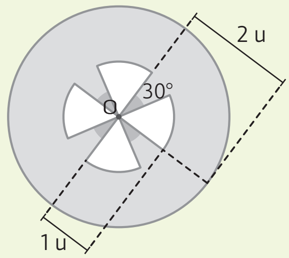
$$= 225\pi - 36\pi = 189\pi$$

Utilizando a aproximação $\pi \simeq 3{,}14$, temos:

$$A \simeq 189 \cdot 3{,}14 = 593{,}46$$

Portanto, a área dessa coroa circular é aproximadamente 593,46 m².

R6. Calcule a área da região sombreada em que os 4 ângulos centrais indicados medem 30°.



Sergio Lima/ID/BR

Resolução

A área da região sombreada equivale à soma da área da coroa circular limitada pelas circunferências concêntricas de raios 1 u e 2 u, e as áreas dos 4 setores circulares de ângulo central de medida 30°. Considere:

- A_s: área da região sombreada;
- A_c: área da coroa circular;
- A_{sc}: área de um setor circular.

Assim, temos:

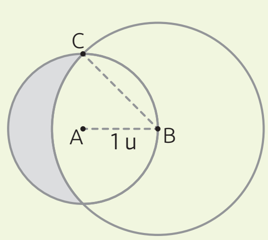
$$A_s = A_c + 4 \cdot A_{sc} =$$

$$= \left(\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2\right) + 4 \cdot \left(\frac{30}{360} \cdot \pi \cdot 1^2\right) =$$

$$= 4\pi - \pi + \frac{\pi}{3} = 3\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$$

Portanto, a área da região sombreada é $\frac{10\pi}{3}$ u².

R7. Determine a área da região sombreada da figura abaixo, em que *A* é o centro da circunferência menor, *B* é o centro da circunferência maior e *ABC* é um triângulo retângulo em *A*.

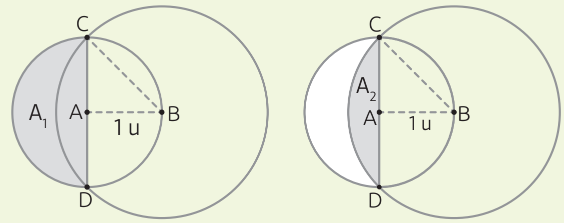


Resolução

Para determinar a medida do raio *BC* da circunferência maior, fazemos:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow BC = \sqrt{2}$$

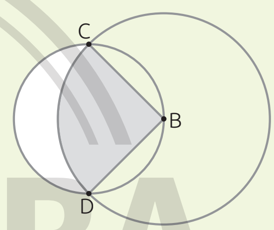
A área da região sombreada, A_s, pode ser obtida por meio da diferença entre as áreas A_1 e A_2 indicadas a seguir $\left(A_s = A_1 - A_2\right)$.



Como A_1 equivale à área do semicírculo menor (metade de um círculo), temos:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$$

A_2 equivale à diferença entre a área do setor circular indicado a seguir e a área do triângulo retângulo *DCB*.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Vamos utilizar uma regra de três simples para obter a área do setor circular.

A área, em u.a., do círculo de raio *BC* (círculo completo) é:

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi$$

área (u.a.)	ângulo central (°)
A_{setor}	90
2π	360

$$\frac{A_{\text{setor}}}{2\pi} = \frac{90}{360} \Rightarrow \frac{A_{\text{setor}}}{2\pi} = \frac{1}{4} \Rightarrow A_{\text{setor}} = \frac{\pi}{2}$$

Desse modo, a área A_2 é dada por:

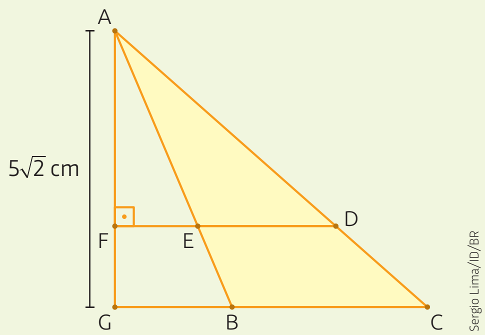
$$A_2 = \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{área do setor circular}} - \underbrace{\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2}}_{\text{área do triângulo retângulo}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Como $A_s = A_1 - A_2$, temos:

$$A_s = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1$$

Portanto, a área da região sombreada é 1 u.a.

R8. O triângulo *ABC* foi seccionado paralelamente em relação ao lado $\overline{BC}$, de modo que o triângulo *AED* e o quadrilátero *BCDE* possuem áreas iguais. Determine a medida da altura do triângulo *AED* em relação ao lado $\overline{ED}$.



Resolução

Como o triângulo *AED* e o quadrilátero *BCDE* possuem áreas iguais, cada um deles possui metade da área do triângulo *ABC*. Além disso, o triângulo *AED* é semelhante ao triângulo *ABC*, pois possuem ângulos internos correspondentes congruentes.

Sendo *AF* a altura do triângulo *AED* em relação ao lado $\overline{ED}$, a razão entre *AF* e *AG*, correspondente às alturas dos triângulos, é dada por $k = \dfrac{AF}{AG} = \dfrac{AF}{5\sqrt{2}}$.

A razão entre a área do triângulo *AED* e a área do triângulo *ABC* é $k^2 = \dfrac{1}{2}$, pois a área do triângulo *AED* equivale à metade da área do triângulo *ABC*. Assim:

$$k^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como $k = \dfrac{AF}{5\sqrt{2}}$ e $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, temos:

$$\frac{AF}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow AF = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5$$

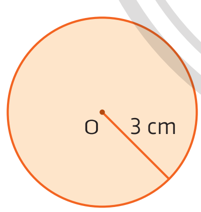
Portanto, a medida da altura do triângulo *AED* em relação ao lado $\overline{ED}$ é 5 cm.

Atividades

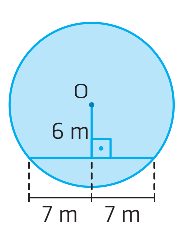
Nas atividades das páginas **207** e **208**, sempre que necessário, considere $\pi \simeq 3{,}14$.

11. Determine a área de cada círculo.

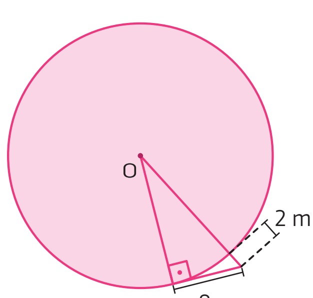
a)



b)



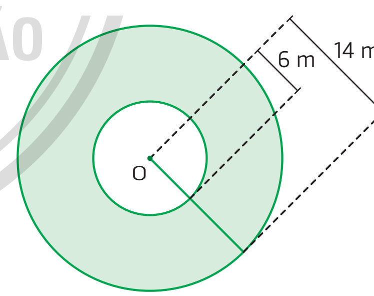
c)



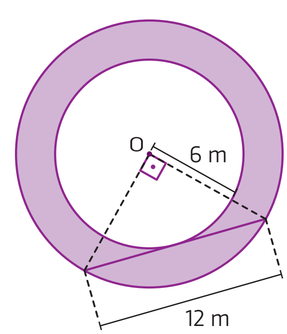
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

12. Calcule a área da coroa circular.

a)



b)

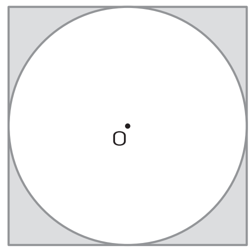


Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

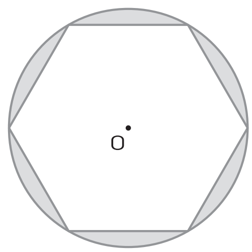
13. Calcule a área da coroa circular determinada por duas circunferências concêntricas de raios 15 cm e 21 cm.

14. Calcule a área da região sombreada em cada item.

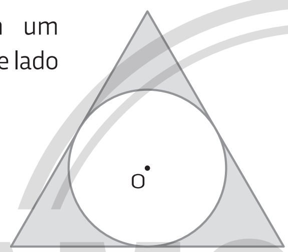
a) Círculo inscrito em um quadrado de lado 8 m.



b) Círculo de raio 9 m circunscrito a um hexágono regular.



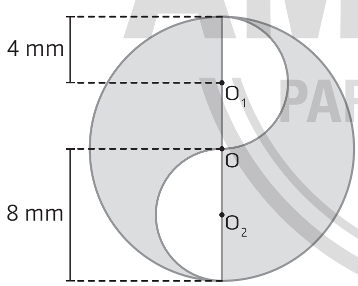
c) Círculo inscrito em um triângulo equilátero de lado 12 m.



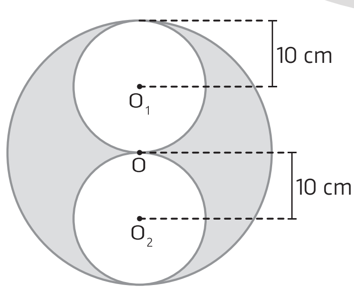
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

15. Determine a área da região sombreada em cada item.

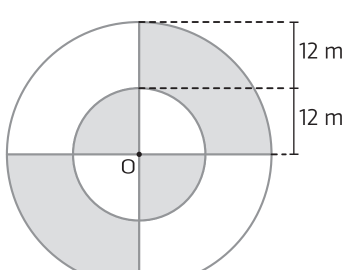
a)



b)



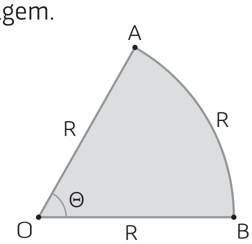
c)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

16. **Desafio** Calcule a razão entre as áreas dos círculos inscrito e circunscrito a um hexágono regular.

17. (Uerj) Uma chapa de aço com a forma de um setor circular possui raio R e perímetro $3R$, conforme ilustra a imagem.

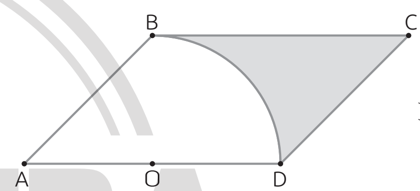


UERJ/Fac-símile: ID/BR

A área do setor equivale a:

a) R^2 b) $\frac{R^2}{4}$ c) $\frac{R^2}{2}$ d) $\frac{3R^2}{2}$

18. Na figura abaixo, sejam o paralelogramo $ABCD$ em que $AD = 8$ cm e o setor $B\hat{O}D = 90°$ de um círculo de raio 4 cm. Determine a área da região sombreada.



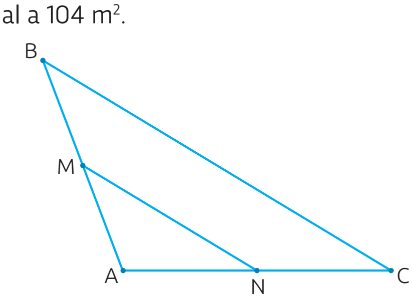
Sergio Lima/ID/BR

19. Certo espetáculo musical lotou uma arena semicircular de 60 m de raio. Admitindo uma ocupação média de 4 pessoas por metro quadrado, determine a quantidade estimada de pessoas presentes nesse espetáculo.

20. Considere dois polígonos regulares semelhantes P e Q. A medida do lado de Q é o triplo da medida do lado de P. Determine a área de P, sabendo que a área de Q é 135 cm^2.

21. A razão de semelhança entre dois triângulos é $\frac{2}{3}$ e a área do triângulo menor é 64 cm^2. Calcule a área do triângulo maior.

22. Considere o triângulo ABC na figura a seguir cuja área é igual a 104 m^2.



Sergio Lima/ID/BR

Se M e N são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, determine a área do quadrilátero $BMNC$.

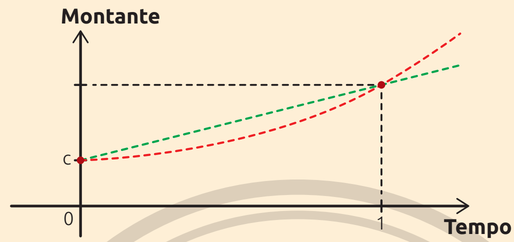
Verificando rota

1. Para que é importante estudar conceitos da matemática financeira como porcentagem, juro e investimento?

2. Se uma quantia sofrer um acréscimo de *x*%, ela retorna ao valor inicial se descontarmos a mesma porcentagem *x*? Justifique.

3. Qual é a principal diferença entre juro simples e juro composto em relação à maneira como eles são calculados?

4. Em qual situação o montante obtido sob o regime de juro simples é maior do que o de juro composto?



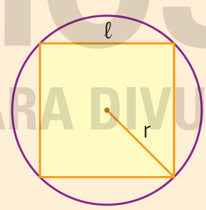
Sergio Lima/ID/BR

5. Realize uma pesquisa a respeito de juro de mora e explique o termo.

6. Cite pelo menos uma diferença entre o Sistema Price e o SAC.

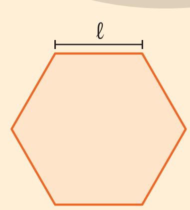
7. O que é apótema de um polígono regular?

8. Dado um quadrado, cuja medida do lado é ℓ, inscrito em uma circunferência de raio r, qual é a relação entre as medidas ℓ e r? Justifique.



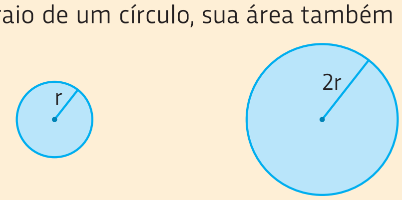
Sergio Lima/ID/BR

9. Escreva uma estratégia para calcular a área de um hexágono regular conhecendo apenas a medida ℓ de seu lado.



Sergio Lima/ID/BR

10. Ao dobrarmos a medida do raio de um círculo, sua área também dobra? Justifique.



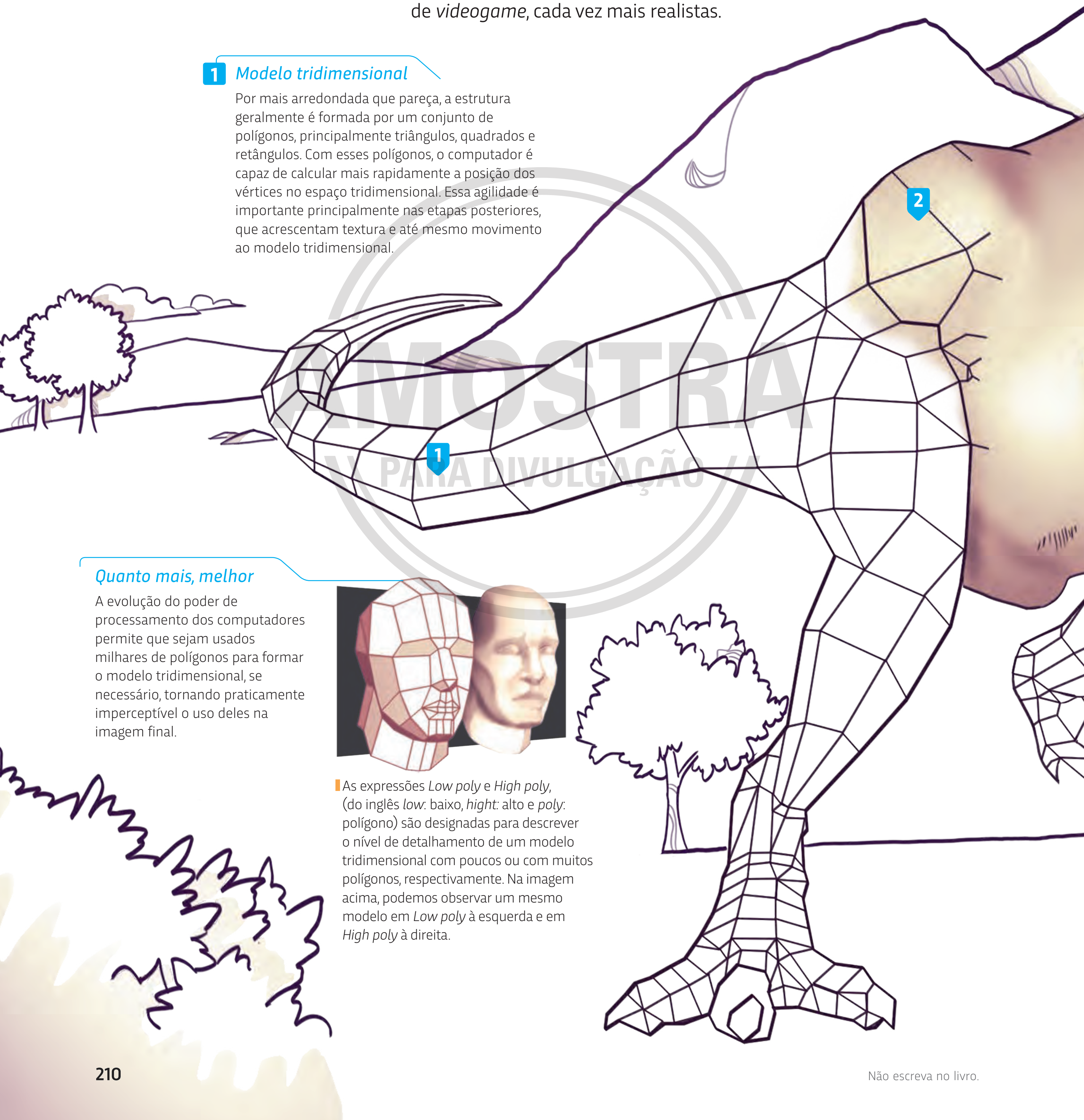
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

11. A página de abertura da unidade **4** apresentou, como assunto inicial, o Labirinto Verde de formato circular, informando que está localizado em Nova Petrópolis (RS). Qual dos conteúdos trabalhados nesta unidade se relaciona com esse tema?

Ampliando fronteiras

Da computação gráfica para os filmes e jogos de *videogame*

Você já pensou em como são feitos os filmes com dinossauros? Nessas filmagens, podem ser utilizados bonecos ou imagens geradas por computador. Nesse último caso, o animal é modelado computacionalmente a partir de um conjunto de figuras geométricas planas, técnica que tem se tornado padrão na produção cinematográfica e de jogos de *videogame*, cada vez mais realistas.



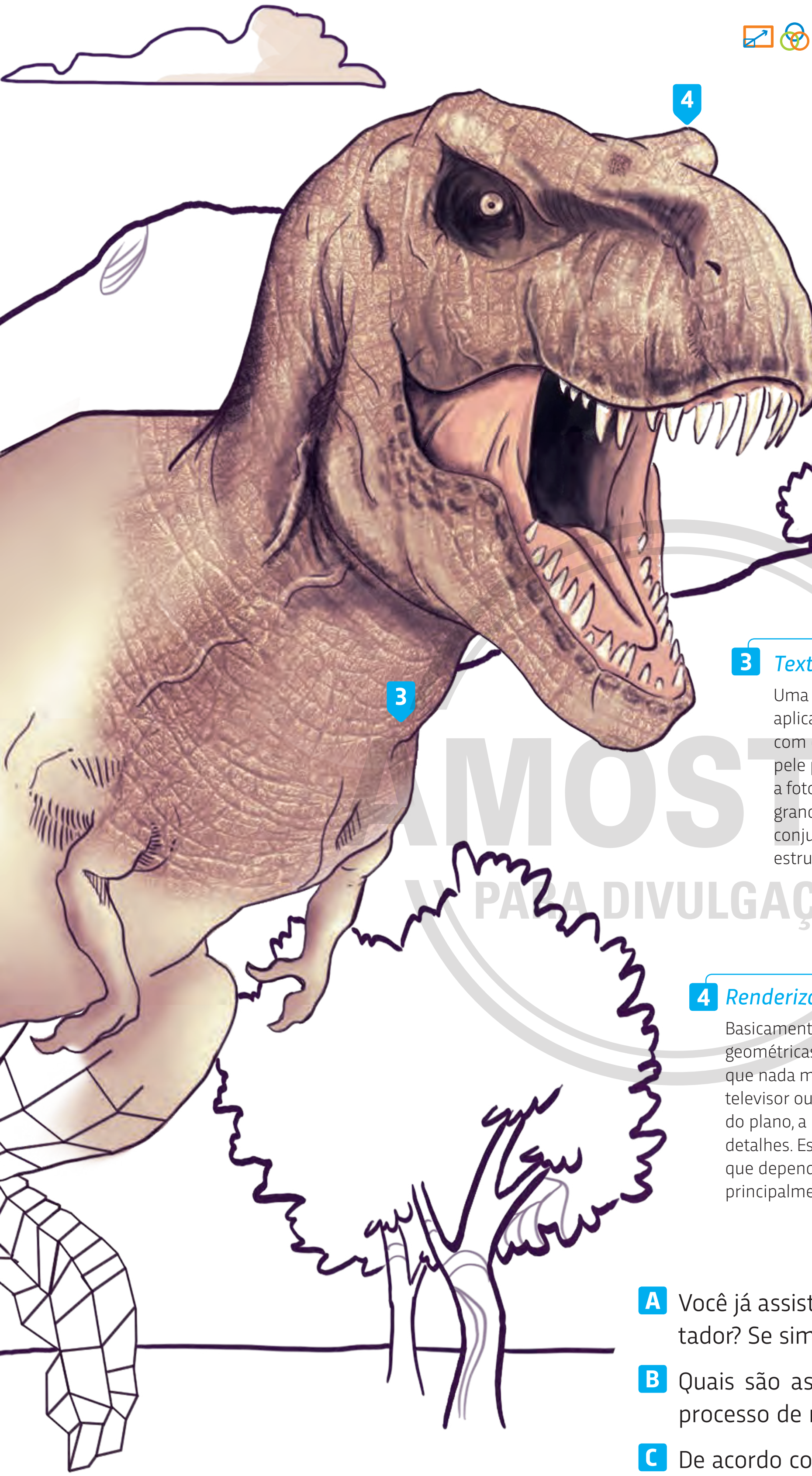
1 *Modelo tridimensional*

Por mais arredondada que pareça, a estrutura geralmente é formada por um conjunto de polígonos, principalmente triângulos, quadrados e retângulos. Com esses polígonos, o computador é capaz de calcular mais rapidamente a posição dos vértices no espaço tridimensional. Essa agilidade é importante principalmente nas etapas posteriores, que acrescentam textura e até mesmo movimento ao modelo tridimensional.

Quanto mais, melhor

A evolução do poder de processamento dos computadores permite que sejam usados milhares de polígonos para formar o modelo tridimensional, se necessário, tornando praticamente imperceptível o uso deles na imagem final.

As expressões *Low poly* e *High poly*, (do inglês *low*: baixo, *hight:* alto e *poly*: polígono) são designadas para descrever o nível de detalhamento de um modelo tridimensional com poucos ou com muitos polígonos, respectivamente. Na imagem acima, podemos observar um mesmo modelo em *Low poly* à esquerda e em *High poly* à direita.



Izaac Brito/ ASC Imagens

2 *Efeitos*

Nesse modelo tridimensional, é necessário aplicar efeitos de iluminação, como a origem da luz, a sua intensidade, o tipo de sombra, reflexo, brilho e outros efeitos que possam dar características mais reais às imagens.

3 *Textura*

Uma textura basicamente é uma imagem bidimensional aplicada sobre uma imagem tridimensional. Para fazer com que o dinossauro tenha realmente uma textura de pele próxima à verdadeira, por exemplo, é possível moldar a fotografia bidimensional da pele acinzentada de outro grande animal, como o elefante ou o rinoceronte, sobre o conjunto de polígonos no plano tridimensional que forma a estrutura do dinossauro, como se estivéssemos vestindo-o.

4 *Renderização*

Basicamente, o modelo tridimensional gerado a partir de descrições geométricas é convertido para uma representação bidimensional, que nada mais é que a descrição da cor de cada *pixel* na tela de um televisor ou monitor. Para isso, o computador calcula a perspectiva do plano, a luz que incide sobre o modelo, as sombras, entre outros detalhes. Essa etapa exige uma grande capacidade computacional, que depende da quantidade de efeitos, da qualidade da textura e, principalmente, da quantidade de polígonos utilizados.

A Você já assistiu a um filme com animação por computador? Se sim, diga qual foi e o que achou do filme.

B Quais são as figuras geométricas mais utilizadas no processo de renderização?

C De acordo com o texto, por que os modelos tridimensionais com maior quantidade de polígonos exigem maior capacidade computacional?

D Quais fatores influenciam no processo de renderização?

Matemática em ação

Fotomontagem de Maryane Silva criada com Chones/Shutterstock.com/ID/BR

Economize energia

Bate-papo inicial

- Como é o consumo de energia elétrica em sua casa: sua família costuma gastar o essencial, economizar ou desperdiçar?
- Você conhece alguma fonte de geração de energia elétrica? Qual(is)?
- Em sua opinião, quais ações podem ser adotadas para reduzir o consumo de energia elétrica?

Se imaginarmos como seria nossa vida sem energia elétrica, logo nos lembramos de uma série de dificuldades que enfrentaríamos. Não seria possível armazenar alimentos na geladeira; o acesso à informação seria restrito pela falta de televisores, computadores e acesso à internet; muitas atividades no período noturno seriam interrompidas pela falta de iluminação; entre outros transtornos.

Embora não vivenciemos uma situação drástica como essa, de vez em quando ficamos sem energia elétrica, o que já é suficiente para nos convencer do quanto isso é desagradável.

Mesmo com o avanço tecnológico desenvolvido na geração, transmissão e distribuição de energia, segundo a Organização das Nações Unidas (ONU), 1,5 bilhão de pessoas ainda vivia sem energia elétrica em 2015. Esse dado mostra que é preciso avançar muito para conquistar a distribuição de energia às populações menos favorecidas.

Alexandre Koyama/ASC Imagens

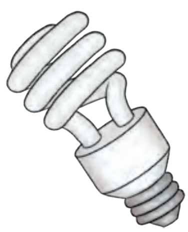
Nunca deve ser ultrapassada a capacidade da tomada elétrica que fornece alimentação ao multiplicador de tomadas, também conhecido como T ou benjamim. Além de causar sobrecarga na rede elétrica e aumentar o gasto de energia, o uso indevido do benjamim pode danificar os equipamentos conectados ou resultar em algum acidente.

Outra conquista necessária trata-se da geração de energia a partir de fontes que causem menos impacto ambiental. A esse respeito, as discussões atuais são em torno de fontes renováveis, menos poluentes para a geração de energia, como o vento (eólica) e o sol (solar). Porém, ainda existem obstáculos impedindo a implementação em grande escala de usinas que exploram essas fontes. Entre elas, estão o alto custo e a baixa produtividade.

Quanto a nós, é possível fazermos a nossa parte como consumidores, pois quanto menos energia elétrica utilizarmos, menos impacto ambiental haverá. Ainda que as usinas hidroelétricas sejam renováveis e menos poluentes, a construção de novas usinas no Brasil necessitaria de represamento de rios, ou seja, seriam grandes os impactos sociais e ambientais. Portanto, a economia de fato é uma aliada para o nosso bolso e é a nossa parcela de responsabilidade com o meio ambiente.

Algumas maneiras de economizar energia

Alexandre Koyama/ASC Imagens



Apague as luzes dos cômodos onde você não estiver. Aproveite ao máximo a luz natural abrindo janelas, portas e cortinas.

Alexandre Koyama/ASC Imagens

Acumule roupas sujas para utilizar a máquina de lavar apenas uma vez. Faça o mesmo para passá-las, ligando o ferro de passar uma única vez também.

Eletrobras/Inmetro/ Fac-símile: ID/BR

Na compra de um aparelho elétrico, escolha os que tenham o Selo Procel de Economia de Energia do Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (INMETRO). Ele indica os produtos com os melhores níveis de eficiência energética dentro de cada categoria.

Alexandre Koyama/ASC Imagens

Evite deixar aparelhos no modo *stand-by*. Tire-os da tomada se não for usá-los.

Mão na massa

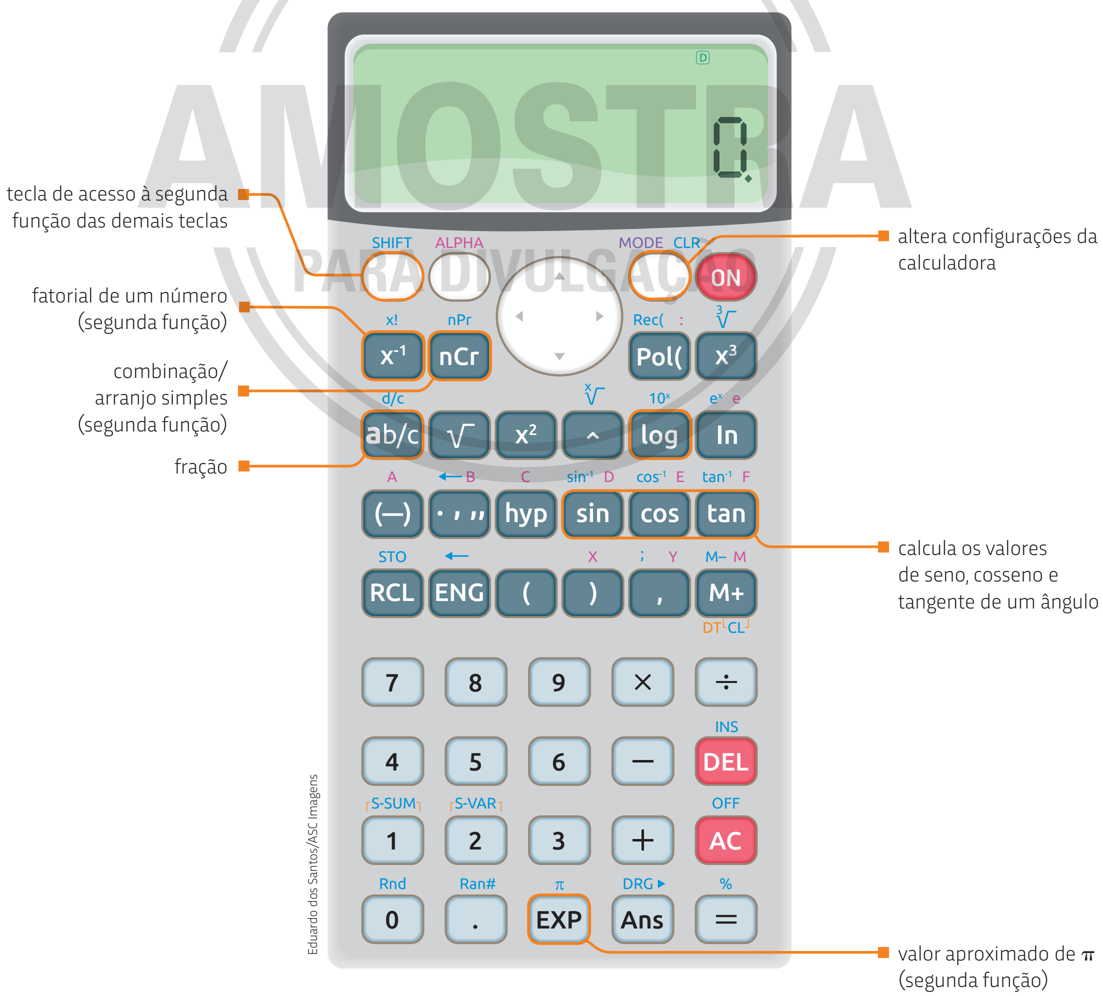
De acordo com a leitura do texto, vimos como a energia elétrica é importante para nós. Precisamos evitar o desperdício, como também incentivar iniciativas voltadas à geração renovável e menos poluente. Assim, a proposta a seguir sugere a criação de um simulador de gasto de energia elétrica. Com ele será possível avaliar a economia de energia ao final de determinado período.

- Siga as orientações do professor para formarem grupos.
- Inicialmente, o professor explicará como funciona o consumo de energia elétrica dos aparelhos que usualmente temos em casa, bem como as unidades de medida utilizadas para calcular o consumo. Com base nisso, ele vai propor um problema para ser resolvido pelos grupos.
- Na próxima etapa será criado um simulador de consumo de energia elétrica em uma planilha eletrônica. Para isso, pesquisem com antecedência a potência aproximada de diversos aparelhos elétricos que geralmente possuímos em casa, como lâmpada fluorescente, televisor, ventilador, computador, etc. Pesquisem também o valor do kWh cobrado pela companhia local.
- Feito isso, o professor vai orientá-los na criação do simulador, que provavelmente será feito no laboratório de informática da escola. Depois, cada aluno do grupo fará algumas simulações. Todos os resultados devem ser anotados, conforme as orientações que receberem.

Ferramentas

Calculadora científica

Observe um modelo de calculadora científica e a função de algumas de suas teclas.



Eduardo dos Santos/ASC Imagens

A constante π

Nos capítulos **1** (Trigonometria) e **8** (Área de figuras planas) deste volume, há situações em que é necessário o uso aproximado do número irracional π. Para isso, geralmente usamos 3,14. Contudo, podemos obter uma aproximação melhor com a tecla π EXP.

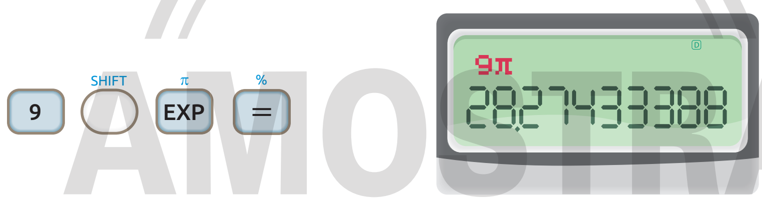
Obter as primeiras casas decimais de π

Pressione:

Uma aproximação de π com nove casas decimais será exibida no visor.

Calcular a área de um círculo de raio 3

Como a área de um círculo de raio r é dada por $A = \pi r^2$, temos $A = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$. Para obter uma aproximação para o valor dessa área, pressione:



Seno, cosseno e tangente

Veja a seguir como podemos calcular o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo, cuja medida está em graus ou radianos, usando as teclas sin, cos e tan.

Para configurar a calculadora para trabalhar com medidas de ângulos em graus ou radianos, pressionamos a tecla MODE CLR algumas vezes até que apareça no visor as opções de configuração "Deg", "Rad" e "Gra".

Ilustrações: Eduardo dos Santos/ASC Imagens

Veja a seguir as opções.

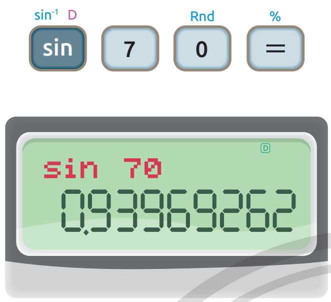
1. Deg: corresponde à configuração para ângulos em graus (em inglês, *degree*).
2. Rad: corresponde à configuração para ângulos em radianos (em inglês, *radian*).
3. Gra: corresponde à configuração para ângulos em grados (em inglês, *grads*).

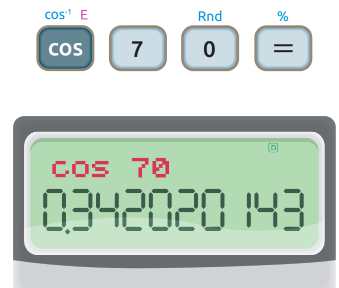
Pressionamos então as teclas 1, 2 ou 3 para configurar a calculadora científica da maneira desejada.

Calcular sen 70° e cos 70°

Se o símbolo D não estiver aparecendo, certifique-se novamente de que a calculadora está configurada para ângulos em graus.

Para calcular as aproximações de sen 70° e cos 70°, pressione:

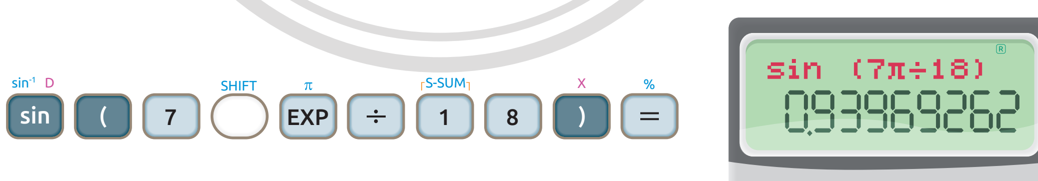


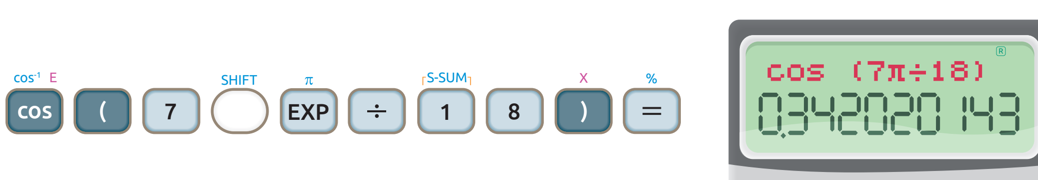


Calcular sen $\frac{7\pi}{18}$ e cos $\frac{7\pi}{18}$

Configure sua calculadora para radianos. Em geral, o símbolo R é exibido para indicar essa configuração, conforme a figura abaixo.

Em seguida, pressione:

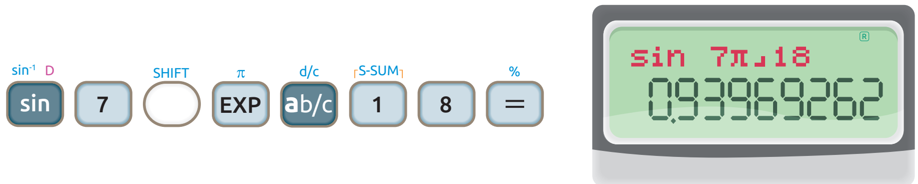


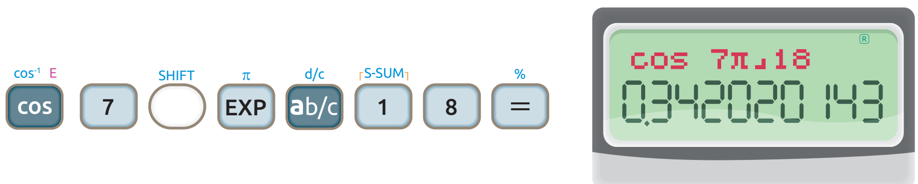


Ilustrações: Eduardo dos Santos/ASC Imagens

Observe que, como 70° corresponde a $\frac{7\pi}{18}$, obtivemos as mesmas aproximações de sen 70° e de sen $\frac{7\pi}{18}$, assim como no caso de cos 70° e de cos $\frac{7\pi}{18}$.

Também podemos realizar essas operações usando a primeira função da tecla ab/c, sem a necessidade de usarmos os parênteses das teclas (e).





Para o cálculo da tangente de um ângulo α, tal que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, o procedimento é análogo aos apresentados e pressionamos a tecla tan em vez de sin ou cos.

Análise combinatória

No capítulo **2** estudamos permutações, arranjos e combinações. Veja a seguir como usar a calculadora científica para realizar cálculos pertinentes a essas ideias.

Calcular 7!

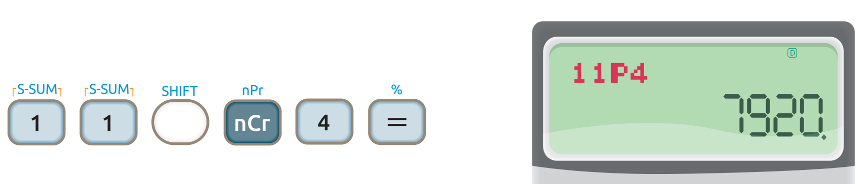
Em vez de calcularmos 7! por meio da operação $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, vamos usar a segunda função da tecla x^{-1} para esse cálculo.

Pressione:

Em vez de calcularmos arranjos simples e combinações pelas fórmulas apresentadas no capítulo, vamos usar a tecla nCr para esses cálculos. Observe que essa tecla possui o comando “nCr” como primeira função, responsável pelo cálculo da combinação, e “nPr” como segunda função, para o cálculo do arranjo simples.

Calcular $A_{11,4}$

Pressione:



Ilustrações: Eduardo dos Santos/ASC Imagens

Observe que o resultado obtido equivale a $\frac{11!}{(11-4)!} = \frac{11!}{7!} = 7\,920$.

Calcular $C_{12,9}$

Pressione:

Observe que o resultado obtido equivale a $\dfrac{12!}{9!(12-9)!} = \dfrac{12!}{9! \cdot 3!} = 220$.

Juro composto

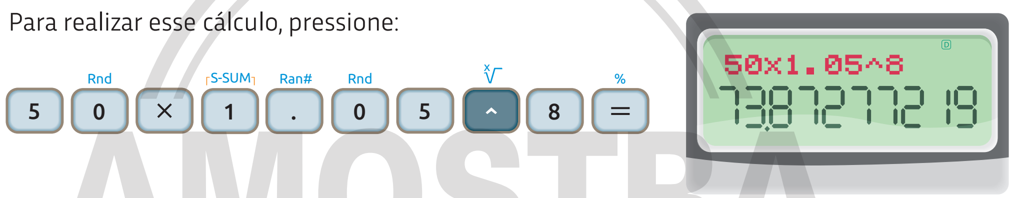
No capítulo **7** estudamos juro composto. Veja como usar a calculadora científica para realizar os cálculos pertinentes a esse assunto.

Calcular o montante M, dados C = R\$ 50,00, i = 5% a.m. e t = 8 meses

Utilizando a fórmula $M = C \cdot (1 + i)^t$, para o montante gerado por um capital aplicado a uma taxa de juros i, e um período de tempo t, obtemos nesse caso:

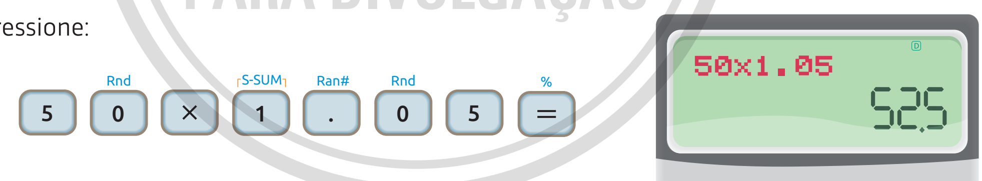
$$M = 50 \cdot (1 + 0{,}05)^8 = 50 \cdot 1{,}05^8$$

Para realizar esse cálculo, pressione:

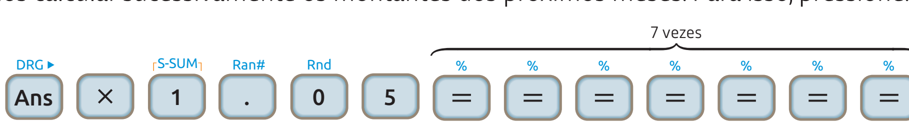


Também podemos obter esse mesmo resultado calculando mês a mês o valor do montante. Por meio da tecla Ans (do inglês, *answer*) é possível usar o resultado de um cálculo exibido no visor em um cálculo seguinte que desejarmos efetuar.

Pressione:



O resultado do cálculo anterior é o montante ao final do primeiro mês. Usando a tecla Ans, podemos calcular sucessivamente os montantes dos próximos meses. Para isso, pressione:



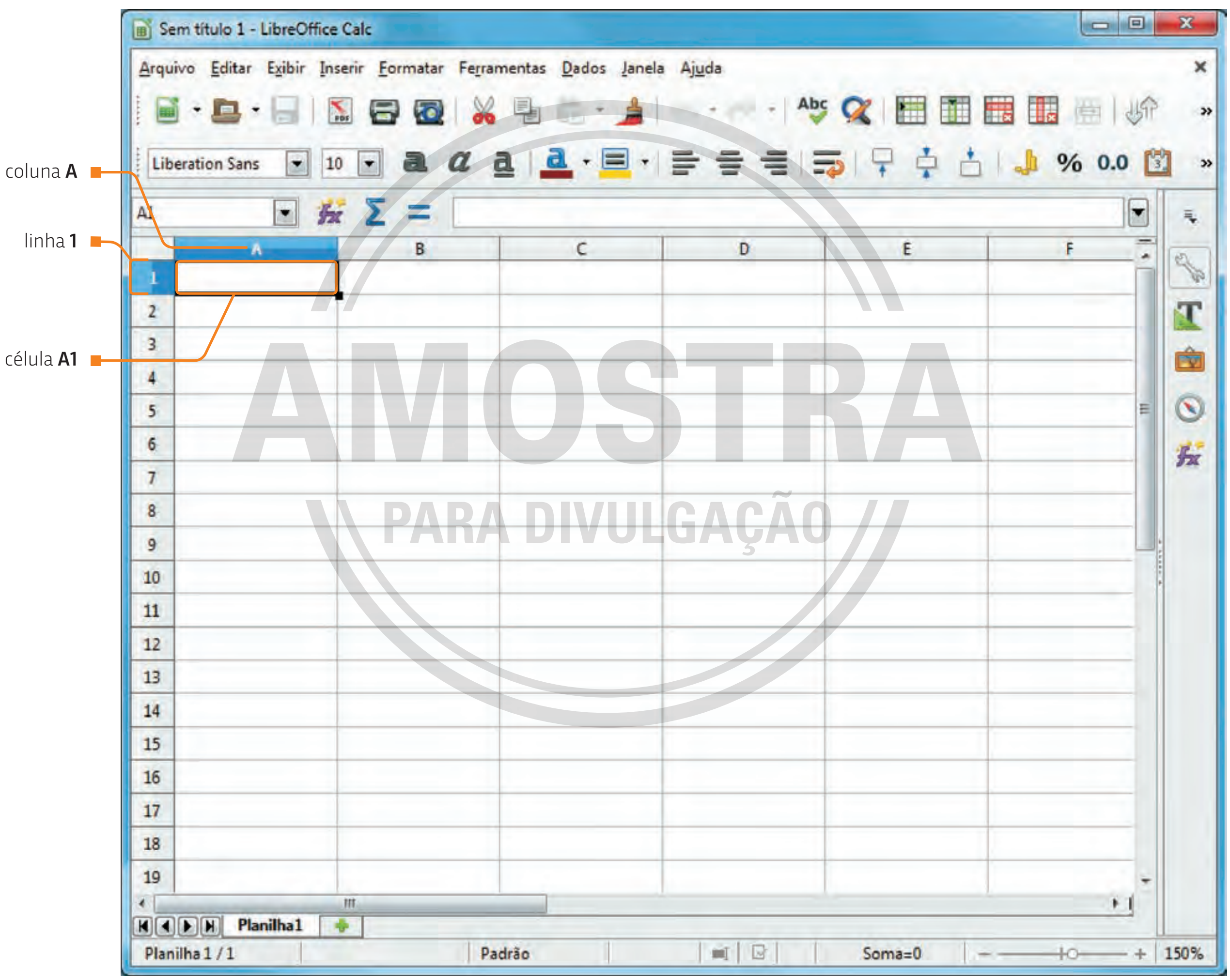
Ilustrações: Eduardo dos Santos/ASC Imagens

Perceba que pressionamos a tecla = sete vezes seguidas, pois $\overset{(8-1)}{\widehat{7}}$ corresponde à quantidade pela qual ainda faltava repetir o processo, ou seja, o de multiplicar o montante por 1,05.

LibreOffice Calc

As planilhas eletrônicas são compostas por linhas e colunas e o encontro entre elas é denominado célula. Além de organizar e apresentar informações de maneira objetiva e precisa, essas planilhas manipulam dados por meio de fórmulas e cálculos automatizados.

Em relação ao Calc, trata-se de uma planilha eletrônica que faz parte do pacote LibreOffice, desenvolvido pela The Document Foundation, uma organização sem fins lucrativos. O LibreOffice é um pacote gratuito de aplicações que inclui, além da planilha eletrônica, editores de texto, de apresentação, de desenho, de banco de dados e de fórmulas científicas e equações. Esse pacote pode ser obtido no endereço eletrônico <http://linkte.me/fh66y>. (Acesso em: 18 jan. 2016). Para os procedimentos apresentados a seguir, usamos a versão LibreOffice 4.4.5.2.



The Document Foundation/Acervo da produtora

Operações com matrizes

Podemos inserir matrizes e realizar algumas operações fundamentais usando uma planilha eletrônica. Esse tipo de procedimento facilita o cálculo dessas operações, principalmente ao trabalhar com matrizes de muitos elementos.

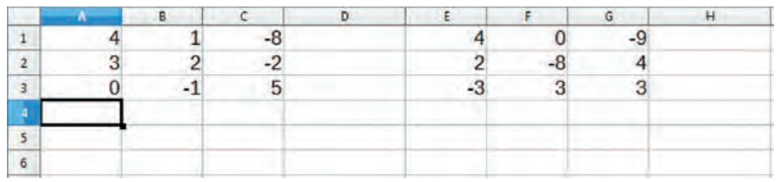
O LibreOffice Calc permite realizar cálculos com matrizes por meio de um recurso denominado **fórmula de matriz**. Observe a seguir algumas possibilidades de uso desse recurso.

Adição de duas matrizes

Vamos calcular a soma das matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -9 \\ 2 & -8 & 4 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

1º passo

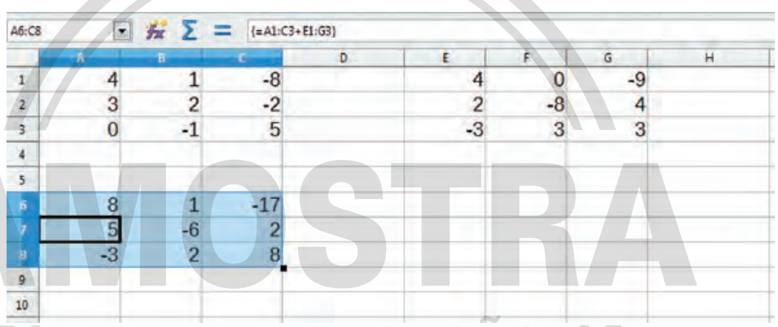
Digite os elementos das matrizes na planilha eletrônica, dispondo-os em linhas e colunas como elas aparecem na respectiva matriz. Neste exemplo, a matriz *A* foi digitada no intervalo de células **A1:C3**, e a matriz *B*, em **E1:G3**.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	4	1	-8		4	0	-9	
2	3	2	-2		2	-8	4	
3	0	-1	5		-3	3	3	
4								
5								
6								

2º passo

Na célula **A6**, digite a fórmula =**A1:C3**+**E1:G3** e pressione a combinação de teclas **CTRL**+**SHIFT**+**ENTER**.



A6:C8 {=A1:C3+E1:G3}

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	4	1	-8		4	0	-9	
2	3	2	-2		2	-8	4	
3	0	-1	5		-3	3	3	
4								
5								
6	8	1	-17					
7	5	-6	2					
8	-3	2	8					
9								
10								

Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

A matriz correspondente à soma das duas matrizes será exibida em **A6:C8**.

Para compor uma fórmula, após digitar o símbolo de igual (=), também é possível inserir nomes de células ou de intervalos de células usando as setas do teclado e a tecla **SHIFT** ou selecionando-as com o *mouse*.

No LibreOffice Calc, a combinação de teclas **CTRL**+**SHIFT**+**ENTER** deve ser usada quando o resultado da fórmula a ser inserida for uma matriz.

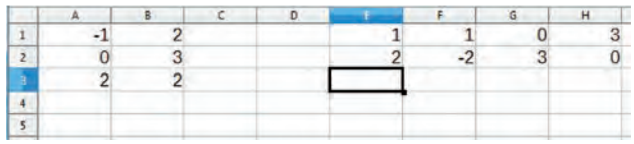
Multiplicação entre duas matrizes

Se tentássemos multiplicar as duas matrizes do exemplo anterior no LibreOffice Calc de modo análogo ao que foi feito para a soma, usando a fórmula =**A1:C3*E1:G3**, obteríamos como resultado $\begin{bmatrix} 16 & 0 & 72 \\ 6 & -16 & -8 \\ 0 & -3 & 15 \end{bmatrix}$, o que não corresponde ao produto de matrizes, pois ela é o resultado da multiplicação dos elementos correspondentes de cada matriz, tal como na soma de matrizes.

Para realizar o produto de duas matrizes, usaremos a função =**MATRIZ.MULT()**. No exemplo a seguir, vamos obter o produto de $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ por $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

1º passo

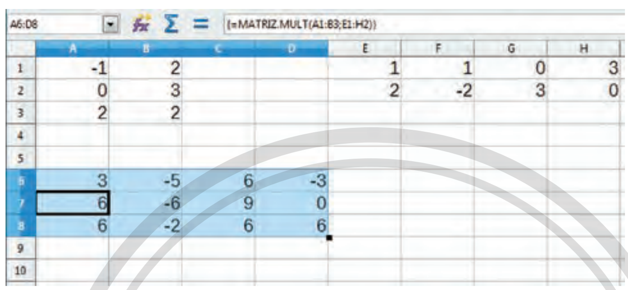
Digite a matriz A em **A1:B3** e a matriz B em **E1:H2**, como mostra a imagem.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	-1	2			1	1	0	3
2	0	3			2	-2	3	0
3	2	2						
4								
5								

2º passo

Na célula **A6**, digite a fórmula $=$**MATRIZ.MULT(A1:B3;E1:H2)** e pressione a combinação de teclas **CTRL**$+$**SHIFT**$+$**ENTER**.



A6:D8 {=MATRIZ.MULT(A1:B3;E1:H2)}

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	-1	2			1	1	0	3
2	0	3			2	-2	3	0
3	2	2						
4								
5								
6	3	-5	6	-3				
7	6	-6	9	0				
8	6	-2	6	6				
9								
10								

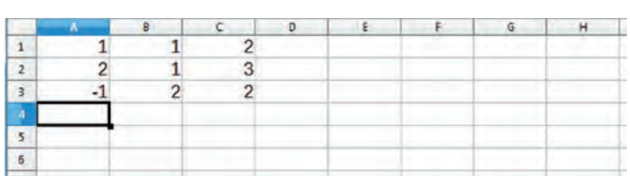
Como a matriz A é 3×2 e a matriz B é 2×4, tem-se como resultado uma matriz 3×4, correspondente ao produto $A \cdot B$ e exibida em **A6:D8**.

Obter a inversa de uma matriz quadrada invertível

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ invertível. Vamos usar a função $=$**MATRIZ.INVERSO()** para obter sua inversa e, em seguida, verificar que o produto de A pela matriz obtida é igual à matriz identidade 3×3.

1º passo

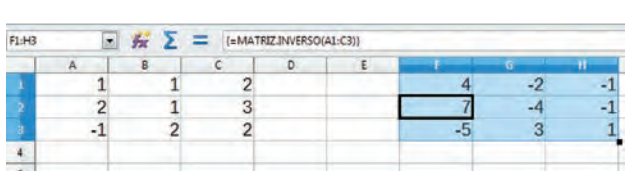
Digite a matriz A em **A1:C3**, como mostra a imagem.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	1	2					
2	2	1	3					
3	-1	2	2					
4								
5								
6								

2º passo

Na célula **F1**, digite a fórmula $=$**MATRIZ.INVERSO(A1:C3)** e pressione a combinação de teclas **CTRL**$+$**SHIFT**$+$**ENTER**.



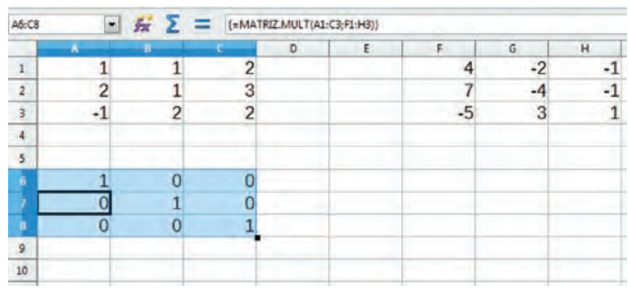
F1:H3 {=MATRIZ.INVERSO(A1:C3)}

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	1	2			4	-2	-1
2	2	1	3			7	-4	-1
3	-1	2	2			-5	3	1
4								
5								

Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

3º passo

Para verificar se a matriz obtida em **F1:H3** é de fato a inversa de A, vamos realizar o produto dessas duas matrizes. Para isso, digite a fórmula =**MATRIZ.MULT(A1:C3;F1:H3)** na célula **A6** e pressione a combinação de teclas **CTRL**+**SHIFT**+**ENTER**.



A6:C8 {=MATRIZ.MULT(A1:C3;F1:H3)}

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	1	2			4	-2	-1
2	2	1	3			7	-4	-1
3	-1	2	2			-5	3	1
4								
5								
6	1	0	0					
7	0	1	0					
8	0	0	1					
9								
10								

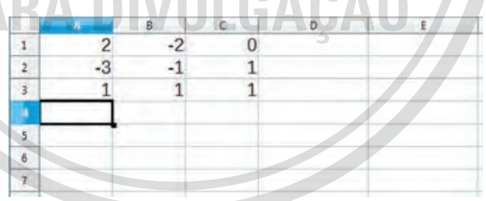
A matriz obtida em **A6:C8** é a matriz identidade 3×3. Assim, verificamos que a matriz obtida em **F1:H3** é, de fato, a inversa de A, ou seja, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 7 & -4 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Determinante

No LibreOffice Calc, o determinante de uma matriz quadrada pode ser calculado com a fórmula =**MATRIZ.DETERM()**. Observe como podemos obter o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1º passo

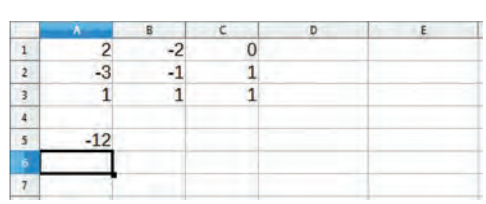
Digite a matriz A em **A1:C3**, como mostra a imagem.



	A	B	C	D	E
1	2	-2	0		
2	-3	-1	1		
3	1	1	1		
4					
5					
6					
7					

2º passo

Na célula **A5**, digite a fórmula =**MATRIZ.DETERM(A1:C3)** e pressione **ENTER**.



	A	B	C	D	E
1	2	-2	0		
2	-3	-1	1		
3	1	1	1		
4					
5	-12				
6					
7					

Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

O número obtido em **A5** corresponde a $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Neste exemplo, não foi necessário usar a combinação de teclas **CTRL**+**SHIFT**+**ENTER**, pois, embora a função =**MATRIZ.DETERM()** tenha uma matriz como parâmetro, o seu resultado é um número.

Sistemas de amortização

Nas páginas **189** e **190**, ao discutir os sistemas de amortização, construímos quadros com o juro pago em cada prestação, o valor amortizado e o saldo devedor em cada mês em um empréstimo, tanto no sistema Price quanto no SAC. A seguir, vamos reproduzir esses quadros no LibreOffice Calc usando recursos comuns em qualquer planilha eletrônica.

Sistema Price

No exemplo apresentado na página **189**, foi realizado um empréstimo de R$ 36 500,00 a uma taxa de juro de 8% ao mês, a ser pago em 6 prestações mensais de R$ 7 895,51. Vamos reproduzir o quadro com os valores relevantes desse empréstimo mês a mês. Porém, em vez de digitar todos os valores, usaremos fórmulas na planilha eletrônica para calculá-los.

1º passo

Na primeira linha, digite os nomes que identificam as informações de cada coluna: **n**, **Prestação**, **Juro**, **Valor amortizado** e **Saldo devedor**. Na linha de baixo, preencha a célula **A2** com o valor 0, e a célula **E2** com o valor do empréstimo, R$ 36 500,00, para indicar o saldo devedor no período inicial.

	A	B	C	D	E
1	n	Prestação	Juro	Valor amortizado	Saldo devedor
2	0				R$ 36.500,00
3					
4					
5					

2º passo

Preencha os valores referentes ao primeiro mês de acordo com as instruções a seguir.

- O valor de *n* aumenta de uma em uma unidade, então, na célula **A3**, digite a fórmula =**A2+1**.
- O valor da prestação é fixo, então, na célula **B3**, digite **R$ 7895,51**.
- O juro corresponde a 8% do valor do saldo devedor do período anterior, então, na célula **C3**, digite a fórmula =**0,08*E2**.
- A diferença entre a prestação e o juro do período é igual ao valor amortizado, então, na célula **D3**, digite a fórmula =**B3-C3**.
- O saldo devedor é igual ao saldo devedor do período anterior subtraído do valor amortizado no período. Então, na célula **E3**, digite a fórmula =**E2-D3**.

	A	B	C	D	E
1	n	Prestação	Juro	Valor amortizado	Saldo devedor
2	0				R$ 36.500,00
3	1	R$ 7.895,51	R$ 2.920,00	R$ 4.975,51	R$ 31.524,49
4					
5					

3º passo

As fórmulas que calculam os valores do primeiro período podem ser estendidas para os períodos seguintes. Para isso, siga as instruções a seguir.

- Selecione o intervalo **A3:E3**.

A3:E3 =A2+1

	A	B	C	D	E
1	n	Prestação	Juro	Valor amortizado	Saldo devedor
2	0				R$ 36.500,00
3	1	R$ 7.895,51	R$ 2.920,00	R$ 4.975,51	R$ 31.524,49
4					
5					

Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

- Pressione **CTRL+C** para copiar o conteúdo.

A3:E3 =A2+1

	A	B	C	D	E
1	n	Prestação	Juro	Valor amortizado	Saldo devedor
2	0				R$ 36.500,00
3	1	R$ 7.895,51	R$ 2.920,00	R$ 4.975,51	R$ 31.524,49
4					
5					

- Selecione o intervalo **A4:E8**.

	A	B	C	D	E
1	n	Prestação	Juro	Valor amortizado	Saldo devedor
2	0				R$ 36.500,00
3	1	R$ 7.895,51	R$ 2.920,00	R$ 4.975,51	R$ 31.524,49
4					
5					
6					
7					
8					
9					

- Pressione **ENTER** para colar o conteúdo copiado.

A4:E8 =A3+1

	A	B	C	D	E
1	n	Prestação	Juro	Valor amortizado	Saldo devedor
2	0				R$ 36.500,00
3	1	R$ 7.895,51	R$ 2.920,00	R$ 4.975,51	R$ 31.524,49
4	2	R$ 7.895,51	R$ 2.521,96	R$ 5.373,55	R$ 26.150,94
5	3	R$ 7.895,51	R$ 2.092,08	R$ 5.803,43	R$ 20.347,50
6	4	R$ 7.895,51	R$ 1.627,80	R$ 6.267,71	R$ 14.079,79
7	5	R$ 7.895,51	R$ 1.126,38	R$ 6.769,13	R$ 7.310,67
8	6	R$ 7.895,51	R$ 584,85	R$ 7.310,66	R$ 0,01
9					

Teoricamente, o saldo devedor deve ser zerado ao final do último período. Porém, como precisamos realizar arredondamentos, é natural que ocorram pequenas diferenças nos valores. No exemplo acima, o programa mostra um saldo devedor de R$ 0,01 ao final do 6º período.

Sistema de amortização constante (SAC)

No exemplo apresentado na página **190**, foi realizado um empréstimo de R$ 25 000,00 a uma taxa de juro de 6% ao mês, a ser pago em 5 prestações com amortização constante de R$ 5 000,00 em cada prestação. O procedimento para construir o quadro para o exemplo de empréstimo no sistema de amortização constante é parecido com o que foi feito anteriormente, para o empréstimo no sistema Price.

1º passo

Na primeira linha, digite os nomes que identificam as informações de cada coluna: **n**, **Valor amortizado**, **Juro**, **Prestação** e **Saldo devedor**. Na linha de baixo, preencha a célula **A2** com o valor 0, e a célula **E2** com o valor do empréstimo, R$ 25 000,00, para indicar o saldo devedor no período inicial.

	A	B	C	D	E
1	n	Valor amortizado	Juro	Prestação	Saldo devedor
2	0				R$ 25.000,00
3					
4					
5					

Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

2º passo

Preencha os valores referentes ao primeiro mês de acordo com as instruções a seguir.

- O valor de *n* aumenta de uma em uma unidade, então, na célula **A3**, digite a fórmula =**A2**+**1**.
- O valor amortizado é fixo, então, na célula **B3**, digite **R$ 5 000,00**.
- O juro corresponde a 6% do valor do saldo devedor do período anterior, então, na célula **C3**, digite a fórmula =**0,06*E2**.
- A prestação é igual ao valor amortizado adicionado ao juro, então, na célula **D3**, digite a fórmula =**B3**+**C3**.
- O saldo devedor é igual ao saldo devedor do período anterior subtraído do valor amortizado no período, então, na célula **E3**, digite a fórmula =**E2-B3**.

	A	B	C	D	E
1	n	Valor amortizado	Juro	Prestação	Saldo devedor
2	0				R$ 25.000,00
3	1	R$ 5.000,00	R$ 1.500,00	R$ 6.500,00	R$ 20.000,00
4					
5					

3º passo

As fórmulas usadas no cálculo dos valores do primeiro período podem ser estendidas para os períodos seguintes. Para isso, siga as instruções a seguir.

- Selecione o intervalo **A3:E3**.

A3:E3 =A2+1

	A	B	C	D	E
1	n	Valor amortizado	Juro	Prestação	Saldo devedor
2	0				R$ 25.000,00
3	1	R$ 5.000,00	R$ 1.500,00	R$ 6.500,00	R$ 20.000,00
4					
5					

- Pressione **CTRL**+**C** para copiar o conteúdo.

A3:E3 =A2+1

	A	B	C	D	E
1	n	Valor amortizado	Juro	Prestação	Saldo devedor
2	0				R$ 25.000,00
3	1	R$ 5.000,00	R$ 1.500,00	R$ 6.500,00	R$ 20.000,00
4					
5					

- Selecione o intervalo **A4:E7**.

A4:E7

	A	B	C	D	E
1	n	Valor amortizado	Juro	Prestação	Saldo devedor
2	0				R$ 25.000,00
3	1	R$ 5.000,00	R$ 1.500,00	R$ 6.500,00	R$ 20.000,00
4					
5					
6					
7					
8					

- Pressione **ENTER** para colar o conteúdo copiado.

A4:E7 =A3+1

	A	B	C	D	E
1	n	Valor amortizado	Juro	Prestação	Saldo devedor
2	0				R$ 25.000,00
3	1	R$ 5.000,00	R$ 1.500,00	R$ 6.500,00	R$ 20.000,00
4	2	R$ 5.000,00	R$ 1.200,00	R$ 6.200,00	R$ 15.000,00
5	3	R$ 5.000,00	R$ 900,00	R$ 5.900,00	R$ 10.000,00
6	4	R$ 5.000,00	R$ 600,00	R$ 5.600,00	R$ 5.000,00
7	5	R$ 5.000,00	R$ 300,00	R$ 5.300,00	R$ 0,00
8					

Imagens: The Document Foundation/ Acervo da produtora

Leitura e pesquisa

A seguir, apresentamos algumas sugestões de leitura e pesquisa em livros e *sites*. Os livros indicados abordam direta ou indiretamente os assuntos desenvolvidos no volume, e os *sites* podem fornecer informações valiosas para enriquecer seus conhecimentos.

Boa leitura e uma ótima pesquisa!

Livros:

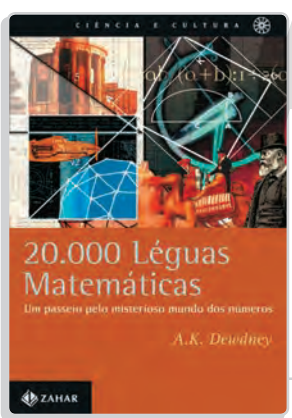
Record/Arquivo da editora

Barrella, Elaine Spisso; Martins, Laura Maria Runau (Orgs.).
A matemática nas profissões. São Paulo: Portal, 2010.
Esse livro apresenta diversas pesquisas e entrevistas de profissionais de variadas áreas que relatam como e para que utilizam a Matemática em suas profissões.

Bellos, Alex.
Alex no País dos Números. Tradução de Berilo Vargas e de Claudio Carina. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.
Nesse livro, Alex Bellos embala em uma exploração pela Matemática, viajando entre diferentes línguas e culturas e investigando diversos assuntos, como o facinante número π, as propriedades do sudoku, raciocínio quantitativo de tribos indígenas e muito mais.

Berlinski, David.
O advento do algoritmo: a ideia que governa o mundo. Tradução de Leila Ferreira de Souza Mendes. São Paulo: Globo, 2002.
Em capítulos curtos, o autor desse livro apresenta como a História, as Ciências e a Matemática contribuíram para o surgimento intrigante do algoritmo, antecipando ferramentas para o surgimento da era digital.

Cole, K. C.
O Universo e a xícara de chá. Tradução de Elizabeth Leal. Rio de Janeiro: Record, 2006.
Nesse livro, é possível enxergar a lógica matemática que passa despercebida em situações cotidianas. Com essa percepção, o autor convida o leitor a melhorar sua aptidão e lucidez para tomar importantes decisões.



Zahar/Arquivo da editora

Dewdney, Alexander Keewatin.
20 000 léguas matemáticas: um passeio pelo misterioso mundo dos números. Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Zahar, 2000 (Ciência & cultura).
O livro é uma odisseia pela História da matemática, na busca de resposta para a questão "Por que tudo que existe, dos átomos ao próprio Universo, é regido por leis matemáticas?". Além disso, traz aplicações claras para mostrar o surpreendente poder da Matemática.

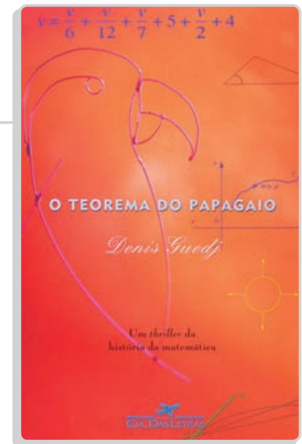
Editora 34/Arquivo da editora

Doxiadis, Apostolos.
Tio Petros e a conjectura de Goldbach: um romance sobre os desafios de Matemática. Tradução de Cristiane Gomes de Riba. São Paulo: Editora 34, 2001.
O livro narra a história de Petros Papachristos, que enlouqueceu depois de dedicar sua vida para solucionar o enigma "Todo número inteiro par maior do que 2 pode ser representado como a soma de dois números primos.". O problema, nomeado conjectura de Goldbach, ainda hoje, depois de 250 anos, é um dos mais intrigantes da Matemática.

Du Sautoy, Marcus.
Os mistérios dos números: os grandes enigmas da matemática (que até hoje ninguém foi capaz de resolver). Tradução de George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2013.
Esse livro aborda os maiores desafios matemáticos de todos os tempos, revelando sua beleza e sua contribuição para a compreensão do mundo em que vivemos. Em cada capítulo é oferecida ao leitor uma viagem por grandes temas da Matemática.

Garbi, Gilberto Geraldo.
A rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
O livro relata de maneira simples e clara quatro milênios da História da matemática, sem preocupação com a linguagem matemática das fórmulas, pois podem ser entendidas no próprio contexto.

Guedj, Denis.
O teorema do papagaio.
Tradução de Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.
Nessa narrativa, o autor desafia a compreensão do pensamento matemático tanto para os personagens da história, uma família inusitada com seu papagaio, quanto para o leitor. Em seu contexto, ele apresenta alguns personagens históricos importantes para a Matemática, como Tales, Pitágoras, Fermat, Euler e Tartaglia.



Companhia das Letras/Arquivo da editora

Mlodinow, Leonard.
A janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. Tradução de Enézio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2004.
De maneira clara e divertida, o livro mostra como a geometria intervém em tudo à nossa volta, mostrando que ela faz parte da arte, da música, da pintura, da escultura, da arquitetura e até mesmo do corpo humano.

Paenza, Adrián.
Matemática, cadê você?: sobre números, personagens, problemas e curiosidades. Tradução de Maria Alzira Brum Lemos. Rio de Janeiro: Ciência que late, 2009.
O livro é um guia para a descoberta da Matemática no dia a dia. São diversas histórias rodeadas por personagens e números que alteram em graus de dificuldade, algumas podem ser compreendidas de maneira simples e outras são mais desafiadoras.

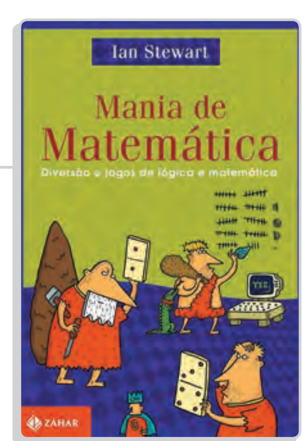
Singh, Simon.
O último teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 7. ed. Tradução de Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Record, 2000.
O livro conta a história de diversos matemáticos que tentaram resolver o teorema que Fermat deixou sem descrever a solução. Nele também é apresentada a importância desse teorema para o desenvolvimento da Matemática e como ele confundiu e frustrou mentes brilhantes por mais de 350 anos.

Smullyan, Raymond.
A dama ou o tigre? E outros problemas lógicos. Tradução de Helena Martins. Rio de Janeiro: Zahar, 2004.
O livro narra a história fictícia de uma princesa que soluciona diversos problemas lógicos matemáticos para que seu namorado não fosse morto. Seu pai, um rei semibárbaro, após descobrir o romance ordenou que o rapaz fosse julgado em sua arena, onde deveria escolher entre duas portas que decidiriam seu destino.

Smullyan, Raymond.
Alice no país dos enigmas: incríveis problemas lógicos no país das maravilhas. Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Zahar, 2000.
O livro insere os personagens do original *Alice no país das maravilhas* em situações de jogos, problemas lógicos e paradoxos, propondo enigmas que convidam o leitor a refletir sobre a vida e as dificuldades de saber o que é real ou não e diferenciar o certo do errado.

Zahar/Arquivo da editora

Stewart, Ian.
Mania de matemática: diversão e jogos de lógica matemática. Tradução de Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Zahar, 2005.
Esse livro reúne vários desafios matemáticos construídos em torno de relatos ficcionais, envolvendo jogos e brincadeiras. Os capítulos abrangem alguns assuntos relativamente simples e outros um pouco mais sofisticados, como é o caso da otimização.



Zahar/Arquivo da editora

Difel/Arquivo da editora

Szipiro, George.
A vida secreta dos números: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos. Tradução de J. R. Souza. Rio de Janeiro: Difel, 2008.
O livro mostra por meio de particularidades curiosas como a Matemática afeta os mais diversos aspectos de nossas vidas, que vão do direito até a botânica. Ele busca desmistificar a Matemática como uma “ciência inatingível” e apresentar os prazeres que ela pode proporcionar no dia a dia de qualquer pessoa.

Tahan, Malba.
Os números governam o mundo: folclore da Matemática. Rio de Janeiro: Ediouro, 1998.
O livro apresenta simbologias, mistérios e algumas origens místicas envolvendo os números, com base na citação de Pitágoras de que “os números governam o mundo”.

Tahan, Malba.
O homem que calculava. 40. ed. Rio de Janeiro: Record, 1995.
O livro narra a história de um sábio calculista persa que, durante suas viagens, resolve problemas e enigmas aparentemente sem solução. As respostas que ele encontra para os problemas deixam os expectadores maravilhados.

Arte & Matemática/Fac-símile: ID/BR

Sites

Todos os *sites* foram acessados em: 18 maio 2016.

Arte & Matemática. Disponível em: <http://linkte.me/e19di>.
O *site* traz explicações sobre conceitos matemáticos de acordo com períodos e/ou temas, associando-os à arte em geral.

Banco Internacional de Objetos Educacionais. Disponível em: <http://linkte.me/jgfz7>.
O *site* contém áudios, experimentos práticos, animações, vídeos e *softwares* educacionais de diversos conteúdos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

Brasil Escola. Disponível em: <http://linkte.me/vj7c1>.
O *site* fala sobre o que é a Matemática e para que ela é utilizada. Em uma coluna denominada “canais da matemática”, há uma série de temas, com explicações e exercícios.

Banco Internacional de Objetos Educacionais/Fac-símile: ID/BR

ENEM. Disponível em: <http://linkte.me/q28ny>.
Nesse *site* é possível acessar as provas e os gabaritos do ENEM de anos anteriores, além de obter informações a respeito de resultados do candidato.

Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: <http://linkte.me/c39d3>.
Nesse *site* é possível acessar as provas e os gabaritos da OBM de anos anteriores. Também há tópicos sobre como se preparar para as competições, quem são os organizadores, o calendário das provas, os regulamentos, entre outros.

Olimpíada Brasileira de Matemática/Fac-símile: ID/BR

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Disponível em: <http://linkte.me/dpo1a>.
Nesse *site* é possível acessar as provas e as soluções, o banco de questões, as apostilas e os vídeos. Também há tópicos sobre as escolas inscritas, as cerimônias nacionais de premiação, o calendário, os regulamentos, as dúvidas sobre o regulamento e a competição, entre outros.

Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio. Disponível em: <http://linkte.me/q5rik>.
O *site* possui experimentos, vídeos, áudios e *softwares* que podem ser acessados tanto por essas categorias quanto por temas específicos.

Gabarito

unidade 1

capítulo 1 Trigonometria

1. a) Aproximadamente 3,14 dm e 90°.

b) Aproximadamente 9,42 dm e 180°.

c) Aproximadamente 1,57 dm e 45°.

2. a) $\frac{25\pi}{36}$

b) $\frac{4\pi}{125}$

c) $\frac{\pi}{12}$

d) $\frac{\pi}{2}$

3. a) 60°

b) 45°

c) 89° 18′

d) 30°

4. $\overset{\frown}{AB}$: $\frac{\pi}{4}$; $\overset{\frown}{AC}$: $\frac{\pi}{2}$; $\overset{\frown}{AD}$: $\frac{5\pi}{6}$; $\overset{\frown}{AE}$: $\frac{4\pi}{3}$; $\overset{\frown}{AF}$: $\frac{7\pi}{4}$

5. a) Aproximadamente 12,56 cm.

b) Aproximadamente 1,05 cm.

c) Aproximadamente 3,14 cm.

6. a) $\frac{\pi}{2}$

b) 180°

c) 0°

d) $\frac{7\pi}{4}$

7. a) Matemática.

b) História.

c) Música.

d) A equipe irá perder a vez.

8. Não há um menor trajeto, pois a bolinha percorre a mesma distância, 5π, nos três trajetos.

9. Aproximadamente 5,23 m.

10. a) 45°; $45° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

c) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

d) 0°; $k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

11. $\overset{\frown}{AB} = \frac{145\pi}{144}$; $\overset{\frown}{CD} = \frac{47\pi}{144}$

12. 4π cm

13. a) $45° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) $\overset{\frown}{AP}$: $30° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$
$\overset{\frown}{AQ}$: $330° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

c) $\overset{\frown}{AP}$: $60° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$
$\overset{\frown}{AQ}$: $120° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$
$\overset{\frown}{AR}$: $240° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$
$\overset{\frown}{AS}$: $300° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

14. a) Negativo.

b) Positivo.

c) Negativo.

d) Positivo.

15. a) 4º quadrante.

b) 3º quadrante.

c) 1º quadrante.

d) 2º quadrante.

e) 2º quadrante.

f) 3º quadrante.

16. a) $\text{sen}\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; $\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{tg}\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{sen}(-1620°) = 0$; $\cos(-1620°) = -1$; $\text{tg}(-1620°) = 0$

c) $\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1$

d) $\text{sen}(4\,050°) = 1$; $\cos(4\,050°) = 0$; $\text{tg}(4\,050°)$: não está definida

e) $\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; $\text{tg}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

f) $\text{sen}\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; $\cos\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
$\text{tg}\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

17. a) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; $\text{tg}\alpha = \frac{3}{4}$

b) $\cos\alpha = -\frac{9}{15}$; $\text{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$

c) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$; $\text{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$

18. a) Ponto *F*.

b) Ponto *K*.

c) Ponto *I*.

19. a) $A = \sqrt{3}$

b) $A = -\frac{1}{2}$

20. Alternativa **c**.

21. Sim; não.

22. Não.

23. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) -1

c) $\frac{3}{2}$

d) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

24. $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

25. a) $D(f) = [0, \pi]$

b) $D(g) = [0, 2\pi]$

27. Alternativa **b**.

28. a) 2

b) 4

c) $D(f) = \mathbb{R}$

d) $Im(g) = [-4, 4]$

e) $p = \pi$

f) $p = \frac{2\pi}{3}$

29. a-II; b-I; c-III

30. a) $p = 2\pi$; $Im(q) = [-5, 5]$

b) $p = 1$; $Im(r) = [2, 4]$

c) $p = \frac{4\pi}{3}$; $Im(s) = [-6, -2]$

32. a) $a = -3$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $d = 0$; $f(x) = -3 + \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

b) $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$, $d = \pi$; $g(x) = 2\cos(x + \pi)$

33. a) 27

b) 3

34. Alternativa **b**.

35. a) altura máxima: 2,7 m; altura mínima: $-0{,}1$ m

b) 12 h

36. a) altura máxima: 8 cm; altura mínima: 0 cm.

b) 1200 ciclos.

37. a) $x = \frac{\pi}{6}$

b) $x = \pi$

c) $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

d) $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$

38. a) $S = \left\{\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2};\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2};\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

39. a) $S = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

b) $S = \varnothing$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{12}\right\}$

40. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \pi + 2k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

41. a) $2 \leqslant m \leqslant 3$

b) $-\frac{3}{4} \leqslant m \leqslant -\frac{1}{4}$

c) $-3 \leqslant m \leqslant -1$

d) $3 \leqslant m \leqslant 4$

42. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

unidade 2

capítulo 2 Análise combinatória

1. b) 6 possibilidades.

2. Não, pois Paula pode se arrumar de 32 maneiras distintas, no máximo.

3. b) 12 tipos.

4. 48 possibilidades.

5. 750 maneiras.

6. Alternativa **a**.

7. a) 42 números.

b) 180 números.

c) 2 058 números.

8. a) 125 números.

b) 16 números.

9. 60 números.

10. 140 números.

11. Alternativa **c**.

12. 480 maneiras.

13. 16 320 senhas.

14. Alternativa **3**.

15. 180 possibilidades.

16. a) 35 283

b) $\frac{4}{3}$

c) 21

d) 300

17. a) $\frac{1}{n+1}$

b) $n^3 - n$

c) $n^2 - 4$

18. a) $n = 10$

b) $n = 2$

c) $n = 6$

19. $P_k = k!$

20. a) 120 anagramas.

b) 6 anagramas.

c) 24 anagramas.

21. 120 maneiras.

22. 240 maneiras.

23. $n = 7$

24. a) 2 b) 20 c) 1 814 400

25. 315 números.

26. 5 040 tentativas, no máximo.

27. 12 números.

28. 13 800 maneiras distintas.

29. 5 079 110 400 possibilidades de classificação.

30. Alternativa **c**.

31. a) 10 c) 300 e) $\frac{272}{7}$

b) 55 d) 43 644 f) 14 700

32. a) 15 maneiras diferentes.

b) 6 combinações diferentes.

33. a) 98 280 maneiras distintas.

b) 10 partidas.

34. 5 005 maneiras.

35. b) I-IV; II-VI; III-V

36. Alternativa **b**.

37. a) 10 segmentos.

b) 20 segmentos.

c) 20 diagonais.

38. a) 6 720 anagramas.

b) 90 anagramas.

c) 420 anagramas.

d) 2 494 800 anagramas.

39. a) 30 anagramas.

b) 60 480 anagramas.

40. 1 088 640 possibilidades de senhas.

41. 135 135 maneiras.

42. 1 680 mensagens.

43. a) 5 lados de triângulos.

b) 10 caminhos diferentes.

44. a) 30

b) $\frac{4}{5}$

c) $\frac{1}{p! \cdot (n-p)!}$

d) $n! = P_n$

45. a) $x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$

b) $x^3 - 15x^2 + 75x - 125$

c) $193 - 132\sqrt{2}$

d) $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

e) $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$

f) $220\sqrt{5} + 284\sqrt{3}$

46. Pela expressão do termo geral do binômio, temos:

a) $T_{p+1} = \binom{5}{p} x^{5-3p} \cdot (-1)^p$

b) 135

c) 625

d) $2\,500x^3$

47. Alternativa **b**.

48. a) 1 b) −32

49. $\frac{81}{16}$

50. Não existe.

51. a) 462 b) 126 c) 120 d) 792

52. Alternativa **c**.

53. Alternativa **c**.

54. Alternativa **c**.

55. $n = 5$

56. $m = 4$

57. $n = 3$

58. Alternativa **c**.

59. Alternativa **c**.

60. Alternativa **b**.

capítulo 3 Probabilidade

1. $\Omega = \{(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E)\}$

2. a) $E = \{(L, L), (L, V), (L, A), (L, B)\}$

b) $F = \{(L, L), (V, V), (A, A), (B, B)\}$

c) $G = \{(L, V), (L, A), (L, B), (V, L), (V, A), (V, B), (A, L), (A, V), (A, B), (B, L), (B, V), (B, A)\}$

d) $H = \{(L, V), (V, L), (V, V), (V, A), (V, B), (A, V), (B, V)\}$

3. $A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 2), (7, 1)\}$

4. a) $\Omega = \{(\text{M, T, E}), (\text{M, E, T}), (\text{M, T, L}), (\text{M, L, T}), (\text{M, E, L}), (\text{M, L, E}), (\text{T, M, E}), (\text{T, E, M}), (\text{T, M, L}), (\text{T, L, M}), (\text{T, E, L}), (\text{T, L, E}), (\text{E, M, T}), (\text{E, T, M}), (\text{E, T, L}), (\text{E, L, T}), (\text{E, L, M}), (\text{E, M, L}), (\text{L, E, T}), (\text{L, T, E}), (\text{L, T, M}), (\text{L, M, T}), (\text{L, E, M}), (\text{L, M, E})\}$

b) $P = \{(\text{M, T, E}), (\text{M, E, T}), (\text{T, M, E}), (\text{T, E, M}), (\text{E, M, T}), (\text{E, T, M})\}$

$Q = \{(\text{M, E, L}), (\text{M, L, E}), (\text{E, L, M}), (\text{E, M, L}), (\text{L, E, M}), (\text{L, M, E})\}$

$R = \{(\text{T, E, L}), (\text{T, L, E}), (\text{E, T, L}), (\text{E, L, T}), (\text{L, E, T}), (\text{L, T, E})\}$

$S = \{(\text{M, T, L}), (\text{M, L, T}), (\text{T, M, L}), (\text{T, L, M}), (\text{E, T, L}), (\text{E, L, T}), (\text{L, E, T}), (\text{L, T, E}), (\text{L, T, M}), (\text{L, M, T}), (\text{T, E, L}), (\text{T, L, E})\}$

$T = \varnothing$

5. a) $D = \{(1, \text{L}), (2, \text{L}), (3, \text{L}), (1, \text{R}), (2, \text{R}), (3, \text{R}), (1, \text{B}), (2, \text{B}), (3, \text{B}), (1, \text{A}), (2, \text{A}), (3, \text{A})\}$

b) $E = \{(\times, \text{L}), (\times, \text{R}), (\times, \text{B}), (\times, \text{A}), (\uparrow, \text{L}), (\uparrow, \text{R}), (\uparrow, \text{B}), (\uparrow, \text{A}), (*, \text{L}), (*, \text{R}), (*, \text{B}), (*, \text{A}), (+, \text{p}), (+, \text{p}), (+, \text{p}), (+, \text{p}), (+, \text{p}), (+, \text{p}), (+, \text{p}), (+, \text{p})\}$

c) $F = \{(6, \text{R}), (7, \text{R}), (8, \text{R}), (9, \text{R}), (6, \text{B}), (7, \text{B}), (8, \text{B}), (9, \text{B})\}$

6. Resposta pessoal.

7. $\frac{10}{21}$ ou aproximadamente 47,62%

8. a) 30 bolinhas verdes e nenhuma bolinha de outra cor.

b) Nenhuma bolinha azul, m bolinhas verdes e n bolinhas brancas, com $m, n \in \mathbb{N}$ e $m + n = 30$.

9. a) $\frac{1}{2}$ ou 50% c) 0 ou 0%

b) $\frac{1}{6}$ ou $16,\overline{6}\%$ d) $\frac{2}{3}$ ou $66,\overline{6}\%$

10. $\frac{8}{15}$ ou $53,\overline{3}\%$

11. Alternativa **e**.

12. $\frac{2}{3}$ ou $66,\overline{6}\%$

13. $\frac{3}{25}$ ou 12%

14. Alternativa **a**.

15. Alternativa **d**.

16. a) 1 ou 100%

b) 0 ou 0%

- A é um evento certo e B é um evento impossível.

17. a) 10^5 possibilidades.

b) $\frac{1}{10^5}$ ou 0,001%

c) $\frac{1}{10^4}$ ou 0,01%

18. a) Independentes. c) Independentes.

b) Dependentes. d) Dependentes.

19. a) $\frac{26}{37}$ ou aproximadamente 70,27%

b) $\frac{25}{59}$ ou aproximadamente 42,37%

c) $\frac{10}{13}$ ou aproximadamente 76,92%

20. a) $\frac{4}{13}$ ou aproximadamente 30,77%

b) $\frac{5}{8}$ ou 62,5%

21. $\frac{42}{380}$ ou aproximadamente 11,05%

22. a) $\frac{1}{17}$ ou aproximadamente 5,88%

b) $\frac{507}{33\,150}$ ou aproximadamente 1,53%

23. a) $\frac{398}{897}$ ou aproximadamente 44,37%

b) $\frac{200}{897}$ ou aproximadamente 22,3%

c) $\frac{99}{897}$ ou aproximadamente 11,04%

24. $\frac{1}{8}$ ou 12,5%

25. Resposta pessoal.

26. Alternativa **a**.

27. Alternativa **d**.

28. a) $\frac{17}{55}$ ou 30,$\overline{90}$%

c) $\frac{38}{55}$ ou 69,$\overline{09}$%

b) $\frac{24}{45}$ ou 53,$\bar{3}$%

d) $\frac{7}{15}$ ou 46,$\bar{6}$%

29. a) $\frac{310}{447}$ ou aproximadamente 69,35%

b) $\frac{125}{894}$ ou aproximadamente 13,98%

c) $\frac{12}{447}$ ou aproximadamente 2,68%

30. a) $\frac{1}{16}$ ou 6,25% b) $\frac{3}{8}$ ou 37,5% c) $\frac{1}{4}$ ou 25%

31. a) $\frac{24}{15\,625}$ ou aproximadamente 0,15%

b) $\frac{9\,261}{50\,000}$ ou aproximadamente 18,52%

c) $\frac{4\,096}{15\,625}$ ou aproximadamente 26,21%

32. a) $\frac{258\,048}{9\,765\,625}$ ou aproximadamente 2,64%

b) $\frac{8}{1\,953\,125}$ ou aproximadamente 0,0004%

c) $\frac{1}{9\,765\,625}$ ou aproximadamente 0,0001%

d) $\frac{1\,048\,576}{9\,765\,625}$ ou aproximadamente 10,74%

33. $\frac{1}{100}$ ou 1%

34. $\frac{3\,176\,523}{12\,500\,000}$ ou aproximadamente 25,41%

35. a) $\frac{27}{100}$ ou 27%

c) $\frac{15}{100}$ ou 15%

b) $\frac{53}{100}$ ou 53%

d) $\frac{65}{100}$ ou 65%

36. $\frac{610}{10\,000}$ ou 6,1%

unidade 3

capítulo 4 Sistemas lineares

1. a) coeficientes: 3, 6, −9; incógnitas: *x*, *y*, *z*; termo independente: 0

b) coeficientes: 21, −30, 7; incógnitas: *x*, *y*, *z*; termo independente: 0

c) coeficientes: 9, 1, −3, 1; incógnitas: *x*, *y*, *z*, *w*; termo independente: 5

d) coeficientes: $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, 5; incógnitas: *x*, *y*, *z*; termo independente: 12

e) coeficientes: 3, 12, −1, $\frac{7}{5}$; incógnitas: *x*, *y*, *z*, *w*; termo independente: 1

2. a) Sim. c) Não. e) Não.

b) Sim. d) Sim.

- Item **a**.

3. Apenas $(5, 2, -1)$ é solução da equação.

4. Possíveis respostas: $(-2, 2)$, $(1, 4)$ e $(4, 6)$.

5. s-I; r-II; t-III; u-IV

6. a) $x + y + z = 22$

b) $(10, 10, 2)$; $(8, 10, 4)$; $(1, 15, 6)$

8. Alternativa **b**.

9. a) $m = -\frac{16}{5}$

b) Possível resposta: $(1, -1, 3)$, $(2, 1, -2)$ e $(4, -2, 4)$.

10. a) $10x + 20y + 40z + 60w = 600$

b) Possível resposta: $(10, 5, 7, 2)$ e $(6, 5, 8, 2)$.

11. a) Não linear.

b) Linear.

c) Linear.

d) Não linear.

12. Dentre as quádruplas apresentadas, apenas a do item **b** é solução do sistema.

13. Possíveis respostas:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 5x + 10y + 2z = 0 \\ \frac{3}{2}x + 3y - z = 0 \\ -6x + 12y + 5z = 0 \end{cases} .$$

14. a) $S = \{(6, 2)\}$; SPD

b) $S = \{(x, 4 - 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$; SPI

c) $S = \varnothing$; SI

15. O candidato acertou 34 questões e errou 6.

16. $m = 8$

17. a) SPD

b) SPI

c) SI

18. Alternativa **c**.

19. a) SPD; $S = \{(4{,}3; 0{,}75; 3; 4)\}$

b) SPI; $S = \left\{\left(\frac{14 - k}{2}, \frac{4 - k}{2}, k\right) \middle| k \in \mathbb{R}\right\}$

c) SI; $S = \varnothing$

20. a-II; b-I; c-III

21. S_1 e S_2.

22. a) $S = \{(6, -1, 2)\}$; SPD

b) $S = \{(12 - k; 5{,}1 - k; k) \mid k \in \mathbb{R}\}$; SPI

23. Alternativa **d**.

24. pipoca e suco: R$ 7,50; barra de cereal: R$ 5,00

25. Alternativa **c**.

capítulo 5 Matrizes

1. a) $\begin{bmatrix} 272 & 341 \\ 277 & 328 \\ 313 & 338 \\ 349 & 358 \\ 335 & 401 \end{bmatrix}$

b)
- a quantidade de homens desocupados, de feveirero a junho de 2015, em São Paulo;
- a quantidade de homens desocupados, no mês de junho de 2015, em São Paulo;
- a quantidade de pessoas desocupadas, no mês de abril de 2015, em São Paulo.
- a quantidade de mulheres desocupadas, no mês de março de 2015, em São Paulo.

2. a) 3×3 b) 4×4 c) 4×2 d) 2×4

3. a) 0 b) 2 c) 753 d) 15

4. 7×3

5. a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 9 & 0 & -1 & -2 \\ 25 & 16 & 0 & -1 \\ 49 & 36 & 25 & 0 \end{bmatrix}$

6. a) 40

b) 120

c) -12

d) 80

7. a) $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 & -7 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix}$

c) $P = I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. a) $M^t = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

b) $N^t = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 & 8 \\ 5 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 \\ 8 & 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

c) $R^t = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix}$

d) $P^t = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

e) $Q^t = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

9. Resposta pessoal.

10. $a = 5$; $b = -2$; $c = 3$

11. a) $x = 3$; $y = 9$; $z = 4$

b) $x = 16$; $y = 6$; $z = 8$

c) $x = 2$; $y = 3$; $z = 5$

12. $r = 1$; $s = -2$; $t = 3$

14. Alternativa **c**.

15. $n = 4\,715$; $i = 3$; $j = 1$

16. a) $\begin{bmatrix} -10 & -\frac{3}{2} & 9 \\ 4 & 6 & 2 \\ \frac{21}{4} & 5 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \\ 0 & -2 \\ -6 & -13 \\ 15 & -5 \end{bmatrix}$

17. a) $\begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 20 & -4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 4 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 0 & 15 \\ -60 & -36 \\ 27 & -12 \\ -15 & -21 \end{bmatrix}$

18. a) 2 b) 20

19. a) $\begin{bmatrix} 16 & -6 & -4 \\ -4 & 45 & 40 \\ -2 & 13 & -2 \end{bmatrix}$

b) Não é possível.

c) Não é possível.

d) $\begin{bmatrix} 27 \end{bmatrix}$

20. Alternativa **d**.

21. a) $\begin{bmatrix} 0 & 5 & -8 \\ -6 & -3 & -12 \\ \sqrt{2} - 6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 41 + 9\sqrt{2} & 124 & 68 \\ 66 + 12\sqrt{2} & 180 & 92 \\ 46 + 7\sqrt{2} & 112 & 55 \end{bmatrix}$

c) Não é possível calcular.

22. $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

23. a) $\begin{bmatrix} -8 & 12 \\ -9 & -11 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -32 & 48 \\ -36 & -44 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -55 & -20 \\ 15 & -47 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

25. a) $\begin{bmatrix} 0 & -2{,}5 \\ 14 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5{,}5 & -7{,}5 \\ 6{,}5 & -2{,}5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{3}{35} & \frac{1}{14} \\ -0{,}4 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & -1{,}5 \\ 5 & 2{,}5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -3 & -2{,}5 \\ 1 & -0{,}5 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 3 & 2{,}5 \\ -1 & 0{,}5 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

26. A matriz B não é inversa de A.

27. $\frac{5}{13}$

28. a) $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -1 & -8 & 7 \\ 5 & -9 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$

29. a) -2; 0

b) $x + 7y - 4w = 9$

30. a) $X = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

b) $X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $X = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

31. Alternativa **a**.

32. Alternativa **a**.

capítulo 6 Determinantes

1. a) 11

b) -42

c) $5x$

d) b^2

2. $x = 8$ ou $x = -3$

3. a) -23

b) 15

c) -23

d) 23

4. a) 30

b) -19

c) 189

d) 72

5. $x = -3$ ou $x = -7$

6. a) $x = -\frac{1}{2}$ b) $x = -\frac{1}{2}$ c) $x = -\frac{1}{2}$

7. $x = -5$

8. Alternativa **b**.

9. Alternativa **c**.

10. Alternativa **a**.

11. Alternativa **b**.

12. a) Verdadeiro.

b) Falso.

c) Falso.

d) Verdadeiro.

e) Falso.

14. a) 0

b) -10

c) 3

d) -69

15. a) 1

b) $-\frac{1}{2}$

c) $-\frac{1}{3}$

d) $-\frac{1}{4}$

16. $-\frac{1}{2}$

17. Matriz do item **c**.

18. $\frac{1}{12}$

19. Alternativa **d**.

20. Alternativa **d**.

21. a) Admite inversa; $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) Não admite inversa.

c) Admite inversa; $C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$

23. a) Os pontos não são colineares; $\triangle ABC$: 19 u.a.

b) Os pontos não são colineares; $\triangle PQR$: 12 u.a.

c) Os pontos não são colineares; $\triangle DEF$: $\frac{5}{2}$ u.a.

24. Alternativa **e**.

25. a) $P(8, 13)$

b) $P\left(-\frac{7}{4}, 0\right)$

c) $P(-1, 1)$.

26. B e C.

27. a) $x + 4y + 4 = 0$

b) $-4x + 3y - 2 = 0$

28. 22,5 u.a.

29. $A(4, -6)$; $B(-7, 3)$ e $C(10, 0)$

30. 36 u.a.

31. a) $(1; 1,2)$, $(3; 3,6)$, $(5, 6)$, $(7; 8,4)$

b) $-4,8x + 4y = 0$

32. Alternativa **a**.

33. Resposta pessoal.

34. $m = -\frac{1}{3}n$

35. a) O sistema é SPD para $a \neq -\frac{3}{2}$ e SI para $a = -\frac{3}{2}$.

b) O sistema é SPD para $m \neq 6$ e SI para $m = 6$.

c) O sistema é SPD para todo $a \in \mathbb{R}$.

36. a) $a \neq -\frac{1}{3}$; $b \in \mathbb{R}$

b) $a = -6$; $b = -\frac{7}{2}$

c) $a = 5$ e $b \neq -21$

37. a) O sistema é SPD para $m = -5$ e SI para $m \neq -5$.

b) O sistema é SPI para todo $a \in \mathbb{R}$.

c) O sistema é SPI para todo $a \in \mathbb{R}$.

d) O sistema é SPD para $p = -\frac{106}{9}$ e SI para $p \neq -\frac{106}{9}$.

38. SPI

39. $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq 9$.

40. $m = \frac{ad}{c}$; $n = \frac{bd}{c}$

41. Alternativa **a**.

42. Alternativa **a**.

unidade 4

capítulo 7 Matemática financeira

1. a) $\frac{3}{20}$; 0,15

b) $\frac{23}{100}$; 0,23

c) $\frac{12}{25}$; 0,48

d) $\frac{13}{25}$; 0,52

e) $\frac{17}{100}$; 0,17

f) $\frac{77}{100}$; 0,77

2. a) R$ 52,90

b) 120 kg

c) 3 600 m

d) 270 g

e) 1,44 L

3. 40%

4. a) 49,57%

b) De acordo com os economistas, sim.

c) Resposta pessoal.

5. Alternativa **e**.

6. a) 64 dm^2; 256 dm^2

b) 25%

7. *Rock*: 120 alunos;

Funk: 90 alunos;

Pop: 45 alunos;

Sertanejo: 30 alunos;

Outros: 15 alunos.

8. a) Aproximadamente 72%.

b) É mais vantajoso abastecer com gasolina.

c) R$ 2,67

9. a) Aproximadamente 57,75%.

b) Aproximadamente R$ 126,20.

10. Alternativa **c**.

11. Alternativa **a**.

12. batata-doce: aproximadamente R$ 3,30;

ameixa: aproximadamente R$ 9,74

13. a) Aproximadamente 1,2%.

b) Aproximadamente R$ 746,63.

14. a) 46%

b) R$ 207,90

15. a) R$ 3 975,55

b) R$ 8 400,51

c) Aproximadamente R$ 3 556,22.

16. Aproximadamente 0,7%.

17. Alternativa **b**.

18. a) R$ 3,18

b) R$ 345,78

19. a) Resposta pessoal.

b) Proposta I: aproximadamente R$ 2 203,52; Proposta II: aproximadamente R$ 2 357,64

c) Resposta pessoal.

20. a) Gráfico II.

b) Gráfico I.

21. Aproximadamente R$ 2 500,00.

22. Aproximadamente R$ 1 273,15.

23. Aproximadamente 0,5%.

24. 23 meses.

25. Aproximadamente R$ 2 337,08.

26. Instituição **A**: R$ 1 478,47; instituição **B**: R$ 1 521,53

27. Alternativa **c**.

28. Aproximadamente 5,67%.

29. a)
- Sistema Price: O quadro II.
- SAC: O quadro I.

b)
- Valor financiado: R$ 420 000,00.
- Taxa de juros: 0,825%.

c)
- 4ª prestação: R$ 4 830,35.
- 297º saldo devedor: R$ 4 200,00.

d)
- 5º juros: R$ 3 454,24.
- 298º saldo devedor: R$ 7 481,23.

30. a) Aproximadamente R$ 276,45.

b) Aproximadamente R$ 3 317,40.

c) Aproximadamente R$ 337,40.

31. a) R$ 500,00

b) primeira prestação: R$ 980,00; última prestação: R$ 482,88

c) R$ 57 849,60

d) R$ 175 545,60

capítulo 8 Área de figuras planas

1. a) polígono I: 16 m^2; polígono II: 4 m^2; polígono III: 12 m^2; polígono IV: 24 m^2; área total: 56 m^2

b) polígono I: 7 km^2; polígono II: $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ km^2; polígono III: 10 km^2; área total: $\frac{34 + 27\sqrt{3}}{2}$ km^2

2. Alternativa **e**.

3. a) Aproximadamente 28,51 m^2

b) Aproximadamente 759,37 km^2

c) 1734 dam^2

4. a) 1800 cm^2

b) 1800 cm^2

5. 0,6 m^2

6. Alternativa **a**.

7. Alternativa **d**.

8. a) 4 000 cm^2

b) 1 225 cm^2

c) Sim.

9. a) $441\sqrt{3}$ cm^2

b) $24\sqrt{3}$ m^2

10. 2

11. a) Aproximadamente 28,26 cm^2.

b) Aproximadamente 266,9 m^2.

c) Aproximadamente 706,5 m^2.

12. a) Aproximadamente 502,4 m^2.

b) Aproximadamente 113,04 m^2.

13. Aproximadamente 678,24 cm^2.

14. a) $16(4 - \pi)$ m^2

b) Aproximadamente 43,9 m^2.

c) $12(3\sqrt{3} - \pi)$ m^2

15. a) 48π mm^2

b) 200π cm^2

c) 288π m^2

16. $\frac{3}{4}$

17. Alternativa **c**.

18. Aproximadamente 11,44 cm^2.

19. Aproximadamente 22 608 pessoas.

20. 15 cm^2

21. 144 cm^2

22. 78 m^2

Todos os *sites* foram acessados em: 18 maio 2016.

- Acafe – Associação Catarinense das Fundações Educacionais <http://linkte.me/rm38i>.
- Enem/Inep – Exame Nacional do Ensino Médio/Instituto Nacional de Estudo e Pesquisa <http://linkte.me/qwkgv>.
- EPCAr – Escola Preparatória de Cadetes do Ar <http://linkte.me/b24ka>.
- EsPCEx – Escola Preparatória de Cadetes do Exército <http://linkte.me/nrg66>.
- Fuvest – Fundação Universitária para o Vestibular <http://linkte.me/t26mh>.
- Mackenzie – Universidade Presbiteriana Mackenzie <http://linkte.me/o218p>.
- PUC-RJ – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro <http://linkte.me/i393k>.
- Udesc – Universidade do Estado de Santa Catarina <http://linkte.me/utn7e>.
- UEA – Universidade do Estado do Amazonas <http://linkte.me/w7299>.
- Uece – Universidade Estadual do Ceará <http://linkte.me/qdxx7>.
- UEG – Universidade Estadual de Goiás <http://linkte.me/zj7y5>
- UEL – Universidade Estadual de Londrina <http://linkte.me/v5v96>.
- Uema – Universidade Estadual do Maranhão <http://linkte.me/wi8mm>
- UEMG – Universidade do Estado de Minas Gerais <http://linkte.me/t5ixy>
- Uepa – Universidade do Estado do Pará <http://linkte.me/cf194>.
- Uerj – Universidade do Estado do Rio de Janeiro <http://linkte.me/k0pe4>.
- UFG – Universidade Federal de Goiás <http://linkte.me/ns1qq>.
- UFPR – Universidade Federal do Paraná <http://linkte.me/fv181>.
- UFSM – Universidade Federal de Santa Maria <http://linkte.me/qv8ra>.
- Uneb – Universidade do Estado da Bahia <http://linkte.me/i6t92>.
- Unicamp – Universidade Estadual de Campinas <http://linkte.me/g431m>.
- Unisinos – Universidade do Vale do Rio dos Sinos <http://linkte.me/ul14g>.
- UPE – Universidade de Pernambuco <http://linkte.me/z0256>.
- UPF – Universidade de Passo Fundo - Rio Grande do Sul <http://linkte.me/rl8dq>.

- Boyer, C. B. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- Carmo, M. P; Morgado, A. C; Wagner, E. *Trigonometria, números complexos*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005 (Coleção do Professor de Matemática).
- Castanheira, N. P. *Noções básicas de matemática comercial e financeira*. 2. ed. rev. e atual. Curitiba: Ibpex, 2008.
- Dolce, O.; Pompeo, J. N. *Fundamentos de matemática elementar*, 9: geometria plana. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- Eves, H. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.
- Iezzi, G. *Fundamentos de matemática elementar*, 3: trigonometria. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- __________; Hazzan, S. *Fundamentos de matemática elementar*, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- Hazzan, S. *Fundamentos de matemática elementar*, 5: combinatória, probabilidade. 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- Lima, E. L. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: Sbm, 2013 (Coleção Profmat).
- __________. et al. *A matemática no Ensino Médio*. 10. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2012. v. 1 (Coleção do Professor de Matemática).
- __________. et al. *A matemática no Ensino Médio*. 6. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2006. v. 2 (Coleção do Professor de Matemática).
- __________. et al. *A matemática no Ensino Médio*. 6. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2006. v. 3 (Coleção do Professor de Matemática).
- __________. *Meu professor de matemática e outras histórias*. 5. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2006 (Coleção do Professor de Matemática).
- Morgado, A. C.; Wagner, E.; Zani, S. *Progressões e matemática financeira*. 5. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2005 (Coleção do Professor de Matemática).
- Pickover, C. A. *O livro da matemática*: de Pitágoras à 57ª dimensão. Kerkdriel: Librero, 2011.
- Roque, T. *História da matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- Rooney, A. *A história da matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M.Books do Brasil Editora Ltda, 2012.

1 5 9 0 4 7
ISBN 978-85-418-1408-9
9 788541 814089