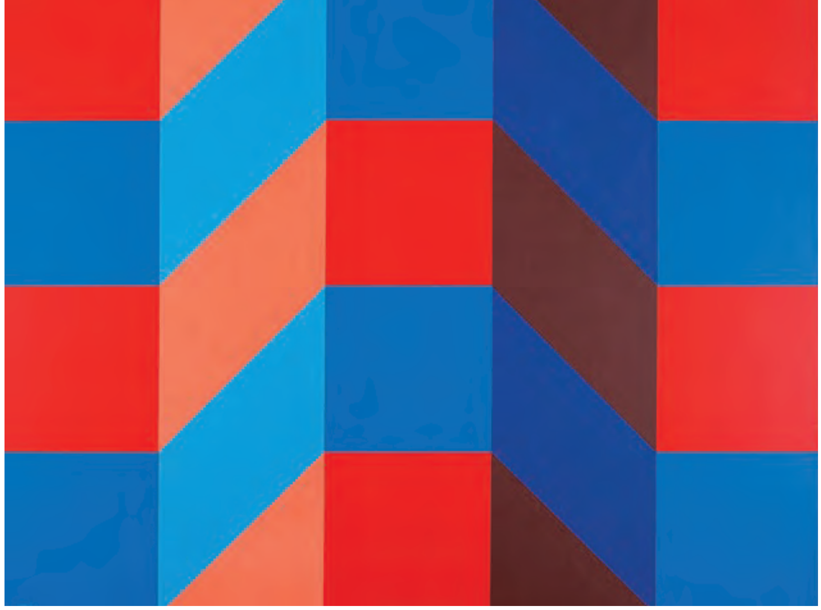
quadrante

MATEMÁTICA 1

Eduardo Chavante | Diego Prestes

Ensino Médio | 1º ano

sm



quadrante

MATEMÁTICA 1

Ensino Médio | 1º ano

Eduardo Chavante

- Licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR).
- Professor da rede pública nos Ensinos Fundamental e Médio.
- Autor de livros didáticos para os Ensinos Fundamental e Médio.

Diego Prestes

- Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
- Especialista em Educação Matemática pela UEL.
- Licenciado em Matemática pela UEL.
- Atuou como professor na rede particular nos Ensinos Médio e Superior.
- Autor de livros didáticos para o Ensino Médio.

1ª edição
São Paulo
2016

sm

Quadrante — Matemática — 1

Direção editorial Juliane Matsubara Barroso
Gerência editorial Roberta Lombardi Martins
Gerência de processos editoriais Marisa Iniesta Martin
Edição executiva Ana Paula Souza Nani
Edição: Kátia Takahashi, Larissa Calazans e Simone Politi Xavier
Colaboração técnico-pedagógica: Eduardo Wagner, Elenilton Vieira Godoy, Paulo Cezar Pinto Carvalho
Coordenação de controle editorial Flavia Casellato
Suporte editorial: Alzira Aparecida Bertholim Meana, Camila Cunha, Fernanda D'Angelo, Giselle Marangon, Mônica Rocha, Silvana Siqueira, Talita Vieira
Coordenação de revisão Cláudia Rodrigues do Espiríto Santo
Coordenação de *design* Rafael Vianna Leal
Coordenação de arte Ulisses Pires
Edição executiva de arte: Melissa Steiner
Coordenação de *design* Rafael Vianna Leal
Design: Leika Yatsunami, Tiago Stéfano
Coordenação de iconografia Josiane Laurentino
Produção editorial Scriba Projetos Editoriais
Edição executiva: Eduardo da Rosa Neto
Edição: Lucília Franco Lemos dos Santos
Assistência editorial: Daiane Gomes de Lima Carneiro, Leandro Figueira Ferreira, Ana Claudia Barretto, Thais Marcelle de Andrade, Victor Hugo dos Santos Gois
Preparação de texto: Ana Lúcia Pereira e Ieda Rodrigues
Revisão: Claudia Maietta
Edição de ilustrações: Maryane Silva e Camila Carmona
Cartografia: Paula Radi e Renan Fonseca
Iconografia: Túlio Esteves
Tratamento de imagens: José Vitor E. Costa
Diagramação: Leandro Pimenta

Capa Rafael Vianna Leal
Projeto gráfico Marcela Pialarissi e Rafael Hatadani
Imagem de capa Obra de Luiz Sacilotto, *Sem título*, 1993. Têmpera acrílica sobre tela, 110 cm x 110 cm. Coleção particular. Fotografia: Valter Sacilotto.
Editoração eletrônica Leonardo Mari
Fabricação Alexander Maeda
Impressão

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Chavante, Eduardo
Quadrante matemática, 1º ano : ensino médio / Eduardo Chavante, Diego Prestes. – 1. ed. – São Paulo : Edições SM, 2016. – (Coleção quadrante matemática)

Suplementado pelo manual do professor.
Bibliografia.
ISBN 978–85–418–1406–5 (aluno)
ISBN 978–85–418–1407–2 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Chavante, Eduardo. II. Prestes, Diego. III. Título. IV. Série.

16-02601 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

1ª edição, 2016

Edições SM Ltda.
Rua Tenente Lycurgo Lopes da Cruz, 55
Água Branca 05036-120 São Paulo SP Brasil
Tel. 11 2111-7400
edicoessm@grupo-sm.com
www.edicoessm.com.br

Apresentação

Querido(a) aluno(a),

Preparamos este livro com dedicação a fim de proporcionar a você condições de ampliar o que aprendeu a respeito da Matemática, além de auxiliá-lo(a) em seu ingresso aos cursos de Educação Superior e a outros que você almejar.

Sem um leitor, este livro nada mais é que um apanhado de letras, números e símbolos. No entanto, em suas mãos, ele se torna uma poderosa ferramenta, capaz de expandir seu entendimento acerca do mundo em que estamos inseridos.

Neste material, você vai encontrar textos e atividades que relacionam a Matemática com as outras áreas, além de situações em que seu conhecimento matemático será posto à prova. Esta obra também apresenta assuntos matemáticos direcionados à sua formação cidadã, fornecendo oportunidades de reflexão sobre atitudes que podemos, e devemos, desenvolver para viver melhor em uma sociedade dinâmica e em plena transformação.

Bons estudos!

Os autores.

Trabalhadora especializada em topografia manipulando um teodolito no canteiro de obras ao ar livre.

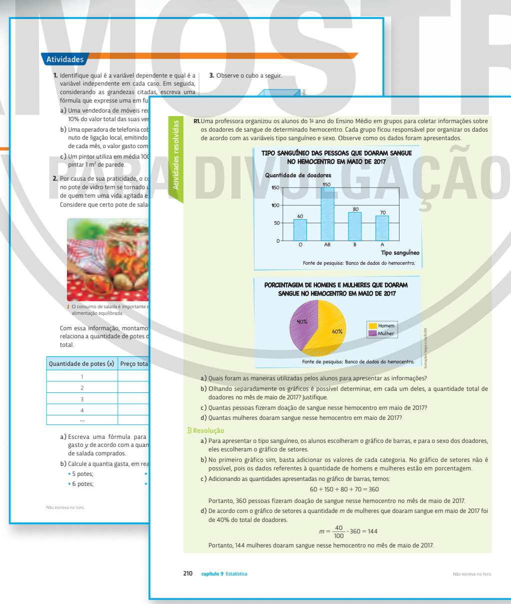
A Matemática é útil em diversas profissões. Em situações práticas do trabalho de um topógrafo, por exemplo, ele aplica noções de trigonometria ao manipular os equipamentos topográficos e geodésicos.

Dmitry Kalinovsky/Shutterstock.com/ID/BR

Conheça seu livro

Abertura de unidade

Nessa seção você, seus colegas e o professor terão a oportunidade de dialogar a respeito de temas relacionados com um dos capítulos que serão estudados naquela unidade.



Atividades

Nessa seção você será convidado a colocar em prática os conhecimentos que já possui e desafiado a perceber aspectos que podem ser melhorados. Algumas atividades estão indicadas com ícones.

Atividades resolvidas

Essas atividades complementam os conteúdos apresentados no capítulo e auxiliam no trabalho com as atividades que você deverá resolver.

Ícones

Atividades que exploram as diversas maneiras de usar a calculadora científica e o uso de ***software.***

Atividades para serem desenvolvidas com os colegas.

Atividades com maior grau de dificuldade e que estimulam diferentes estratégias de resolução.

Indica que as cores apresentadas nas imagens não correspondem às reais.

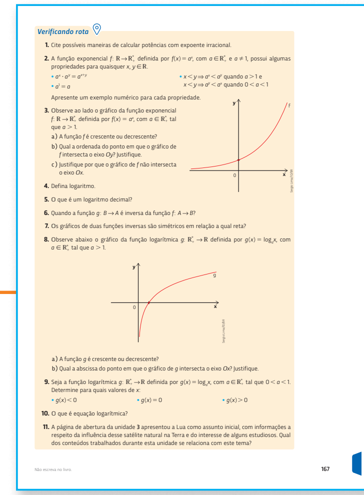
Indica que as imagens não são proporcionais entre si.

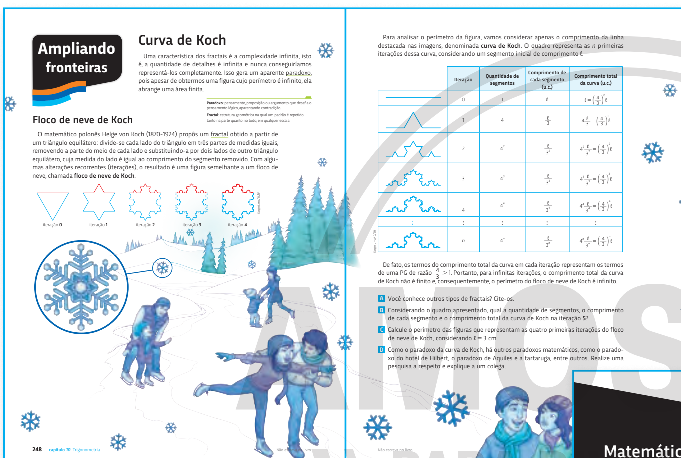
Valores em ação

Nessa seção você será convidado a refletir a respeito de diversos temas, como o cuidado com o seu próprio corpo, com o ambiente e o respeito ao próximo.

Verificando rota

Nessa seção você terá a oportunidade de rever os conceitos gerais desenvolvidos ao longo dos capítulos, verificando sua rota de aprendizagem.



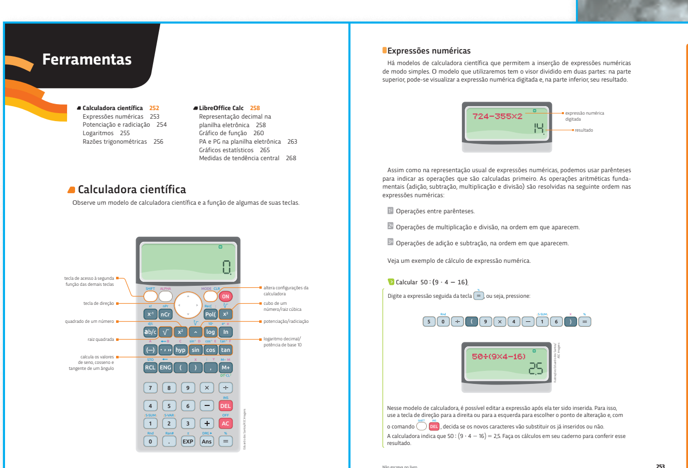


Ampliando fronteiras

A leitura dos textos apresentados nessa seção permite que você amplie as fronteiras do seu conhecimento em temas sobre a história e as diversas aplicações da Matemática.

Matemática em ação

Nessa seção você terá a oportunidade de colocar a Matemática em ação, dentro e fora da escola, e de perceber a sua relação com outras áreas do conhecimento.



Ferramentas

Nessa seção você vai aprender a utilizar a calculadora científica e a planilha eletrônica BrOffice Calc, ambas exploradas como ferramentas que aprofundam seus conhecimentos matemáticos.

Sumário

unidade 1

- **capítulo 1** Conjuntos
- **capítulo 2** Funções

Certamente você conhece ou já viu pessoas com traços físicos que as diferenciava das demais. Na verdade, independentemente da nacionalidade, cada um de nós apresenta suas próprias características físicas e hábitos. Isso tudo é o que contribui para enriquecer a diversidade cultural do povo brasileiro e de outros povos.

Para saber ao certo os grupos populacionais que compõem uma comunidade, fazemos um levantamento de todos e depois classificamos e agrupamos de modo organizado. Este é um procedimento relacionado à ideia de formação de conjuntos, assunto que será tratado nesta unidade.

Rawpixel.com/Shutterstock.com/ID/BR

Nesta unidade, você vai trabalhar com a ideia de conjuntos, estudar características e propriedades dos conjuntos numéricos e compreender a noção intuitiva de função.

capítulo 1

Conjuntos

Noções de conjuntos

A ideia de conjunto é uma noção primitiva que desempenha um papel fundamental em toda a Matemática e aparece, intuitivamente, quando consideramos um agrupamento qualquer.

Imagine um recipiente, que tem ou não objetos. Podemos associar esse recipiente a um **conjunto**. Neste caso, cada objeto pertencente a ele é chamado **elemento**.

Os elementos de um conjunto podem ser números, pontos ou até mesmo outros conjuntos. Neste capítulo, vamos estudar especialmente os conjuntos nos quais os elementos são números.

Ilustranet/ASC Imagens

No supermercado, por exemplo, os produtos nas prateleiras representam elementos do conjunto de "todos os produtos à venda". Já as mercadorias que colocamos no carrinho de compras representam os elementos do conjunto dos "produtos pelos quais vamos pagar".

Representações de conjuntos

Em geral, representamos um conjunto por uma letra maiúscula, e seus elementos ficam separados por vírgula (ou ponto e vírgula) e entre chaves.

Observe algumas maneiras de representar os elementos de um conjunto.

a Listamos os elementos entre chaves utilizando reticências para suprimir alguns deles, se necessário. Por exemplo:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad$ $C = \{0,5; 2,5; 4,5; 6,5; \dots\}$

$B = \{1, 2, 3, \dots, 98, 99\}$ $\quad$ $D = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Os conjuntos A e B são **finitos**, pois seus elementos podem ser contados, ou seja, podemos associar seus elementos aos números naturais, de 1 até certo número n, e os conjuntos C e D são **infinitos**, pois não são finitos. Por definição, o conjunto vazio é finito.

> Com as reticências, suprimimos uma quantidade finita ou infinita de elementos. Mas utilizamos esse recurso apenas quando não houver dúvidas a respeito dos elementos suprimidos, ou seja, quando houver uma lei de formação, mesmo que não expressa formalmente.

b Utilizamos uma **propriedade** ou **lei de formação**. Por exemplo:

$E = \{x \mid x \text{ é um número primo maior do que 2 e menor do que 15}\}$

$F = \{z \mid z \text{ é inteiro negativo e } z > -5\}$

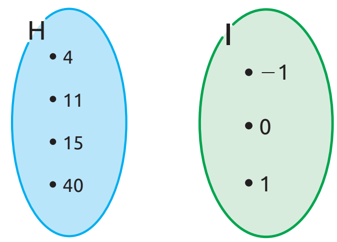
$G = \{2n \mid n \text{ é um número natural}\}$

> O símbolo "|" é lido como **tal que.**

A lei de formação é uma condição que define quais objetos serão elementos do conjunto. No caso do conjunto E, um número x será elemento do conjunto se, e somente se, satisfizer a condição de ser primo maior do que 2 e menor do que 15. Assim, os números 3, 5 e 7 são alguns dos elementos desse conjunto, enquanto 4, 6, 8 e 9 não são.

c Representamos os elementos por meio de um diagrama.

Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR



As figuras acima são chamadas **diagramas de Venn**, em homenagem ao lógico inglês John Venn (1834-1923), que as empregou em um artigo com estudos a respeito de lógica publicado em 1876. Elas representam, respectivamente, os conjuntos $H = \{4, 11, 15, 40\}$ e $I = \{-1, 0, 1\}$.

Maull & Fox. The Royal Society, Londres (Inglaterra)

MAULL & FOX, Fotografia de John Venn. 9 cm × 6 cm. The Royal Society - Real Sociedade de Londres para o Melhoramento do Conhecimento Natural, Londres (Inglaterra).

Relações entre elementos e conjuntos

Os elementos de um conjunto possuem uma relação de **pertinência** com esse conjunto. Assim, dizemos que um objeto x **pertence** a um conjunto M quando x é elemento de M. Nesse caso, escrevemos simbolicamente $x \in M$. Por outro lado, se y não é elemento de M, dizemos que y **não pertence** a M e escrevemos simbolicamente $y \notin M$.

Exemplos

a) Para $E = \{x \mid x \text{ é um número natural ímpar e } x < 10\}$ e $F = \{3, 4, 6, 9\}$, temos:

- $1 \in E$ e $1 \notin F$
- $7 \in E$ e $7 \notin F$
- $4 \notin E$ e $4 \in F$
- $9 \in E$ e $9 \in F$

b) Considere os seguintes conjuntos:

$A = \{a \mid a \text{ é um número natural múltiplo de } 3\}$

$C = \{c \mid c \text{ é um número primo e par}\}$

$B = \{b \mid b \text{ é divisor positivo de } 12\}$

$D = \{d \mid d \text{ é um número inteiro e } d^2 = 2\}$

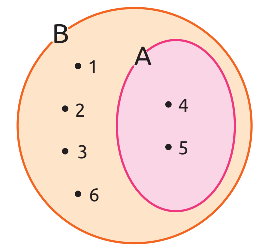
Temos que:

- O conjunto A é um exemplo de conjunto infinito: $A = \{0, 3, 6, 9, ...\}$.
- O conjunto B é um exemplo de conjunto finito: $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
- O conjunto C é um exemplo de **conjunto unitário**, ou seja, um conjunto que possui apenas um elemento: $C = \{2\}$.
- O conjunto D é o **conjunto vazio**, ou seja, possui zero elementos, denotado por $\emptyset$ ou $\{\ \}$, pois não existe número inteiro d tal que $d^2 = 2$.

Quando todo elemento de um conjunto A também é elemento de um conjunto B, dizemos que A é **subconjunto** de B, ou que A **está contido** em B, e escrevemos simbolicamente $A \subset B$. Essa relação entre os conjuntos é chamada **relação de inclusão**.

Exemplo

Se $A = \{4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, então $A \subset B$, pois cada elemento de A é também elemento de B. Observe ao lado a representação desses conjuntos em um diagrama de Venn.

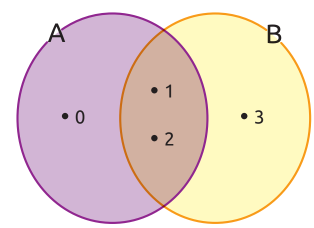


$A \subset B$

Para A não ser subconjunto de B, basta existir um elemento de A que não seja elemento de B. Neste caso, dizemos que A **não está contido** em B, e escrevemos simbolicamente $A \not\subset B$.

Exemplo

Se $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, então A não está contido em B, pois $0 \in A$ mas $0 \notin B$. Além disso, B não está contido em A, pois $3 \in B$ mas $3 \notin A$. Observe o diagrama de Venn ao lado.



$A \not\subset B$ e $B \not\subset A$

Dados os conjuntos A e B, se $A \subset B$ e $B \subset A$, então todo elemento de A é elemento de B e vice-versa. Logo, A e B possuem os mesmos elementos. Nesse caso, dizemos que os conjuntos A e B são iguais ($A = B$). De maneira simbólica, temos:

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A}$$

O símbolo "$\Leftrightarrow$" é lido como **se, e somente se**.

A relação de inclusão tem as seguintes propriedades:

- **Reflexiva**: $A \subset A$ para qualquer conjunto A, ou seja, todo conjunto está contido em si mesmo.
- **Antissimétrica**: Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$. Trata-se da condição de igualdade de dois conjuntos.
- **Transitiva**: Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

A propriedade transitiva da inclusão de conjuntos é um tipo de silogismo e é utilizada para avaliar argumentações lógicas simples. Observe um exemplo desse tipo de silogismo.

Silogismo: raciocínio dedutivo formal, que organiza afirmações com base em estruturas lógicas.

Premissa: fato ou afirmação que serve de base para a conclusão de um raciocínio.

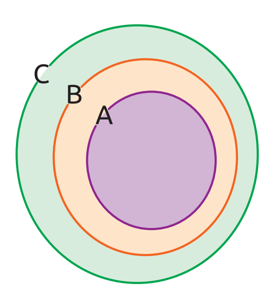
Todo gafanhoto é um inseto. | Todo inseto é invertebrado. — **premissas**

Logo:

Todo gafanhoto é invertebrado. — **conclusão**

Observe que é possível chegar a uma conclusão com base em duas premissas. Nesse tipo de argumentação, garante-se a veracidade da conclusão sempre que as premissas forem verdadeiras.

Se A é o conjunto dos gafanhotos, B o dos insetos e C o dos invertebrados, temos as premissas $A \subset B$ e $B \subset C$, logo, a conclusão é $A \subset C$. Observe ao lado a representação desses conjuntos por meio de diagramas.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Atividades

1. Represente no caderno, com chaves, o conjunto formado:

a) pelas letras do seu primeiro nome.

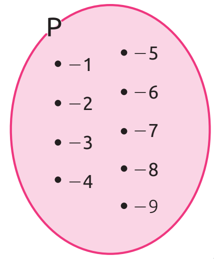
b) pelo primeiro nome de três dos seus colegas.

c) pelos números naturais ímpares menores do que 15.

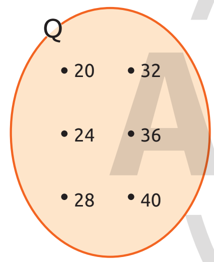
d) pelos divisores inteiros positivos do número 30.

2. **Em grupo** Observem os conjuntos representados pelos diagramas abaixo.

I)



II)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

a) Escrevam no caderno uma lei de formação para cada conjunto.

b) Os conjuntos P e Q são finitos ou infinitos? Justifiquem suas respostas.

3. Em cada item, represente os elementos por meio de um diagrama de Venn.

a) Conjunto Q dos números quadrados perfeitos maiores do que 0 e menores do que 30.

b) $B = \{2, 4, 8, 16, 32\}$

c) $D = \{y \mid y \text{ é primo e } 12 < y < 17\}$

4. Represente entre chaves os elementos de cada um dos conjuntos.

a) A é o conjunto dos números naturais menores do que 7.

b) $B = \{(-2)^x \mid x \text{ é natural e } x \leqslant 4\}$

c) C é o conjunto dos números inteiros maiores do que -6 e menores do que 0.

d) $D = \{y \mid y \text{ é inteiro e } -2 \leqslant y \leqslant 3\}$

5. Considere os conjuntos:

$A = \{x \mid x \text{ é um número positivo de dois algarismos iguais e menor do que } 100\}$

$B = \{x \mid x \text{ é múltiplo de 5 e } 5 \leqslant x \leqslant 100\}$

Relacione os números de cada item indicando se eles pertencem ($\in$) ou não pertencem ($\notin$) aos conjuntos A e B.

a) 333

b) 80

c) 55

d) $\sqrt{225}$

e) 99

f) 7

6. Classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa e reescreva as falsas no caderno, corrigindo-as.

a) O conjunto dos números primos é finito.

b) $A = \{x \mid x \text{ é divisor natural de 13 e } x < 10\}$ é um conjunto unitário.

c) $B = \{y \mid y \text{ é um número natural de três algarismos}\}$ é um conjunto infinito.

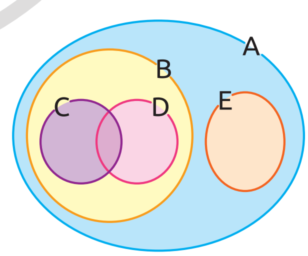
d) $C = \{z \mid z \text{ é um número primo par e } z \neq 2\}$ é um conjunto vazio.

7. Determine todos os subconjuntos não vazios de cada conjunto a seguir.

a) $A = \{1, 4, 9\}$

b) $B = \{2, 4, 6, 8\}$

8. Observe o diagrama de Venn e classifique no caderno as alternativas em verdadeira ou falsa.



Sergio Lima/ID/BR

a) $E \subset B$

b) $E \subset A$

c) $D = E$

d) $C \subset B \subset A$

e) $C \subset D \subset B$

f) $C \not\subset A$

9. (PUC-RJ) Sejam x e y números tais que os conjuntos $\{0, 7, 1\}$ e $\{x, y, 1\}$ são iguais. Então, podemos afirmar que:

a) $x = 0$ e $y = 5$

b) $x + y = 7$

c) $x = 0$ e $y = 1$

d) $x + 2y = 7$

e) $x = y$

Operações com conjuntos

Vimos anteriormente os conceitos principais envolvendo elemento e conjunto. Vamos agora estudar as operações com conjuntos.

União de conjuntos

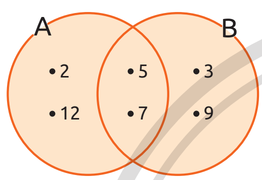
Dados os conjuntos A e B, definimos **união** de A e B o conjunto formado pelos elementos de A **ou** de B. A união de A e B é denotada por $A \cup B$ (lê-se A união B).

$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

Utilizamos a conjunção "ou" para indicar que um elemento da união de A e B pertence a pelo menos um desses conjuntos.

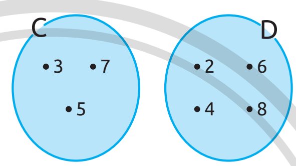
Exemplos

a



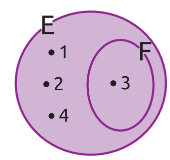
$A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 9, 12\}$

b



$C \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

c



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

$E \cup F = \{1, 2, 3, 4\} = E$

Sejam A e B conjuntos. A união de A e B é o conjunto formado pelos elementos de A mais os elementos de B, ou seja, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Intersecção de conjuntos

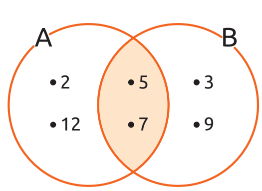
Dados os conjuntos A e B, definimos **intersecção** de A e B o conjunto formado pelos elementos de A **e** de B. Essa intersecção é denotada por $A \cap B$ (lê-se A intersecção B).

$$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B$$

Utilizamos a conjunção "e" para indicar que um elemento da intersecção de A e B pertence a esses dois conjuntos simultaneamente.

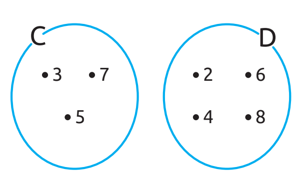
Exemplos

a



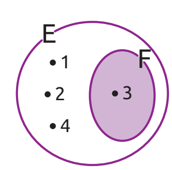
$A \cap B = \{5, 7\}$

b



$C \cap D = \varnothing$

c



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

$E \cap F = \{3\} = F$

Sejam A e B conjuntos. A intersecção deles é o conjunto formado pelos elementos de A e de B, ou seja, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

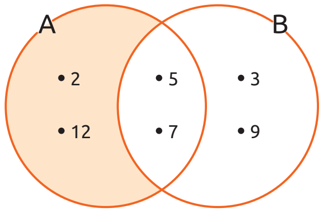
Diferença de conjuntos

Dados os conjuntos A e B, definimos que a **diferença** entre A e B, nessa ordem, é o conjunto formado pelos objetos que são elementos de A e não são elementos de B. A diferença entre A e B é denotada por $A - B$.

$$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \notin B$$

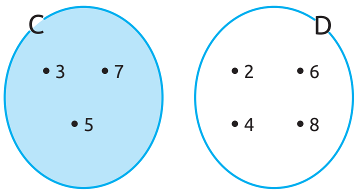
Exemplos

a



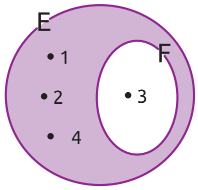
$A - B = \{2, 12\}$

b



$C - D = \{3, 5, 7\} = C$

c



$E - F = \{1, 2, 4\}$

Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

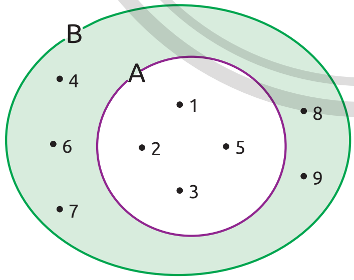
Sejam A e B conjuntos. A diferença entre A e B é o conjunto formado pelos objetos que pertencem a A mas não pertencem a B, ou seja, $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Complementar de um conjunto

Dados os conjuntos A e B, com $A \subset B$, definimos que o complementar de A em relação a B é o conjunto formado pelos objetos do conjunto B que não pertencem a A. O complementar de A em relação a B é denotado por $\complement_B^A$.

$$x \in \complement_B^A \Leftrightarrow x \in B \text{ e } x \notin A$$

Exemplo



Sergio Lima/ID/BR

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{1, 2, 3, 5\}$

$\complement_B^A = \{4, 6, 7, 8, 9\}$

Observe que o complementar de um conjunto A em relação ao conjunto B corresponde à diferença $B - A$.

Seja A um subconjunto de um conjunto B. O complementar de A em relação a B é o conjunto formado pelos objetos que pertencem a B mas não pertencem a A, ou seja, $\complement_B^A = \{x \in B \mid x \notin A\}$.

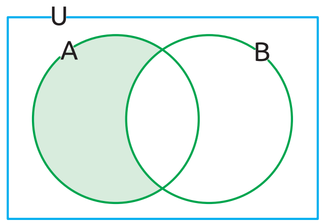
Chamamos **conjunto universo** aquele que contém todos os elementos do contexto no qual estamos trabalhando e também contém todos os conjuntos desse contexto. Se o conjunto universo estiver explícito no contexto, utilizamos simplesmente as notações A^c ou $\overline{A}$.

Quantidade de elementos de um conjunto

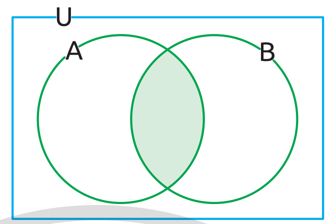
Se A é um conjunto finito, denotamos sua quantidade de elementos por $n(A)$. Em particular, temos:

- $n(\varnothing) = 0$
- $n(A) = 1$ se A for um conjunto unitário

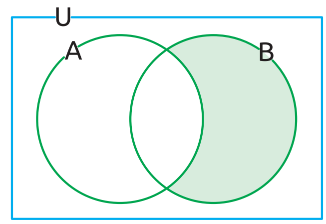
A quantidade de elementos da união de dois conjuntos finitos A e B pode ser menor do que ou igual à soma das quantidades de elementos de A e de B. Observe como podemos representar a quantidade de elementos do conjunto correspondente à parte destacada em cada figura.



$n(A) - n(A \cap B)$



$n(A \cap B)$



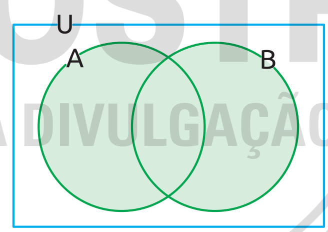
$n(B) - n(A \cap B)$

Note que, ao adicionar as três quantidades acima, obtemos a quantidade de elementos da união de A e B, ou seja:

$$n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$$

Logo:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Qual é a condição para obter a igualdade $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$?

Atividades resolvidas

R1. Considere os seguintes conjuntos:

$M = \{x \mid x \text{ é um múltiplo de 4 e } 0 \leqslant x \leqslant 12\}$

$N = \{x \mid x \text{ é um número inteiro e } -1 < x < 1\}$

$P = \{x \mid x \text{ é um número par e } 2 < x < 12\}$

Determine:

a) $M \cup N$ b) $N \cap P$ c) $M - P$ d) $N \cap (M - P)$ e) $M \cap N \cap P$

Resolução

Inicialmente, explicitamos os elementos dos conjuntos M, N e P entre chaves.

$M = \{0, 4, 8, 12\}$ $N = \{0\}$ $P = \{4, 6, 8, 10\}$

Em seguida, resolvemos os itens.

a) $M \cup N = \{0, 4, 8, 12\}$

b) $N \cap P = \varnothing$

c) $M - P = \{0, 12\}$

d) $N \cap (M - P) = \{0\}$

e) $M \cap N \cap P = \varnothing$

R2. Certo clube fez um levantamento para identificar quais de seus atletas estão aptos a disputar provas de triatlo. Constatou que entre eles 44 atletas estão aptos para a natação, 51 para o ciclismo e 60 para a corrida. Dos que estão aptos para a natação, 14 estão aptos também para o ciclismo, 15 estão aptos também para a corrida, 17 estão aptos para a corrida e o ciclismo e 9 estão aptos para as três modalidades do triatlo. Quantos atletas estão aptos para apenas uma modalidade do triatlo?

Harry How/Getty Images

O triatlo é um esporte olímpico que reúne três modalidades: natação, ciclismo e corrida. Na imagem, temos a atleta brasileira Pâmella Nascimento de Oliveira, 10ª colocada na prova de triatlo dos Jogos Pan-Americanos, em Toronto, Canadá, em 2015.

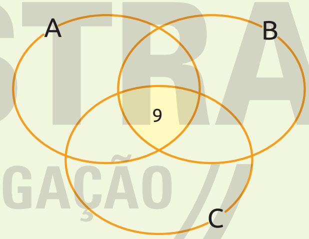
Resolução

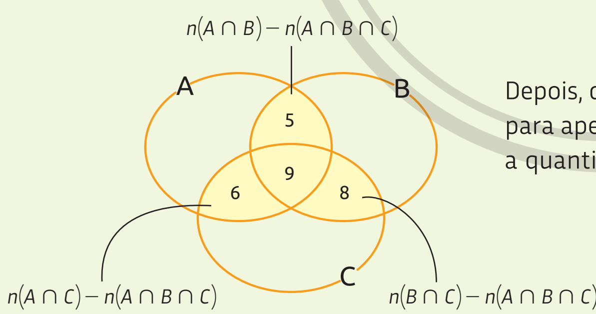
Inicialmente, nomeamos o conjunto formado pelos atletas aptos para a natação, o ciclismo e a corrida por A, B e C, respectivamente.

Desse modo, segue que:

- $n(A) = 44$
- $n(B) = 51$
- $n(C) = 60$
- $n(A \cap B) = 14$
- $n(A \cap C) = 15$
- $n(B \cap C) = 17$
- $n(A \cap B \cap C) = 9$

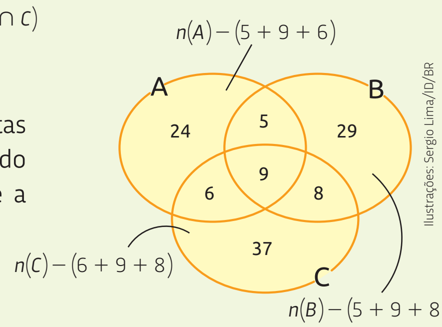
Dado que $n(A \cap B \cap C) = 9$, registramos este valor na intersecção dos três conjuntos, conforme o diagrama ao lado.





Depois, determinamos a quantidade de atletas aptos para apenas duas modalidades do triatlo subtraindo a quantidade dos aptos para as três.

Em seguida, determinamos a quantidade de atletas aptos para apenas uma modalidade subtraindo a quantidade dos aptos para apenas duas e a quantidade dos aptos para as três.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Portanto, a quantidade de atletas aptos para apenas uma modalidade do triatlo é:

$$24 + 29 + 37 = 90$$

R3. (Uece) Dos 200 professores de uma universidade, 60 dedicam tempo integral a essa instituição e 115 são doutores. Se entre os doutores apenas 33 dedicam tempo integral, então o número de professores da universidade que não dedicam tempo integral e não são doutores é:

a) 107 b) 82 c) 58 d) 55

Resolução

Sejam T o total de professores, I o conjunto de professores que dedicam tempo integral à instituição e D o conjunto de professores doutores. Temos:

- $n(T) = 200$
- $n(D) = 115$
- $n(I) = 60$
- $n(I \cap D) = 33$

$$n(I \cup D) = n(I) + n(D) - n(I \cap D)$$

$$n(I \cup D) = 60 + 115 - 33 = 142$$

Logo, a quantidade de professores que não dedicam tempo integral à instituição e não são doutores é dada por:

$$n(T) - n(I \cup D) = 200 - 142 = 58$$

Portanto, a alternativa correta é **c**.

R4. Dados os conjuntos A e B, não vazios, chamamos de **produto cartesiano** de A por B o conjunto formado pelos pares ordenados, em que a primeira coordenada pertence a A e a segunda coordenada pertence a B. O produto cartesiano de A e B é denotado por $A \times B$.

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Considerando os conjuntos $A = \{c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, represente, entre chaves, os elementos do conjunto:

a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) $A \times A$ d) $B \times B$

Resolução

a) Os elementos do conjunto $A \times B$ são todos os pares ordenados cuja primeira coordenada pertence a $A = \{c, d\}$ e a segunda pertence a $B = \{1, 2, 3\}$:

$$A \times B = \{(c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 2), (d, 3)\}$$

b) Os elementos do conjunto $B \times A$ são todos os pares ordenados cuja primeira coordenada pertence a $B = \{1, 2, 3\}$ e a segunda pertence a $A = \{c, d\}$:

$$B \times A = \{(1, c), (1, d), (2, c), (2, d), (3, c), (3, d)\}$$

Note que $A \times B \neq B \times A$, apesar de ambos possuírem a mesma quantidade de elementos.

c) Os elementos do conjunto $A \times A$ são todos os pares ordenados cuja primeira e segunda coordenada pertencem a $A = \{c, d\}$:

$$A \times A = \{(c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$$

d) Os elementos do conjunto $B \times B$ são todos os pares ordenados cuja primeira e segunda coordenada pertencem a $B = \{1, 2, 3\}$:

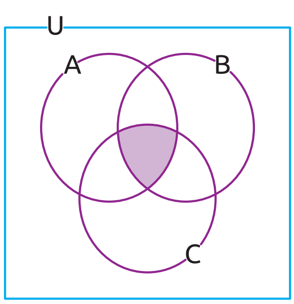
$$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Vale ressaltar que os conjuntos $E = \{1, 2\}$ e $F = \{2, 1\}$, por exemplo, são iguais. Já os pares ordenados $(1, 2)$ e $(2, 1)$ são diferentes.

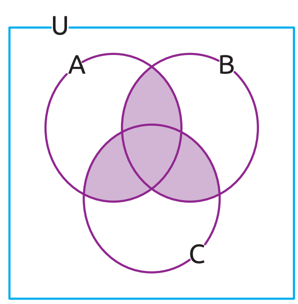
Atividades

10. Utilize os símbolos de união $(\cup)$ e intersecção $(\cap)$ para representar a parte em destaque dos diagramas a seguir.

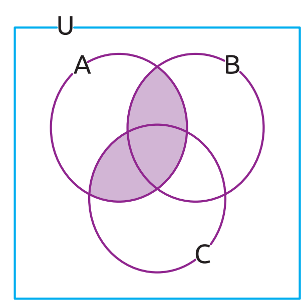
a)



b)



c)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

11. Em uma pesquisa realizada com 72 famílias, verificou-se que 48 possuem cachorro, 21 possuem gato e 13 possuem cachorro e gato. Quantas famílias não possuem cachorro nem gato?

12. (Ufes) Em um grupo de 57 pessoas, 3 pessoas gostam de arroz-doce, brigadeiro e cocada; 7 pessoas gostam de brigadeiro e cocada; 8 pessoas gostam de arroz-doce e cocada; 10 pessoas gostam de arroz-doce e brigadeiro. O total de pessoas do grupo que gostam de cocada é 15, de brigadeiro é 25 e de arroz-doce é 30. Calcule o número de pessoas do grupo que:

a) gostam de pelo menos um dos três doces;

b) não gostam de nenhum dos três doces;

c) gostam de arroz-doce, mas não gostam nem de brigadeiro nem de cocada.

13. Sejam os conjuntos:

- $A = \{-1, 4, 6, 7, 11\}$
- $B = \{0, 3, 6, 11\}$
- $C = \{-1, 0, 6, 7, 9\}$

Determine os elementos dos conjuntos indicados em cada item.

a) $B \cup C$

b) $A \cap B$

c) $(C \cap A) \cup B$

d) $B \cap (C \cup A)$

e) $A - C$

f) $C - (B \cup A)$

14. Considere os conjuntos:

- $A = \{1, 4, 16\}$;
- $B = \{x \mid x \text{ é um múltiplo positivo de 8 e } x < 48\}$;
- $C = \{x \mid x \text{ é divisor positivo de 16}\}$.

Determine:

a) $A - B$

b) $A - C$

c) $(B - C) \cup A$

d) $\complement_C^A$

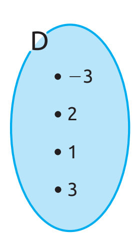
15. Seja $U = \{x \mid x \text{ é um número inteiro e } -4 < x < 4\}$ o conjunto universo. Determine o complementar de cada conjunto a seguir em relação a U.

a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

b) $B = \{-2, 1, 3\}$

c) $C = \{y \mid y > 0 \text{ e } y \text{ é divisor de 3}\}$

d)

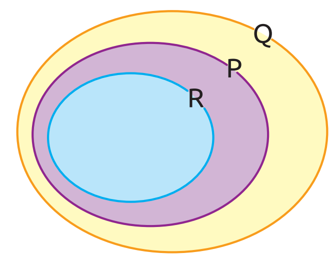


Sergio Lima/ID/BR

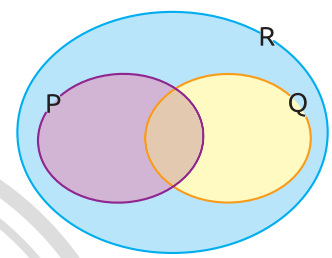
16. Sejam Q o conjunto dos quadriláteros, R o dos retângulos e P o dos paralelogramos, todos polígonos convexos de um mesmo plano.

a) Qual dos diagramas representa de maneira correta a relação entre esses conjuntos?

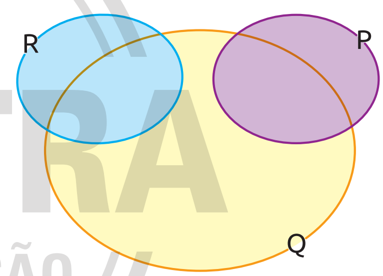
I)



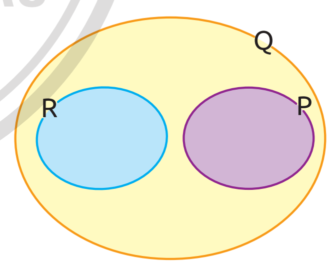
II)



III)



IV)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

b) Cite um elemento do conjunto:

- $Q - R$
- $Q - P$
- $(R \cap P) \cap Q$

17. (Uece) Em um grupo de 300 alunos de línguas estrangeiras, 174 alunos estudam inglês e 186 alunos estudam chinês. Se, neste grupo, ninguém estuda outro idioma além do inglês e do chinês, o número de alunos deste grupo que se dedicam ao estudo de apenas um idioma é:

a) 236.

b) 240.

c) 244.

d) 246.

18. Sabendo que A é o conjunto dos números naturais pares, $B = \{y \mid y \text{ é múltiplo de 3 e } 6 < y < 25\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, determine:

a) $n(B)$ b) $n(B - A)$ c) $n(A \cap C)$

19. Sejam os conjuntos $A = \{-2, 1\}$ e $B = \{1, 3, 4\}$. Represente entre chaves os elementos do conjunto:

a) $A \times A$

b) $B \times A$

20. Veja a promoção que uma loja de informática realizou para certo modelo de *notebook* e impressora.

Fotomontagem de Sérgio Lima criada com as fotografias cobalt88/Shutterstock.com/ID/BR e Natalia Siverina/Shutterstock.com/ID/BR

Todo o estoque de *notebooks* e impressoras da promoção foi vendido para um total de 75 clientes, dos quais 80% adquiriram um *notebook* e 64% adquiriram uma impressora, todos com pagamento à vista.

a) Sabendo que nenhum cliente levou mais de uma unidade do mesmo produto, responda: quantos clientes adquiriram o *notebook* e a impressora?

b) Qual foi o valor arrecadado com as vendas dessa promoção?

21. **Desafio** (Udesc) Considere em um conjunto universo, com 7 elementos, os subconjuntos A, B e C, com 3, 5 e 7 elementos, respectivamente. É correto afirmar que:

a) $(A \cap B) \cap C$ tem no máximo 2 elementos.

b) $(A \cap B) \cap C$ tem no mínimo 1 elemento.

c) $B \cap C$ tem 3 elementos.

d) $A \cap C$ tem no mínimo 2 elementos.

e) $A \cap B$ pode ser vazio.

22. **Desafio** (Cefet-MG) Uma enquete intitulada “O que mais falta no seu celular?” foi realizada em um *site* da internet, apresentando o seguinte resultado:

Itens do celular	Nº de internautas
TV	97
touch screen	44
Wi-Fi	37
TV e *touch screen*	10
Wi-Fi e *touch screen*	15
Wi-Fi e TV	18
Wi-Fi e TV e *touch screen*	5
nenhum	15

O número de internautas que responderam a essa enquete foi:

a) 130 c) 155

b) 148 d) 163

23. Uma empresa recebeu 75 currículos para preencher uma vaga de *telemarketing*, dos quais 33 eram de pessoas com menos de 25 anos, 47 de pessoas com o Ensino Médio completo e 13 de pessoas com 25 anos ou mais sem o Ensino Médio completo. Para a primeira entrevista serão selecionadas pessoas com menos de 25 anos cuja escolaridade mínima seja o Ensino Médio. Quantas pessoas serão selecionadas para a primeira entrevista?

24. (Uepa) De acordo com a reportagem da Revista VEJA (edição 2 341), é possível fazer gratuitamente curso de graduação pela internet. Dentre os ofertados temos os cursos de Administração (bacharelado), Sistemas de Computação (tecnólogo) e Pedagogia (licenciatura). Uma pesquisa realizada com 1 800 jovens brasileiros sobre quais dos cursos ofertados gostariam de fazer, constatou que 800 optaram pelo curso de Administração; 600 optaram pelo curso de Sistemas de Computação; 500 optaram pelo curso de Pedagogia; 300 afirmaram que fariam Administração e Sistemas de Computação; 250 fariam Administração e Pedagogia; 150 fariam Sistemas de Computação e Pedagogia e 100 dos jovens entrevistados afirmaram que fariam os três cursos. Considerando os resultados dessa pesquisa, o número de jovens que não fariam nenhum dos cursos elencados é:

a) 150 b) 250 c) 350 d) 400 e) 500

Conjuntos numéricos

Números naturais

Os números naturais são utilizados para contar e registrar quantidades.

Representamos o **conjunto dos números naturais** da seguinte maneira:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Denotamos por $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais não nulos.
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

Nesse conjunto:

- o **sucessor** de um número n é o número $n + 1$, que também é um número natural.
- quando m é sucessor de um número n, dizemos que n é o **antecessor** de m. Nesse caso, $m = n + 1$ ou, de modo equivalente, $n = m - 1$.

  O número 0 (zero) é o único número natural que não possui antecessor em $\mathbb{N}$, ou seja, 0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro número natural.

Para cada par de números naturais n e m, a soma $n + m$ e o produto $n \cdot m$ também são números naturais. Porém, a subtração e a divisão de números naturais nem sempre resultam em números naturais. Por exemplo, não é possível calcular $2 - 4$ ou $5 : 2$ em $\mathbb{N}$.

O conjunto $\mathbb{N}$ é infinito e não há um número natural maior do que todos os outros, pois qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, o seu sucessor $n + 1$ é um número natural maior do que n.

Exemplos

- $15 + 1 = 16$ e $15 - 1 = 14$, logo o sucessor de 15 é 16, e o antecessor de 15 é 14.
- $0 + 1 = 1$, logo o sucessor de 0 é 1. Porém sabemos que 0 não possui antecessor em $\mathbb{N}$. Observe que $0 - 1$ não resulta em um número natural.

Converse com os colegas sobre duas situações do dia a dia em que são utilizados os números naturais.

Vista geral do estádio Camp Nou, em Barcelona, Espanha, durante a partida de futebol entre Barcelona e Málaga pela Liga Espanhola, em 21 de fevereiro de 2015.

A quantidade de pessoas em um estádio de futebol é representada por um número natural. Esse número interessa, por exemplo, aos organizadores do evento.

Christian Bertrand/Shutterstock.com/ID/BR

Números inteiros

Qual o resultado da operação de subtrair 5 unidades de 4 unidades? Em termos simbólicos, é necessário calcular $4-5$, cujo resultado devemos investigar. Observe.

$$4-0=4 \qquad 4-1=3 \qquad 4-2=2 \qquad 4-3=1 \qquad 4-4=0 \qquad 4-5=?$$

Nessa sequência de subtrações, os resultados formam uma sequência decrescente de números. Cada um deles, a partir do segundo, é o antecessor do número anterior. Assim, espera-se que o resultado de $4-5$ seja o antecessor de 0 que, como vimos anteriormente, não existe no conjunto dos números naturais. Esse é o número negativo -1, que corresponde ao **oposto** do número 1.

O conjunto formado pelos números naturais e pelo oposto de cada número natural não nulo forma o **conjunto dos números inteiros**. Os números naturais não nulos $(1, 2, 3, 4, \dots)$ são os números inteiros **positivos**, e os seus opostos $(-1, -2, -3, -4, \dots)$ são os números inteiros **negativos**.

Dizemos que os números inteiros m e n são **opostos** quando sua soma é igual a zero, ou seja, $m+n=0$. Por exemplo:

- 1 é oposto de -1, pois $1+(-1)=0$
- -5 é oposto de 5, pois $(-5)+5=0$

Em geral, o oposto de um número inteiro n é o número $-n$.

Veja a seguir dois exemplos em que os números inteiros são utilizados.


EXTRATO BANCÁRIO
CLIENTE: PAULO SILVA

31/07/2017 09:30:47

DATA	HISTÓRICO	SALDO (R$)
	SALDO ANTERIOR	+ 200,00
	JULHO	
09/07	PAGAMENTO DE FATURA	− 340,00
10/07	SAQUE	− 50,00
12/07	DEPÓSITO	+ 70,00

RESUMO
SALDO ATUAL (R$) −120,00

Eduardo dos Santos/ASC Imagens

O saldo da conta-corrente de um cliente é representado por um valor negativo quando os gastos superam os valores creditados.

Sergio Lima/ASC Imagens

Para representar temperaturas na escala Celsius, é necessário utilizar também valores negativos, pois o zero, nessa escala, não corresponde à menor temperatura possível.

> Representamos o conjunto dos números inteiros da seguinte maneira:
>
> $$\mathbb{Z}=\{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Nesse conjunto:

- o sucessor de um número n é o número $n+1$, que também é um número inteiro.
- o antecessor de um número n é o número $n-1$, que também é um número inteiro.

Para cada par de números inteiros n e m, a soma $n+m$, a diferença $n-m$ e o produto $n \cdot m$ são também números inteiros. Porém, a divisão de números inteiros nem sempre resulta em um número inteiro. Por exemplo, não é possível calcular $1:2$ em $\mathbb{Z}$.

Observe alguns subconjuntos de $\mathbb{Z}$ que se destacam.

- Conjunto dos números inteiros não nulos: $\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \neq 0\}$
- Conjunto dos números inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant 0\}$
- Conjunto dos números inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant 0\}$
- Conjunto dos números inteiros positivos: $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$
- Conjunto dos números inteiros negativos: $\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 0\}$
- Conjunto dos números inteiros pares: $\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- Conjunto dos números inteiros ímpares: $\{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\} = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

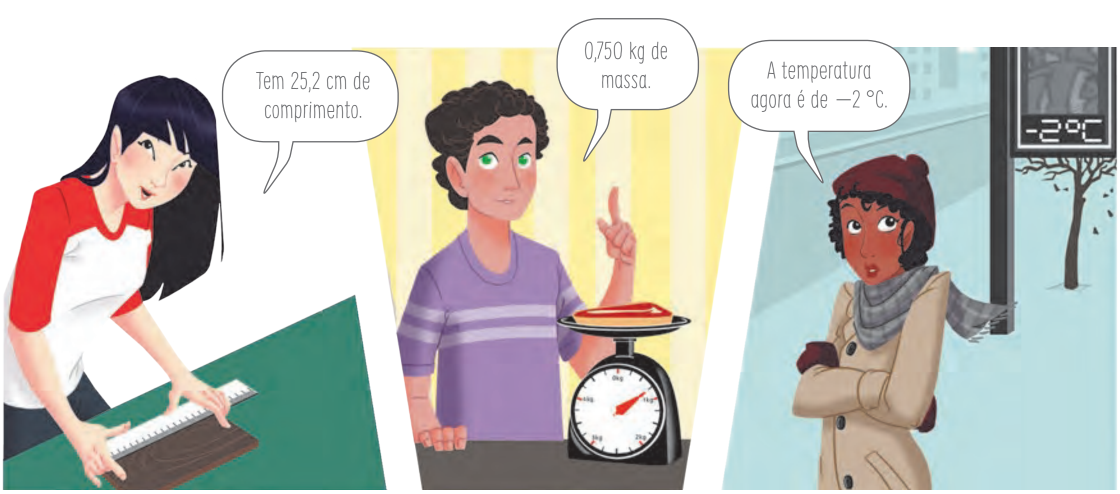
Observe que um número é par quando é da forma $2n$, com $n \in \mathbb{Z}$, e ímpar quando é da forma $2n + 1$, com $n \in \mathbb{Z}$. Podemos demonstrar que os números da forma $2n + 2$, com $n \in \mathbb{Z}$, são pares e os números da forma $2n + 5$, com $n \in \mathbb{Z}$, são ímpares, da seguinte maneira:

- Se $n \in \mathbb{Z}$, então $2n + 2 = 2(n + 1)$.
  Como $(n + 1) \in \mathbb{Z}$, $2n + 2$ é par.
- Se $n \in \mathbb{Z}$, então $2n + 5 = 2n + 4 + 1 = 2(n + 2) + 1$.
  Como $(n + 2) \in \mathbb{Z}$, $2n + 5$ é ímpar.

Números racionais

Ao realizarmos uma medição, como determinar a altura de uma pessoa, a massa de uma fruta, a largura de uma rua, a temperatura de uma substância, nem sempre obtemos valores inteiros. Isso significa que, fixada uma unidade de medida, não podemos esperar que todas as medições correspondam a quantidades inteiras da unidade.

A medição de uma grandeza, utilizando-se um instrumento de medida qualquer, é chamada medição empírica. Nesse caso, há sempre um limite de precisão que varia de acordo com diversos fatores, como a escolha do instrumento de medida e o rigor de quem está medindo. Em geral, o resultado das medições empíricas é aproximado, cujos valores obtidos são expressos por números chamados **números racionais**.



Ilustrações: Ilustranet/ASC Imagens

O conjunto dos números racionais inclui, além dos números inteiros, os chamados números fracionários. Eles correspondem a divisões, cujo resultado é um número decimal com uma quantidade finita de casas decimais, ou a uma dízima periódica. Os elementos do conjunto dos números racionais podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, em que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

Representamos o conjunto dos números racionais da seguinte maneira:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Ao realizar uma divisão entre números inteiros, com o divisor diferente de zero, há três possibilidades.

1ª possibilidade › a divisão resulta em um número inteiro.

Exemplos

- $\frac{12}{2} = 6$
- $\frac{5}{1} = 5$
- $-\frac{15}{5} = -3$

2ª possibilidade › a divisão resulta em um número com uma quantidade finita de casas decimais.

Exemplos

- $-\frac{5}{4} = -1{,}25$
- $\frac{22}{5} = 4{,}4$
- $\frac{131}{8} = 16{,}375$

3ª possibilidade › a divisão resulta em uma dízima periódica.

Exemplos

- $$\begin{array}{l|l} 10 & 3 \\ \cline{2-2} \ \ 10 & 3{,}\,3\,3\,3\ldots \\ \quad\ 10 & \\ \qquad\ 10 & \\ \qquad\quad 1 & \end{array}$$

$$\frac{10}{3} = 3{,}333\ldots = 3{,}\overline{3}$$

o período é 3

- $$\begin{array}{l|l} 13 & 11 \\ \cline{2-2} \ \ 20 & 1{,}\,1\,8\,1\,8\ldots \\ \quad\ 90 & \\ \qquad\ 20 & \\ \qquad\quad 90 & \\ \qquad\qquad 2 & \end{array}$$

$$\frac{13}{11} = 1{,}1818\ldots = 1{,}\overline{18}$$

o período é 18

É possível demonstrar que essas são as únicas possibilidades para o resultado de uma divisão $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, porém não o faremos nesse momento. Em outras palavras, um número racional só pode ser: um número inteiro; um número com uma quantidade finita de casas decimais; ou uma dízima periódica.

Por outro lado, todo número inteiro, todo número com uma quantidade finita de casas decimais e toda dízima periódica possui a representação $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, é um número racional. Diz-se que a fração $\frac{a}{b}$, nesse caso, é uma **fração geratriz** do número racional.

Para cada par de números racionais p e q, a soma $p+q$, a diferença $p-q$, o produto $p \cdot q$ e o quociente $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$, são também números racionais.

Observe alguns subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que se destacam.

- Conjunto dos números racionais não nulos: $\mathbb{Q}^* = \{p \in \mathbb{Q} \mid p \neq 0\}$
- Conjunto dos números racionais não negativos: $\mathbb{Q}_+ = \{p \in \mathbb{Q} \mid p \geqslant 0\}$
- Conjunto dos números racionais não positivos: $\mathbb{Q}_- = \{p \in \mathbb{Q} \mid p \leqslant 0\}$
- Conjunto dos números racionais positivos: $\mathbb{Q}_+^* = \{p \in \mathbb{Q} \mid p > 0\}$
- Conjunto dos números racionais negativos: $\mathbb{Q}_-^* = \{p \in \mathbb{Q} \mid p < 0\}$

Números reais

Os números que podem ser representados por uma fração foram, por muito tempo, suficientes para as necessidades do ser humano, pois todas as medições realizadas de maneira experimental podem ser representadas de modo aproximado, por meio de um número racional. Porém, a necessidade de se considerar outros tipos de número surgiu na época do matemático e filósofo grego Pitágoras (c. 585 a.C.-500 a.C.).

Acredita-se que os seguidores da famosa escola pitagórica fundada por Pitágoras descobriu que a medida da diagonal de um quadrado não pode ser expressa por um número racional, fato que não foi bem aceito pelos próprios pitagóricos, sendo, inicialmente, mantido em segredo.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

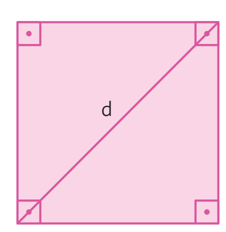
Coleção particular. Fotografia: Universal Images Group/Universal History Archive/Diomedia

Pitágoras, filósofo e matemático grego. Autor desconhecido. Técnica: gravura.

Esse problema está relacionado com o conceito de **comensurabilidade** entre dois segmentos de reta. A afirmação anterior também pode ser expressa dizendo que o lado e a diagonal do mesmo quadrado são **incomensuráveis**.

De modo geral, dizemos que dois segmentos de reta são incomensuráveis quando a razão entre suas medidas não pode ser expressa por um número racional, qualquer que seja a unidade de medida escolhida.

Considere o quadrado representado ao lado, cujo lado mede uma unidade de comprimento.



Sergio Lima/ID/BR

Pelo teorema de Pitágoras, temos que $d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2$.

Logo a medida d corresponde ao número positivo que elevado ao quadrado resulta em 2, ou seja, $d = \sqrt{2}$.

Observe como podemos obter um valor aproximado para d.

- $\underbrace{1^2}_{1} \leqslant \underbrace{d^2}_{2} \leqslant \underbrace{2^2}_{4}$, logo, $1 \leqslant d \leqslant 2$.
- $\underbrace{1{,}4^2}_{1{,}96} \leqslant \underbrace{d^2}_{2} \leqslant \underbrace{1{,}5^2}_{2{,}25}$, logo, $1{,}4 \leqslant d \leqslant 1{,}5$.
- $\underbrace{1{,}41^2}_{1{,}9881} \leqslant \underbrace{d^2}_{2} \leqslant \underbrace{1{,}42^2}_{2{,}0164}$, logo, $1{,}41 \leqslant d \leqslant 1{,}42$.
- $\underbrace{1{,}414^2}_{1{,}999396} \leqslant \underbrace{d^2}_{2} \leqslant \underbrace{1{,}415^2}_{2{,}002225}$, logo, $1{,}414 \leqslant d \leqslant 1{,}415$.

Continuando esse procedimento, obtemos um limitante inferior e um limitante superior para o possível valor de d, de modo que a diferença entre eles torne-se cada vez menor. Esses limitantes são números racionais, pois referem-se a números decimais representados com uma quantidade finita de casas decimais.

No entanto, pode-se demonstrar que $\sqrt{2}$ não é racional. Esse procedimento continua indefinidamente, pois d não será igual a um dos limitantes, inferior ou superior, em nenhuma etapa. O número d possui uma representação decimal infinita. É importante observar que essa representação não pode ser periódica, pois, caso contrário, o número corresponderia a um número racional.

Observe as 25 primeiras casas decimais nesta representação:

$$1{,}4142135623730950488016887$$

A representação acima é chamada **expressão decimal**.

Em geral, uma expressão decimal é um símbolo $a{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$, em que a é um número inteiro e $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ formam uma sequência infinita de dígitos, ou seja, cada a_i é um número inteiro com $0 \leqslant a_i \leqslant 9$.

Se convencionarmos que a cada expressão decimal corresponde um número, então o conjunto de todos eles é chamado **conjunto dos números reais**, denotado por $\mathbb{R}$. Nesse conjunto, os números racionais correspondem àqueles em que, na expressão decimal $a{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$, a partir de certo ponto:

a todos os dígitos a_i são iguais a zero. Por exemplo:

- 12,250000...
- 8,31250000...
- 250,0000...

b a sequência de números a_i torna-se periódica. Por exemplo:

- 0,94444...
- 3,454545...
- 0,3333...

As expressões decimais do item **a** correspondem aos números inteiros e aos decimais exatos. Nas expressões do item **b**, incluem-se as dízimas periódicas. Todas as expressões decimais que não satisfazem as condições dos itens **a** e **b** correspondem a **números irracionais**, ou seja, números que não são racionais.

O conjunto de todos os números irracionais é o complementar de $\mathbb{Q}$, considerando-se $\mathbb{R}$ como conjunto universo. Assim, denotaremos esse conjunto por $\mathbb{Q}^c$.

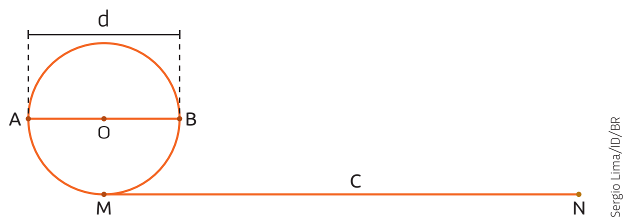
Exemplos

a O número $\sqrt{2}$ é irracional, ou seja, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c$. De modo geral, pode-se demonstrar que, para qualquer $p \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, o número $\sqrt[n]{p}$ só pode ser natural ou irracional, ou seja, toda raiz n-ésima não exata de um número natural é irracional. Assim, também são irracionais:

- $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$
- $\sqrt[3]{10} \simeq 2{,}15$
- $\sqrt[4]{2} \simeq 1{,}19$
- $\sqrt[3]{12} \simeq 2{,}29$

b Na expressão decimal 0,101001000100001..., o primeiro dígito 1 é seguido de um dígito 0, o segundo dígito 1 é seguido de dois dígitos 0, e assim por diante, com o n-ésimo dígito 1 seguido de n dígitos 0. Essa expressão decimal corresponde a um número irracional.

C Pode-se demonstrar que o número π, definido como a razão do comprimento C pelo diâmetro d de uma circunferência, é um número irracional. Se $\overline{AB}$ é um diâmetro da circunferência e o comprimento de $\overline{MN}$ é igual ao comprimento dessa mesma circunferência, então $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ são segmentos incomensuráveis.



Temos, com aproximação de 25 casas decimais:

$$\boxed{\pi = \frac{C}{d} \simeq 3{,}1415926535897932384626433}$$

Curiosidade: mundo comemora dia da letra grega PI no sábado, 14

O dia do PI (π) é comemorado todo ano no dia 14 de março. O dia foi fundado por Larry Shaw, responsável pelo museu Exploratorium.edu. A data foi escolhida por ser semelhante à aproximação numérica mais conhecida do PI (3,14) quando consideramos a forma de exibição do calendário norte-americano (3/14).

Em 2015, além da coincidência com os números do dia e do mês, o ano também permitirá novas comparações. Ao chegar o momento, calendários em formato norte-americano exibirão 3/14/15, o equivalente às quatro primeiras casas decimais do π (3,1415).

[...]

Curiosidade: mundo comemora dia da letra grega PI no sábado, 14. *Empresa Brasil de Comunicação*, 13 mar. 2015. Disponível em: <www.ebc.com.br/tecnologia/2015/03/curiosidade-mundo-comemora-dia-da-letra-grega-pi-no-sabado-14>. Acesso em: 21 out. 2015.

Os conjuntos dos números naturais, dos inteiros e dos racionais são subconjuntos de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

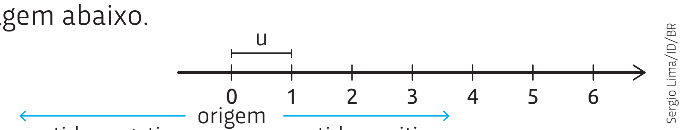
Outros subconjuntos que se destacam são:

- Conjunto dos números reais não nulos: $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
- Conjunto dos números reais não negativos: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
- Conjunto dos números reais não positivos: $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$
- Conjunto dos números reais positivos: $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- Conjunto dos números reais negativos: $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

A reta real

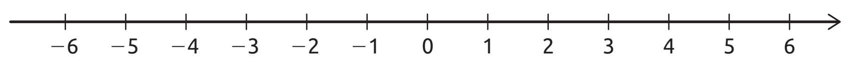
Considere uma reta na qual seja definida uma origem O e uma unidade de comprimento u de medida 1, a qual denominamos **reta real**. A partir da origem, cuja localização ou abscissa é 0 (zero), tomamos os sentidos positivo (à direita da origem) e negativo (à esquerda da origem).

Nessa reta, podemos localizar qualquer número natural. Veja por exemplo, os números localizados na imagem abaixo.



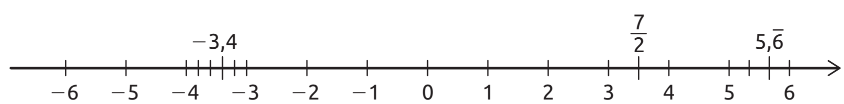
Todo número natural tem um ponto correspondente na reta real, mas nem todo ponto da reta corresponde a um número natural. Dizemos então que o conjunto $\mathbb{N}$ não "completa" toda a reta real.

Nessa reta, podemos localizar também qualquer número inteiro. Veja alguns exemplos.



Todo número inteiro tem um ponto correspondente na reta real, mas nem todo ponto da reta corresponde a um número inteiro.

Nessa reta, podemos localizar também qualquer número racional. Veja alguns exemplos.



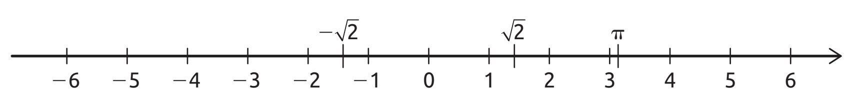
Para localizar o número racional:

- $-3{,}4 = -3\frac{2}{5}$, dividimos o segmento entre -3 e -4 em cinco partes iguais e consideramos duas partes no sentido negativo contados a partir do -3;
- $\frac{7}{2} = 3{,}5$, consideramos o ponto médio do segmento entre 3 e 4;
- $5{,}\overline{6} = 5{,}666... = 5\frac{2}{3}$, dividimos o segmento entre 5 e 6 em três partes iguais e consideramos duas partes no sentido positivo contados a partir do 5.

Observe que $\frac{p+q}{2}$, com $p, q \in \mathbb{Q}$ e $p \neq q$, é um número racional localizado entre p e q. Logo há sempre um número racional entre p e q. Isso mostra que existe uma infinidade de números racionais entre dois números também racionais quaisquer, bastando para isso repetir indefinidamente o mesmo processo.

Todo número racional tem um ponto correspondente na reta real, mas nem todo ponto da reta corresponde a um número racional. Por exemplo, o ponto cuja distância até a origem seja igual a $\sqrt{2}$.

Nessa reta, podemos representar também qualquer número real. Veja alguns exemplos.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Todo número real tem um ponto correspondente na reta real e, reciprocamente, todo ponto da reta corresponde a um número real, ou seja, existe uma correspondência **biunívoca** entre os números reais e os pontos da reta. O conjunto $\mathbb{R}$ "completa" todos os pontos da reta.

Todo número irracional também possui um ponto correspondente na reta real, mas não é possível indicar o seu local exato nela. Desse modo, não é possível apresentar de maneira exata a sua expressão decimal.

R5. Em cada item, determine a fração geratriz dos seguintes números racionais.

a) 4,475 b) $0,\overline{10}$ c) $2,0\overline{83}$

Resolução

a) Considerando $x = 4{,}475$, multiplicamos ambos os membros dessa igualdade por 1 000.

$$1\,000x = 4\,475 \Rightarrow x = \frac{4\,475}{1\,000} = \frac{179}{40}$$

Portanto, a fração geratriz de 4,475 é $\frac{179}{40}$.

b) Considerando $x = 0{,}\overline{10}$, multiplicamos ambos os membros dessa igualdade por 100.

$$100x = 10{,}\overline{10}$$

Para eliminar a parte periódica, subtraímos x de ambos os membros.

$$100x - x = 10{,}\overline{10} - x$$

Substituindo x por $0{,}\overline{10}$ no segundo membro:

$$100x - x = 10{,}\overline{10} - 0{,}\overline{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 99x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{99}$$

Portanto, a fração geratriz de $0{,}\overline{10}$ é $\frac{10}{99}$.

c) Considerando $x = 2{,}0\overline{83}$, multiplicamos ambos os membros dessa igualdade por 1 000.

$$1\,000x = 2\,083{,}\overline{83}$$

Para eliminar a parte periódica, subtraímos $10x$ de ambos os membros.

$$1\,000x - 10x = 2\,083{,}\overline{83} - 10x$$

Substituindo x por $2{,}0\overline{83}$ no segundo membro:

$$1\,000x - 10x = 2\,083{,}\overline{83} - 10 \cdot 2{,}0\overline{83}$$

$$1\,000x - 10x = 2\,083{,}\overline{83} - 20{,}\overline{83}$$

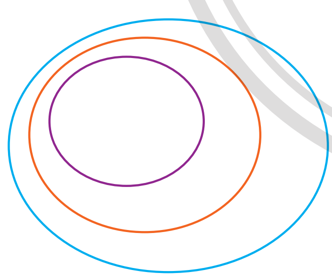
$$990x = 2\,063$$

$$x = \frac{2\,063}{990}$$

Portanto, a fração geratriz de $2{,}0\overline{83}$ é $\frac{2\,063}{990}$.

Atividades

25. Observe o diagrama a seguir.



a) Copie e complete o diagrama acima em seu caderno, inserindo nele as letras dos conjuntos A, B e C, tal que $A \subset \mathbb{N}$, $B \subset \mathbb{Z}$ e $C \subset \mathbb{Q}$.

b) Agora, distribua adequadamente os números a seguir no diagrama que você copiou.

$\frac{3}{2}$ 24 $\sqrt{144}$ -3 $\frac{100}{3}$ 2,4 -30

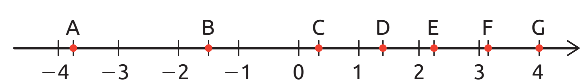
26. Escreva um número inteiro e um número racional na forma fracionária entre:

a) $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ b) $-\sqrt{27}$ e $-\sqrt{17}$

27. Associe cada número das fichas a um ponto que foi nomeado na reta real.

$-1{,}5$ π $0{,}\bar{3}$ $-\frac{15}{4}$

4 $\sqrt{5}$ $\sqrt{2}$



28. Escreva no caderno e relacione os conjuntos em cada item usando os símbolos $\subset$ ou $\not\subset$.

a) $\mathbb{Q}^c$ e $\mathbb{R}$ c) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}_-$ e) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$ e $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ d) $\mathbb{Z}^*$ e $\mathbb{Q}^*$

29. Considere o conjunto

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7}\right\}.$$

Quantos elementos de A são:

a) naturais? c) racionais?

b) inteiros? d) irracionais?

30. Determine quais números do quadro a seguir pertencem aos conjuntos indicados em cada item.

$\sqrt{2}$ $\quad -4 \quad$ $\frac{1}{3}$ $\quad 5 \quad$ $24,\overline{75}$ $\quad 1004$

$-15,5$ $\quad \pi \quad$ $(-2)^7$ $\quad$ $\frac{88}{11}$

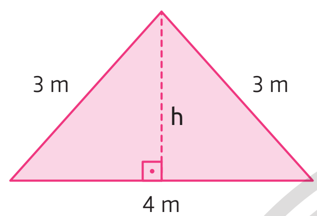
a) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$

b) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$

c) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$

d) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}^c$

31. Em grupo Observem o triângulo isósceles a seguir.



Sergio Lima/ID/BR

a) Utilizando o teorema de Pitágoras, calculem a medida da altura *h* desse triângulo.

b) Indiquem pelo menos um conjunto numérico ao qual o número obtido no item **a** pertença.

c) Podemos obter um triângulo isósceles cuja medida da altura seja um número natural? Se sim, citem um exemplo indicando as medidas de seus lados.

32. Determine no caderno a fração geratriz dos números a seguir.

a) 62,4   b) $0,\overline{45}$ c) $9,5\overline{90}$

33. Represente no caderno cada fração na forma decimal.

a) $\frac{28}{33}$ b) $\frac{1019}{75}$ c) $\frac{100}{6}$

34. Desafio (Fuvest) O número real x, que satisfaz $3 < x < 4$, tem uma expansão decimal na qual os 999 999 primeiros dígitos à direita da vírgula são iguais a 3. Os 1 000 001 dígitos seguintes são iguais a 2 e os restantes são iguais a zero. Considere as seguintes afirmações:

I) x é irracional.

II) $x \geqslant \frac{10}{3}$.

III) $x \cdot 10^{2\,000\,000}$ é um inteiro par.

Então,

a) nenhuma das três afirmações é verdadeira.

b) apenas as afirmações **I** e **II** são verdadeiras.

c) apenas a afirmação **I** é verdadeira.

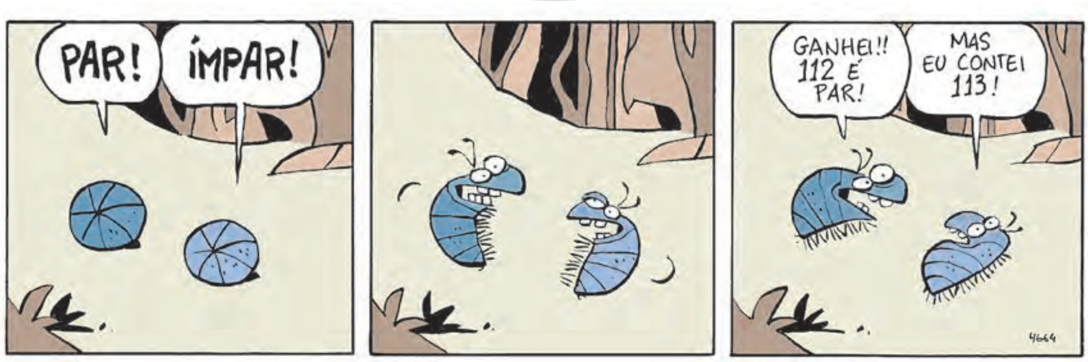
d) apenas a afirmação **II** é verdadeira.

e) apenas a afirmação **III** é verdadeira.

35. Seja $A \subset \mathbb{N}$ um conjunto formado por números pares ou múltiplos de 5. Determine a quantidade de elementos de A, sabendo que nesse conjunto há exatamente:

- dez números pares;
- três múltiplos de 5;
- dois múltiplos de 10.

36. Em grupo Leiam a tira.



Fernando Gonsales/Acervo do artista

GONSALES, Fernando. *Níquel Náusea*: um tigre, dois tigres, três tigres. São Paulo: Devir, 2009. p. 5.

a) A quais conjuntos numéricos pertencem os números citados na história?

b) Sendo P e I o conjunto dos números pares e ímpares, respectivamente, ambos não negativos, qual conjunto numérico é formado por $P \cup I$?

c) É possível determinar a quantidade de elementos dos conjuntos P e I? Justifiquem.

Intervalos

Os **intervalos** são subconjuntos de $\mathbb{R}$ que aparecem em certos contextos, como no estudo de equações, inequações e funções. Para isso, são utilizadas algumas notações específicas para denotar tais conjuntos. Se a e b são números reais, com $a < b$, os seguintes conjuntos são intervalos limitados, com extremos a e b.

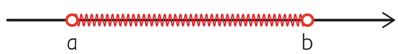
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

intervalo fechado

- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

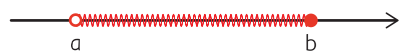
intervalo fechado à esquerda

- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



intervalo aberto

- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$



intervalo fechado à direita

Observe que os extremos de um intervalo podem ou não pertencer ao conjunto. Na representação do intervalo na reta real, os extremos indicados com uma "bolinha" preenchida pertencem ao conjunto, ao passo que os indicados com uma "bolinha" sem preenchimento não pertencem ao conjunto.

Os conjuntos a seguir são também intervalos, porém ilimitados.

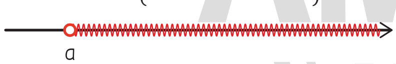
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

intervalo fechado, ilimitado à direita

- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

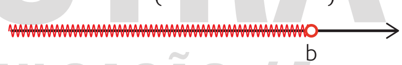
intervalo fechado, ilimitado à esquerda

- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$



intervalo aberto, ilimitado à direita

- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$



intervalo aberto, ilimitado à esquerda

- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$


intervalo ilimitado à esquerda e à direita

Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Qual é o significado dos símbolos $-\infty$ (menos infinito) e $+\infty$ (mais infinito) na notação de intervalos?

Algumas equações e inequações

As equações e as inequações podem ser utilizadas como abstrações de situações práticas, de modo que a solução de um problema seja obtida por meio de operações sistemáticas realizadas baseando-se em sentenças matemáticas. Resolver uma equação (ou uma inequação) em U significa obter o conjunto solução da equação (ou inequação) considerando-se U como conjunto universo.

A seguir, vamos lembrar alguns tipos de equações e inequações e ver como expressar suas soluções utilizando a linguagem de conjuntos.

Equações e inequações do 1º grau

Na compra de um fogão, Márcio pagou R$ 45,00 de entrada e mais algumas parcelas de R$ 75,00. Se até agora ele pagou R$ 495,00, quantas parcelas já foram pagas?

Denotando por x a quantidade de parcelas pagas, temos $45 + 75x = 495$.

Esse é um exemplo de equação do 1º grau. Veja a seguir uma definição.

Uma equação do 1º grau de incógnita x é toda equação que pode ser escrita na forma $ax + b = 0$, sendo a e b coeficientes reais constantes.

Para a equação que obtivemos, temos as seguintes equivalências:

$$45 + 75x = 495 \Leftrightarrow 45 + 75x - 495 = 0 \Leftrightarrow 75x - 450 = 0$$

A equação anterior é do 1º grau, pois é equivalente a uma equação da forma $ax + b = 0$, em que $a = 75$ e $b = -450$.

Agora, suponha que Márcio tomou um táxi que lhe cobrou R$ 5,00 de bandeirada, mais R$ 2,10 por quilômetro rodado. Sabendo que ele possui R$ 16,55 em dinheiro, quais distâncias ele poderá percorrer com o táxi de modo que essa quantia seja suficiente para pagar a corrida?

Bandeirada: quantia fixa que o taxímetro inclui no preço final a ser pago pelo passageiro, nas corridas de táxi.

Esse problema pode ser representado por uma **inequação**. Para isso, denotamos por x a distância percorrida pelo táxi:

$$5 + 2{,}1x \leqslant 16{,}55, \text{ em que } x \geqslant 0.$$

Esse é um exemplo de **inequação do 1º grau**.

Qual o significado da solução da inequação no problema proposto?

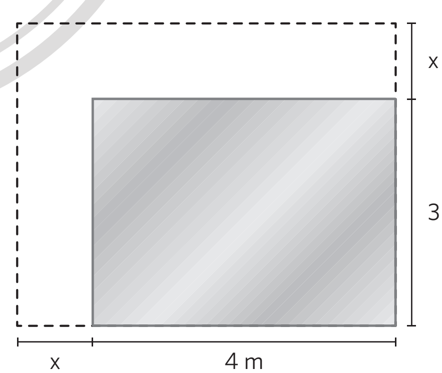
Em geral, temos a seguinte definição.

Uma inequação do 1º grau de incógnita x é toda inequação que pode ser escrita nas formas a seguir, sendo a e b coeficientes reais constantes, com $a \neq 0$.

- $ax + b < 0$
- $ax + b \leqslant 0$
- $ax + b > 0$
- $ax + b \geqslant 0$

Equações do 2º grau

Uma indústria fabrica chapas metálicas de formato retangular com 4 m de comprimento e 3 m de largura. Deseja-se fabricar uma chapa maior, também retangular, aumentando o comprimento e a largura em uma mesma medida x.



Sergio Lima/ID/BR

Qual o valor de x para que a chapa maior cubra uma área de 20 m^2?

Observe que a área coberta pela chapa maior é dada por $(x + 4) \cdot (x + 3)$, em metros quadrados. Assim, temos:

$$(x + 4) \cdot (x + 3) = 20 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 4x + 12 = 20 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 8 = 0$$

Esse é um exemplo de **equação do 2º grau**. Em geral, temos a seguinte definição.

Uma equação do 2º grau de incógnita x é toda equação que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, sendo a, b e c coeficientes reais constantes, com $a \neq 0$.

Essa equação pode ser resolvida com a fórmula resolutiva $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Assim, os valores de x que satisfazem a equação $x^2 + 7x - 8 = 0$ são dados a seguir.

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-7 \pm 9}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -8 \end{array} \right.$$

Como as dimensões da chapa não podem ser negativas, a solução do problema é $x = 1$, ou seja, o comprimento e a largura da chapa devem ser aumentados em 1 m.

Conjunto solução de equações e inequações

Leia os problemas a seguir.

1. Qual é o comprimento de um terreno retangular de 6 m de largura e 123 m² de área?
2. Quantas pessoas devem contribuir com R$ 6,00 para se obter exatamente R$ 123,00?

A solução de cada problema, se existir, é dada pelo valor de x tal que $6x = 123$. Ao resolver essa equação, temos:

$$6x = 123 \Rightarrow x = \frac{123}{6} \Rightarrow x = 20{,}5$$

Logo x deve ser igual a 20,5.

Retornando aos problemas, podemos concluir que o comprimento do terreno é de 20,5 m. Porém não é coerente dizer que 20,5 pessoas devem contribuir com a quantia de R$ 6,00. De modo geral e implicitamente, consideramos um conjunto universo aquele ao qual as raízes da equação considerada devem pertencer. No problema **1**, podemos considerar $\mathbb{R}_+^*$ como conjunto universo, enquanto no problema **2** o conjunto universo a considerar pode ser $\mathbb{N}$.

Nesse caso, o conjunto solução da equação $6x = 123$ é dado por:

- $S = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mid 6x = 123\} = \{20{,}5\}$ quando $\mathbb{R}_+^*$ é o conjunto universo.
- $S = \{x \in \mathbb{N} \mid 6x = 123\} = \varnothing$ quando $\mathbb{N}$ é o conjunto universo.

Uma inequação também possui um conjunto solução, formado pelos valores que satisfazem a inequação e que pertencem ao conjunto universo. Observe, por exemplo, como resolver a inequação $2{,}1x - 11{,}55 \leqslant 0$ em $\mathbb{R}_+^*$.

$$2{,}1x - 11{,}55 \leqslant 0 \Rightarrow 2{,}1x \leqslant 11{,}55 \Rightarrow \frac{2{,}1x}{2{,}1} \leqslant \frac{11{,}55}{2{,}1} \Rightarrow x \leqslant 5{,}5$$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mid x \leqslant 5{,}5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 5{,}5\} =]0; 5{,}5]$.

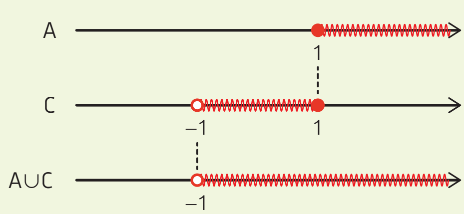
Atividades resolvidas

R6. Considere os intervalos $A = [1, +\infty[$, $B =]-\infty, 0[$ e $C =]-1, 1]$. Determine:

a) $A \cup C$
b) $A \cap B$
c) $A - C$
d) $\complement_{\mathbb{R}}^{C}$

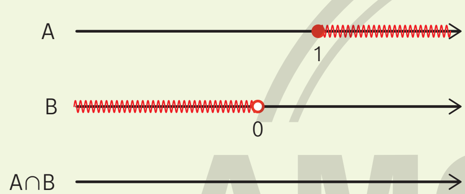
Resolução

a) $A \cup C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ ou } x \in C\}$



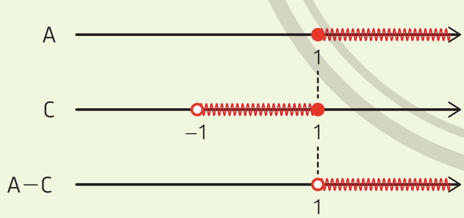
Portanto, $A \cup C =]-1, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$.

b) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$



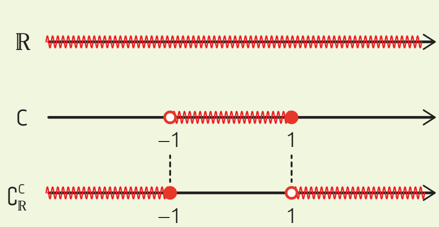
Portanto, $A \cap B = \varnothing = \{\ \}$.

c) $A - C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ e } x \notin C\}$



Portanto, $A - C =]1, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

d) $\complement_{\mathbb{R}}^{C} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x \notin C\}$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Pontanto, $\complement_{\mathbb{R}}^{C} =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[=$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x > 1\}$.

R7. Determine o conjunto solução das inequações no conjunto dos números reais.

a) $3x - 2 \geqslant -5 + x$
b) $\frac{1}{2}x + 4 > x$

Resolução

a) $3x - 2 \geqslant -5 + x \Rightarrow 3x - x \geqslant -5 + 2$

$2x \geqslant -3 \Rightarrow x \geqslant -\frac{3}{2}$

$S = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ ou $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{3}{2}\right\}$

b) $\frac{1}{2}x + 4 > x$

$\frac{1}{2}x - x > -4$

$-\frac{1}{2}x > -4 \cdot (-1)$

$\frac{1}{2}x < 4$

$x < \dfrac{4}{\frac{1}{2}}$

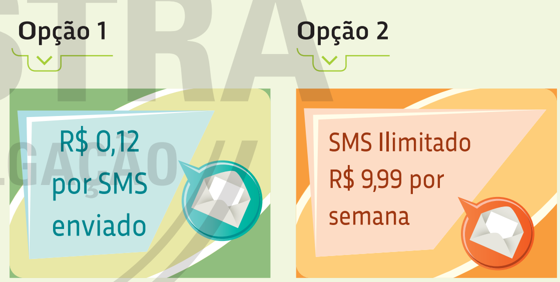
$x < \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{1}$

$x < 8$

$S =]-\infty, 8[$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 8\}$

R8. A operadora de celular Bem-falar oferece duas opções para os clientes que utilizam o serviço de SMS (serviço de mensagens curtas).

O nome da operadora de celular apresentado nesta atividade é fictício.



Ilustrações: Ronaldo Lucena/ ASC Imagens

A partir de quantos SMS enviados semanalmente a opção **2** é mais vantajosa que a opção **1**?

Resolução

Considerando x a quantidade de SMS enviada, sabemos que pela opção **1** o valor a ser pago semanalmente corresponde a $0{,}12 \cdot x$, enquanto pela opção **2** o valor equivale a R$ 9,99.

Verificamos para qual quantidade x a opção **2** é mais vantajosa por meio de uma inequação:

$$0{,}12x > 9{,}99 \Rightarrow x > \frac{9{,}99}{0{,}12} \Rightarrow x > 83{,}25$$

Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 83{,}25\}$.

Como x corresponde a um número inteiro nesse caso, a partir de 84 SMS enviados semanalmente, a opção **2** é mais vantajosa que a opção **1**.

R9. Determine o conjunto solução das equações a seguir no conjunto dos números reais.

a) $-3x^2 + 16x + 35 = 0$

b) $x^2 + 9x + 22 = 0$

c) $2x^2 - 20x + 50 = 0$

Resolução

Para determinar o conjunto solução das equações de 2º grau, utilizaremos a fórmula resolutiva dada por $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, em que $b^2 - 4ac$ é chamado **discriminante** e geralmente é substituído pela letra grega Δ (lê-se: delta). Assim, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

a) $-3x^2 + 16x + 35 = 0$

$a = -3$; $b = 16$; $c = 35$

$\Delta = 16^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 35 = 676$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{676}}{2 \cdot (-3)}$$

$$x = \frac{-16 \pm 26}{-6} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-16 + 26}{-6} = -\dfrac{5}{3} \\ x_2 = \dfrac{-16 - 26}{-6} = 7 \end{cases}$$

Portanto, $S = \left\{-\dfrac{5}{3}, 7\right\}$.

b) $x^2 + 9x + 22 = 0$

$a = 1$; $b = 9$; $c = 22$

$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 22 = -7$

Como $\sqrt{-7}$ não está definida no conjunto dos números reais, pois não existe número real que elevado ao quadrado resulte em -7, segue que $S = \{\ \} = \varnothing$.

c) $2x^2 - 20x + 50 = 0$

$a = 2$; $b = -20$; $c = 50$

$\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 50 = 0$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{20 \pm 0}{4} \begin{cases} x_1 = \dfrac{20 + 0}{4} = 5 \\ x_2 = \dfrac{20 - 0}{4} = 5 \end{cases}$$

Portanto, $S = \{5\}$.

R10. Um grupo de amigos alugou uma chácara por R$ 1000,00 e dividiu o valor igualmente entre eles. Porém, outros 5 amigos resolveram participar da divisão, sendo devolvido a cada um do grupo inicial o valor de R$ 10,00. Quantos amigos participaram da divisão inicialmente?

Resolução

Seja x a quantidade de amigos inicialmente. De acordo com o enunciado, como o valor pago pelo aluguel da chácara por amigo foi $\dfrac{1000}{x}$ e depois outros 5 participaram da divisão do aluguel, cada um dos amigos do início recebeu uma restituição de R$ 10,00. Logo:

$$\frac{1000}{x} - 10 = \frac{1000}{x + 5}, \text{ com } x \neq -5 \text{ e } x \neq 0$$

Observação: A equação apresentada acima é denominada **equação fracionária**, pois possui ao menos uma incógnita no denominador. Como o denominador de uma fração deve ser diferente de zero, é necessário ficar atento às condições de existência na resolução desse tipo de equação.

Resolvendo a equação, temos:

$$\frac{1000}{x} - 10 = \frac{1000}{x + 5}$$

$$\frac{1000 - 10x}{x} = \frac{1000}{x + 5}$$

$$(x + 5) \cdot (1000 - 10x) = 1000 \cdot x$$

$$1000x - 10x^2 + 5000 - 50x = 1000x$$

$$1000x - 10x^2 + 5000 - 50x - 1000x = 0$$

$$-10x^2 - 50x + 5000 = 0$$

Multiplicando ambos os membros da equação por -1, temos:

$$10x^2 + 50x - 5000 = 0$$

$a = 10$; $b = 50$; $c = -5000$

$\Delta = 50^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-5000) = 202500$

$$x = \frac{-50 \pm \sqrt{202500}}{2 \cdot 10}$$

$$x = \frac{-50 \pm 450}{20} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-50 + 450}{20} = 20 \\ x_2 = \dfrac{-50 - 450}{20} = -25 \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \{-25, 20\}$.

Aqui, consideramos apenas $x = 20$, pois x representa a quantidade inicial de amigos. Logo 20 amigos inicialmente participaram da divisão do aluguel da chácara.

Atividades

37. No quadro abaixo, algumas notações de intervalos foram substituídas por letras maiúsculas. Identifique e escreva no caderno a notação de intervalo correspondente a cada letra.

Representação na reta real	Notações de intervalos	
	$\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq -2\}$	A
	B	$]-\infty, 21]$
	C	D
	E	F

Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

38. Represente os intervalos a seguir na reta real.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 8\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 7\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 15\}$

39. Determine quais são os números inteiros que pertencem a cada intervalo real.

a) $]2, 5]$

b) $[6, 10]$

c) $[0, 3[$

d) $]-5, -1[$

40. (Enem/Inep) Os vidros para veículos produzidos por certo fabricante têm transparências entre 70% e 90%, dependendo do lote fabricado. Isso significa que, quando um feixe luminoso incide no vidro, uma parte entre 70% e 90% da luz consegue atravessá-lo. Os veículos equipados com vidros desse fabricante terão instaladas, nos vidros das portas, películas protetoras cuja transparência, dependendo do lote fabricado, estará entre 50% e 70%. Considere que uma porcentagem *P* da intensidade da luz, proveniente de uma fonte externa, atravessa o vidro e a película.

De acordo com as informações, o intervalo das porcentagens que representam a variação total possível de *P* é:

a) $[35, 63]$

b) $[40, 63]$

c) $[50, 70]$

d) $[50, 90]$

e) $[70, 90]$

41. Determine $A \cup B$ e $A \cap B$ para cada um dos intervalos reais a seguir.

a) $A = [-1, 6]$ e $B =]-\infty, 2[$

b) $A = [0, 4]$ e $B = [1, 5[$

c) $A =]\sqrt{2}, 3]$ e $B = [2, \pi]$

d) $A = \left[\dfrac{1}{2}, 4\right]$ e $B = \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$

42. Dados os intervalos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leq 7\}$, determine:

a) $A - C$

b) $A - B$

c) $B - C$

d) $B - A$

43. Identifique em cada equação dada seus coeficientes *a*, *b* e *c* e sua incógnita.

a) $x^2 - 4 = 0$

b) $y^2 + 5y = 0$

c) $2x^2 - 4x - 6 = 0$

d) $z(2z - 1) + 6 = 4(z + 1)$

44. Determine o conjunto solução de cada uma das equações na incógnita *x*.

a) $9 + x = -2x$

b) $5x - 13 = 3(1 - x)$

c) $x + 3 = \dfrac{1}{2} + 4x$

d) $2\sqrt{7} + x = 3x - 10$

e) $\dfrac{8}{x} = \dfrac{6}{x - 2}$, com $x \neq 2$ e $x \neq 0$

45. Resolva as inequações em $\mathbb{R}$ e determine o conjunto solução de cada uma delas.

a) $x + 18 < 2x$

b) $6x + 0{,}5 \leqslant x + 3$

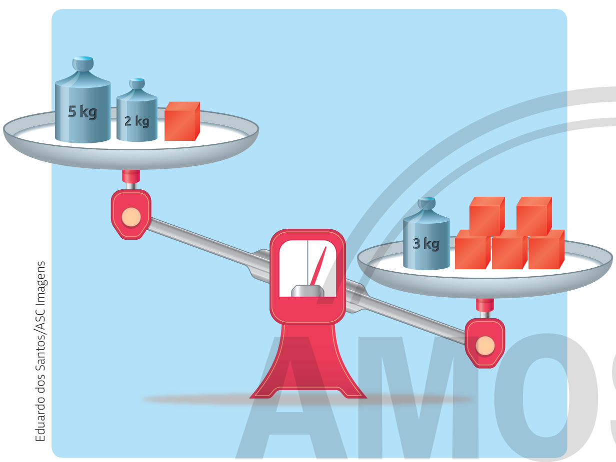
c) $3 + 5(x - 4) \geqslant 5 + 7x$

d) $\frac{5}{3} < 2(2x + 1) - 1$

e) $-2(x + 7) \leqslant 5(5x + 8)$

f) $1 - \frac{x + 10}{4} > \frac{3 + x}{2}$

46. A balança a seguir não está em equilíbrio. Nela, cada cubo vermelho tem a mesma massa.



Eduardo dos Santos/ASC Imagens

a) Escreva no caderno e resolva uma inequação que represente a situação acima, na qual x representa a massa de cada cubo.

b) Qual deve ser a massa de cada cubo para deixar a balança em equilíbrio?

47. (Enem/Inep) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00.

De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

a) R$ 14,00

b) R$ 17,00

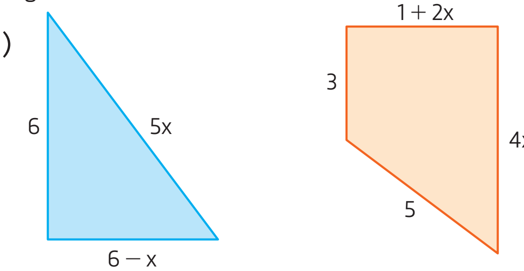
c) R$ 22,00

d) R$ 32,00

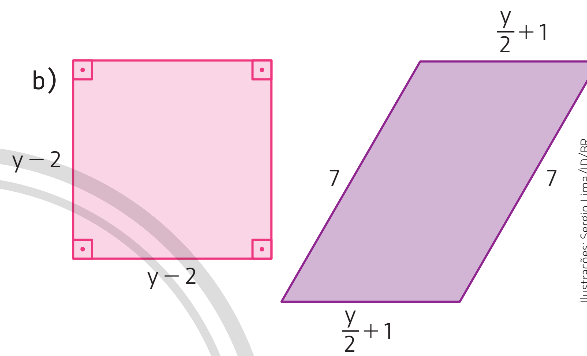
e) R$ 57,00

48. Para cada item, escreva e resolva uma equação para representar a situação em que os perímetros dos dois polígonos apresentados sejam iguais. Em seguida, determine o perímetro, em metros, de cada polígono.

a)



b)



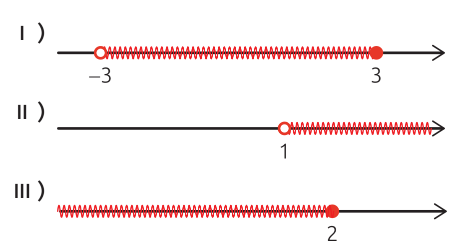
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

49. Para determinar o conjunto solução de um sistema de duas inequações de mesma incógnita, basta determinar $S_1 \cap S_2$, em que S_1 e S_2 são conjunto solução de cada inequação. Sabendo disso, associe cada sistema a um intervalo que represente sua solução. Para isso, escreva a letra e o símbolo romano correspondentes.

a) $\begin{cases} 3x \leqslant x + 4 \\ x - 2 \leqslant 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x + 2}{3} > 1 \\ 8 < 5x + 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 8 > 2x - 1 \\ 0 \geqslant 2(x - 3) \end{cases}$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

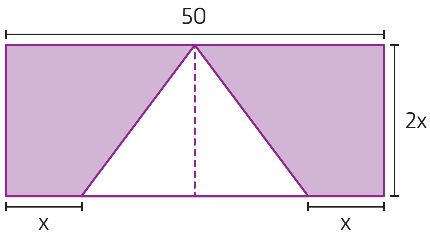
50. Considere a equação $3x^2 - 12x + 3k = 0$, de incógnita x.

a) Para quais valores de k a equação possui duas raízes reais distintas?

b) Para quais valores de k a equação possui duas raízes reais iguais?

c) Para quais valores de k a equação não possui raiz real?

51. De uma folha de papel com formato retangular será recortado um triângulo isósceles conforme a imagem a seguir, cujas medidas são dadas em centímetro.



a) Escreva no caderno uma fórmula para calcular a área do papel que sobrará após o corte.

> Para determinar a área de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas da base (b) e da altura (h), podemos utilizar a fórmula $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$.

b) Sabendo que a área do triângulo é 300 cm², escreva uma equação para calcular o valor de x indicado na figura e resolva-a. Depois, determine a medida da base e da altura desse triângulo.

52. **Em grupo** Julguem verdadeira ou falsa cada afirmação a seguir. Depois, reescrevam as que vocês julgarem falsas, tornando-as verdadeiras e considerando $x \in \mathbb{R}$.

a) O conjunto solução da equação $(x - 5)^2 = 4$ está contido no conjunto dos números naturais.

b) As raízes das equações $x^2 + 2x - 24 = 0$ e $x^2 - 3x - 10 = 0$ delimitam e pertencem aos intervalos A e B, respectivamente, sendo $A \cap B = [-6; 5]$.

c) O conjunto solução da equação $x^2 - x - 90 = 0$ está contido em $\mathbb{Z}$, mas não está contido em $\mathbb{N}$.

53. Sabendo que a equação

$$(m + 2)x^2 + 2(m - 6)x + 4 = 0$$

na incógnita x possui duas raízes reais iguais, calcule o valor de m.

54. Determine o conjunto solução S real das equações.

a) $\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{5x}{4} - 6 = 0$

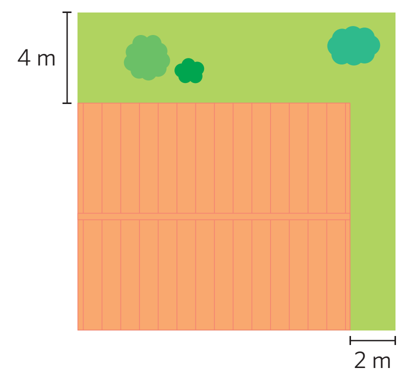
b) $x^2 + 8x - 20 = 0$

c) $x^2 - 2x + 5 = 0$

d) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

- Qual das equações possui o conjunto solução unitário?
- Qual das equações possui o conjunto solução vazio?

55. Em um terreno quadrado foi construída uma casa com 120 m², deixando em um dos lados externos um corredor de 2 m de largura e na frente um quintal de 4 m de largura, conforme a ilustração a seguir.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Qual é a área, em metros quadrados, do terreno?

56. (Fuvest-SP) Um empreiteiro contratou um serviço com um grupo de trabalhadores pelo valor de R$ 10 800,00 a serem igualmente divididos entre eles. Como três desistiram do trabalho, o valor contratado foi dividido igualmente entre os demais. Assim, o empreiteiro pagou, a cada um dos trabalhadores que realizaram o serviço, R$ 600,00 além do combinado no acordo original.

a) Quantos trabalhadores realizaram o serviço?

b) Quanto recebeu cada um deles?

57. (Enem/Inep) Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação $q = 400 - 100p$, na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais.

A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto.

O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

a) R$ 0,50 $\leq p <$ R$ 1,50

b) R$ 1,50 $\leq p <$ R$ 2,50

c) R$ 2,50 $\leq p <$ R$ 3,50

d) R$ 3,50 $\leq p <$ R$ 4,50

e) R$ 4,50 $\leq p <$ R$ 5,50

2 capítulo

Funções

Noções de função

Em anos anteriores você provavelmente aprendeu que grandeza é algo que pode ser medido. Comprimento, área, volume, temperatura, velocidade e massa são exemplos de grandezas.

Em muitos casos, a variação da medida de uma grandeza depende da variação da medida de outra(s). Por exemplo, ao comprar certos alimentos a grandeza “quantia a pagar” depende da grandeza “massa do alimento”, assim como a grandeza “velocidade” depende das grandezas “tempo” e “espaço”.

Coleção particular. Fotografia: Heritage Images/Diomedia

Gravura do alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), matemático, filósofo, diplomata e bibliotecário.

Autor desconhecido, 1836. Coleção particular.

Para estudar algumas dessas relações entre grandezas podemos usar o conceito de **função** que, no decorrer da história desenvolveu-se com a contribuição de vários estudiosos. Entre eles destaca-se Gottfried Wilhelm Leibniz, que em 1694 parece ter introduzido a palavra função na sua forma latina equivalente. A ideia de função pode ser utilizada como exemplo da tendência dos matemáticos de generalizar e ampliar conceitos.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

Veja o exemplo de uma situação que envolve a ideia de função.

Fotomontagem de Rafael Luís Gaion criada com a fotografia Iasha/Shutterstock.com/ID/BR

Com essa informação, podemos construir um quadro relacionando a quantidade de camisetas e o valor a ser pago na compra delas.

Quantidade de camisetas	Valor a ser pago (R$)
1	22
2	44
3	66
4	88
...	...
x	$22 \cdot x$

O preço a ser pago depende da quantidade de camisetas compradas. Nesse caso, dizemos que a grandeza “valor a ser pago” é a **variável dependente**, geralmente indicada por *y*, e a grandeza “quantidade de camisetas” é a **variável independente**, comumente indicada por *x*. Essa relação de dependência caracteriza-se como uma função, pois para cada valor atribuído à variável independente (x) existe um único valor correspondente para a variável dependente (y). Isto é, para cada quantidade de camisetas existe um único preço.

Essas duas grandezas também podem ser relacionadas pela fórmula ou **lei de formação** abaixo.

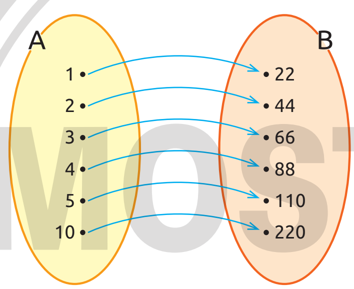
$$\overbrace{y}^{\text{valor a ser pago}} = \underbrace{22}_{\text{valor por camiseta}} \cdot \overbrace{x}^{\text{quantidade de camisetas}}$$

Desse modo, podemos determinar o valor a ser pago na compra de 7 camisetas, por exemplo.

$$y = 22 \cdot x = 22 \cdot 7 = 154$$

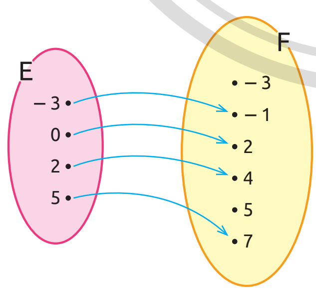
Portanto, o valor a ser pago na compra de sete camisetas é R$ 154,00.

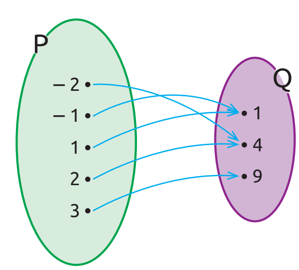
Para representar uma função podemos utilizar a ideia de conjuntos. No caso da situação acima, o conjunto A representa os valores correspondentes à quantidade de camisetas, variável independente (x), e o conjunto B representa os valores a serem pagos, variável dependente (y). Utilizando um diagrama de flechas, temos:



Essa função associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$, por meio da lei de formação $y = 22 \cdot x$.

Observe outros exemplos de funções.



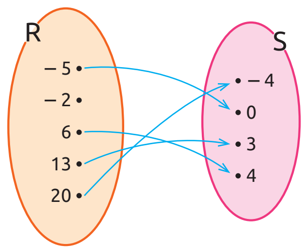


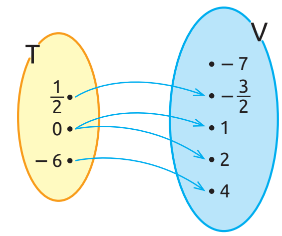
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

- Todos os elementos de E possuem correspondente em F.
- Cada elemento de E está associado a um único elemento de F.
- Nesse caso, temos uma função de E em F, que pode ser expressa pela lei de formação $y = x + 2$, com $x \in E$ e $y \in F$.

- Todos os elementos de P possuem correspondente em Q.
- Cada elemento de P está associado a um único elemento de Q.
- Nesse caso, temos uma função de P em Q, que pode ser expressa pela lei de formação $y = x^2$, com $x \in P$ e $y \in Q$.

Agora veja exemplos de relações entre conjuntos que não correspondem a funções.





Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

- Nem todos os elementos de R possuem correspondente em S. O elemento $-2 \in R$ não tem correspondente em S. Por isso, o diagrama de flechas não representa uma função de R em S.

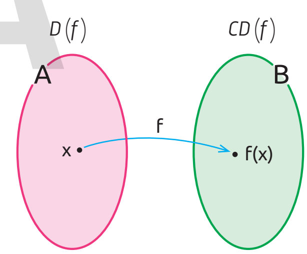
- Nem todos os elementos de T estão associados a um único elemento de V. O elemento $0 \in T$ tem mais de um correspondente em V. Por isso, o diagrama de flechas não representa uma função de T em V.

Dados os conjuntos A e B não vazios, uma função f de A em B $(f\colon A \rightarrow B)$ é uma regra (ou lei) que determina como associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$.

$y = f(x)$, lê-se y é igual a f de x.

Domínio, contradomínio e conjunto imagem

Ao escrevermos uma função $f\colon A \rightarrow B$, denominamos o conjunto A como **domínio** e o conjunto B como **contradomínio** da função f, e os indicamos por $D(f)$ e $CD(f)$, respectivamente. Cada elemento $f(x) \in B$ chama-se a **imagem** de x pela função f, ou o valor assumido pela função f para $x \in A$.

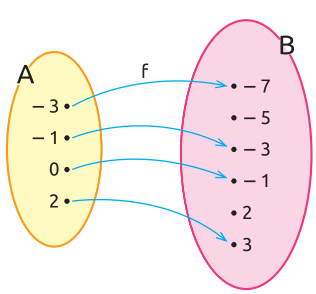


Ao conjunto formado por todos os elementos $f(x) \in B$ que são imagens de algum $x \in A$ pela função f, denominamos **conjunto imagem** de f e indicamos por $Im(f)$. Logo $Im(f) \subset CD(f)$.

Exemplo

Considere a função $f\colon A \rightarrow B$, com $A = \{-3, -1, 0, 2\}$ e $B = \{-7, -5, -3, -1, 2, 3\}$, que associa cada elemento x de A ao seu dobro subtraído de uma unidade em B, pois a função f é definida pela lei de formação $f(x) = 2x - 1$. Vamos determinar a imagem y de cada elemento x de A. Desse modo, a imagem de:

- $x = -3$ é $f(-3) = 2 \cdot (-3) - 1 = -7$
- $x = -1$ é $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$
- $x = 0$ é $f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$
- $x = 2$ é $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Nessa função f temos:

$D(f) = A = \{-3, -1, 0, 2\}$

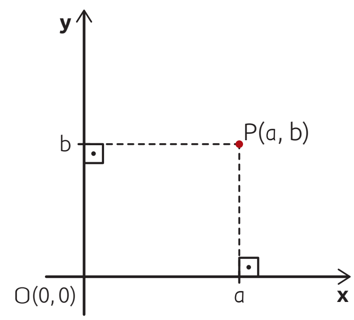
$CD(f) = B = \{-7, -5, -3, -1, 2, 3\}$

$Im(f) = \{-7, -3, -1, 3\}$

Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas

Usamos a notação (a, b) para indicar um par ordenado de números reais a e b, em que a pode ser chamada primeira coordenada e b, segunda coordenada.

Um par ordenado (a, b) surge como as coordenadas de um ponto P em um plano ao fixar um par de eixos ortogonais Ox e Oy que se intersectam no ponto O, chamado origem.



Sergio Lima/ID/BR

Eixos ortogonais: retas perpendiculares que se intersectam sob um ângulo reto (90°) e nas quais são fixadas uma origem e uma unidade.

Considerando o ponto P, a coordenada a é chamada **abscissa** de P e a coordenada b é chamada **ordenada** de P, obtidas ao traçar por P uma perpendicular aos eixos Ox e Oy, respectivamente. Assim, (a, b) é o par de coordenadas do ponto P relativo ao sistema de eixos Oxy.

O sistema de eixos ortogonais em um plano também é conhecido como **plano cartesiano**, em homenagem ao seu precursor René Descartes, matemático e filósofo francês (1596-1650). Em 1637, ele publicou um tratado filosófico a respeito de ciência universal, intitulado *Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências*, acompanhado de três apêndices. No terceiro apêndice, Descartes apresentou métodos de resolução de problemas em Geometria, que serviu de fundamento para o desenvolvimento do sistema cartesiano ortogonal de coordenadas.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

Musée du Louvre, Paris (França). Fotografia: GL Archive/Alamy Stock Photo/Latinstock

HALL, FRANS. Retrato de René Descartes, 1649. Óleo sobre tela, séc. XVII. 78 cm × 69 cm. Museu do Louvre.

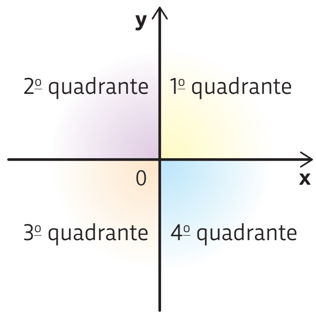
Dizemos que dois pares ordenados de números reais são iguais se, e somente se, suas abscissas forem iguais e se suas ordenadas forem iguais, ou seja:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Logo um par ordenado (a, b) é diferente do conjunto $\{a, b\}$, porque sempre $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Como as coordenadas do ponto O, origem dos eixos ortogonais, é $(0, 0)$, indicaremos esse ponto com o número zero nas imagens de sistemas de eixos ortogonais seguintes.

Os eixos Ox e Oy dividem o plano em quatro regiões denominadas **quadrantes**.



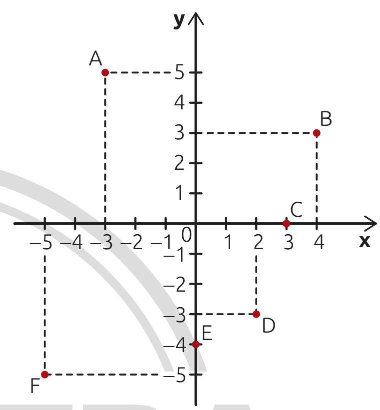
Em cada quadrante as coordenadas (a, b) de seus pontos possuem sinais específicos.

- No primeiro quadrante, tem-se $a > 0$ e $b > 0$;
- No segundo quadrante, tem-se $a < 0$ e $b > 0$;
- No terceiro quadrante, tem-se $a < 0$ e $b < 0$;
- No quarto quadrante, tem-se $a > 0$ e $b < 0$.

Desse modo, os pontos dos eixos coordenados não pertencem a quadrante algum.

Exemplos

- $A(-3, 5)$ pertence ao segundo quadrante.
- $B(4, 3)$ pertence ao primeiro quadrante.
- $C(3, 0)$ não pertence a quadrante algum, pertence ao eixo Ox.
- $D(2, -3)$ pertence ao quarto quadrante.
- $E(0, -4)$ não pertence a quadrante algum, pertence ao eixo Oy.
- $F(-5, -5)$ pertence ao terceiro quadrante.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Cada par ordenado de números reais corresponde a um único ponto no plano cartesiano, assim como cada ponto no plano cartesiano corresponde a um único par ordenado de números reais. Essa correspondência possibilita traduzir conceitos e propriedades geométricas para uma linguagem algébrica, assim como interpretar geometricamente relações entre números reais. A área da Matemática que aborda esse assunto específico recebe o nome de Geometria Analítica, contemplada no estudo do 3º ano.

Gráfico de funções

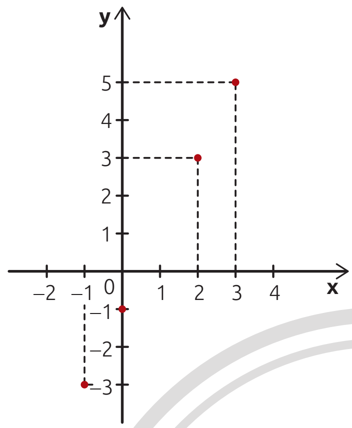
O gráfico que representa uma função f com domínio e contradomínio contidos em $\mathbb{R}$ é o conjunto dos pontos do plano cartesiano, cujas coordenadas obedecem à lei de formação da função. Assim, para esboçar o gráfico de f, indicamos no plano cartesiano os pares ordenados (x, y) com $x \in D(f)$ e $y = f(x)$.

Veja como esboçar o gráfico da função $f\colon A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 1$ com $A = \{-1, 0, 2, 3\}$.

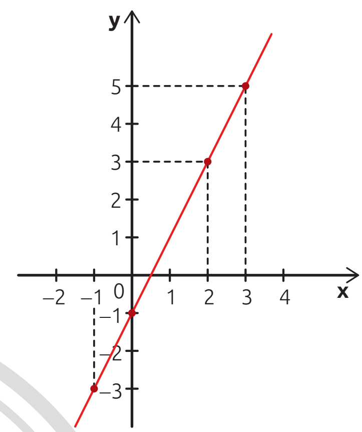
- Inicialmente atribuímos os valores do domínio para x, determinamos os valores correspondentes para $y = f(x)$ e obtemos os pares ordenados (x, y).

x	$f(x) = 2x - 1$	(x, y)
-1	$f(-1) = 2(-1) - 1 = -3$	$(-1, -3)$
0	$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$	$(0, -1)$
2	$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$	$(2, 3)$
3	$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$	$(3, 5)$

- Depois, indicamos esses pares ordenados em um plano cartesiano para obter a representação gráfica da função.

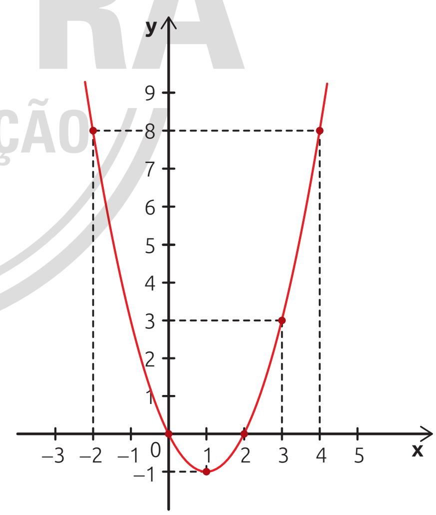


Caso essa mesma função f tivesse o domínio real, $D(f) = \mathbb{R}$, haveria infinitos valores para x e, consequentemente, infinitos valores para y. Assim, o gráfico da função f seria constituído por infinitos pontos, que nesse caso formariam uma reta.



Agora, veja como podemos esboçar o gráfico de $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 - 2x$.

x	$g(x) = x^2 - 2x$	(x, y)
-2	$g(-2) = (-2)^2 - 2(-2) = 8$	$(-2, 8)$
0	$g(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$	$(0, 0)$
1	$g(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$	$(1, -1)$
2	$g(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$	$(2, 0)$
3	$g(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3$	$(3, 3)$
4	$g(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$	$(4, 8)$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

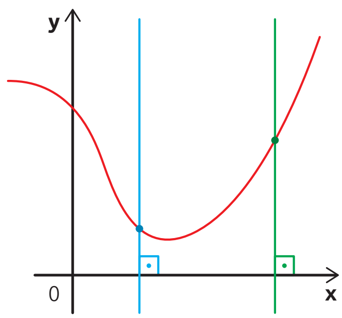
Uma função $f: A \to \mathbb{R}$ é chamada **função real**.

Nesse caso, escolhemos apenas alguns dos infinitos valores que a variável independente (x) pode assumir, pois de acordo com o domínio da função $(\mathbb{R})$ poderíamos atribuir qualquer valor real para x. Essa representação gráfica é chamada parábola.

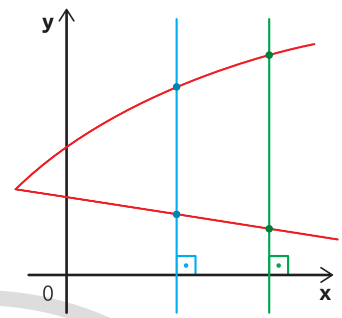
A função cujo gráfico é uma reta chama-se função afim e a função cujo gráfico é uma parábola chama-se função quadrática. Essas funções e seus respectivos gráficos serão estudados mais detalhadamente na próxima unidade.

Uma das características das funções, vista anteriormente, é que para cada valor atribuído à variável independente (x) existe um único valor correspondente à variável dependente (y), isto é, o gráfico de uma função deve ter um único ponto de coordenadas (x, y) para cada x. Geometricamente, isso significa que qualquer reta perpendicular ao eixo Ox no plano cartesiano deve intersectar o gráfico de uma função em, no máximo, um ponto.

Considere, em cada plano cartesiano, um conjunto de pontos representado por uma linha vermelha e retas traçadas perpendicularmente ao eixo Ox.



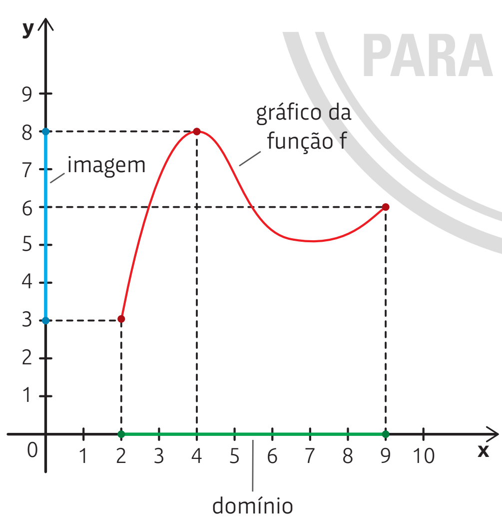
Nessa representação, qualquer reta perpendicular ao eixo Ox intersecta a linha em, no máximo, um ponto. Logo essa linha corresponde ao gráfico de uma função.



Nessa representação, existem retas perpendiculares ao eixo Ox que intersectam a linha em mais de um ponto. Logo essa linha não corresponde ao gráfico de uma função.

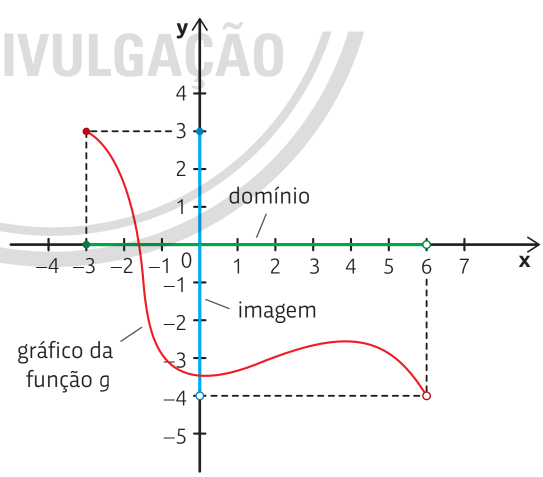
Ao observar o gráfico de uma função no plano cartesiano é possível determinar o domínio (D) e o conjunto imagem (Im) da função, projetando o gráfico nos eixos ortogonais.

Exemplos



$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 9\}$ ou $D(f) = [2, 9]$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant y \leqslant 8\}$ ou $Im(f) = [3, 8]$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < 6\}$ ou $D(g) = [-3, 6[$

$Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 < y \leqslant 3\}$ ou $Im(g) =]-4, 3]$

A projeção do gráfico de uma função no eixo Ox corresponde ao domínio da função e a projeção no eixo Oy corresponde ao conjunto imagem da função.

O número 6 faz parte do domínio da função g? Justifique sua resposta.

Atividades resolvidas

R1. Considere os conjuntos

$A = \{-2, -1, 0, 1\}$ e $B = \{-1, 1, 3, 7\}$,

e a lei de formação da função h, tal que $h\colon A \to B$, definida por $h(x) = 2x^2 - 1$.

a) Represente a função h utilizando diagrama de flechas.

b) O conjunto $Im(h)$ é igual ao conjunto $CD(h)$? Por quê?

c) O ponto $P(1, h(1))$ pertence a qual quadrante do plano cartesiano?

Resolução

a) Inicialmente, calculamos $h(x)$ para cada $x \in A$.

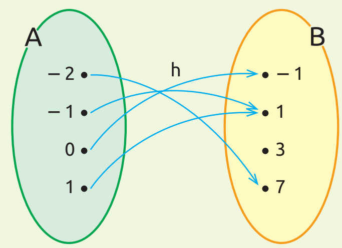
$h(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 1 = 8 - 1 = 7$

$h(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$

$h(0) = 2 \cdot (0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$

$h(1) = 2 \cdot (1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$

Logo temos o seguinte diagrama de flechas.



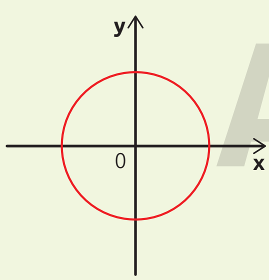
Sergio Lima/ID/BR

b) Não, porque os conjuntos $Im(h) = \{-1, 1, 7\}$ e $CD(h) = \{-1, 1, 3, 7\}$ não possuem os mesmos elementos, pois $3 \in CD(h)$, mas $3 \notin Im(h)$.

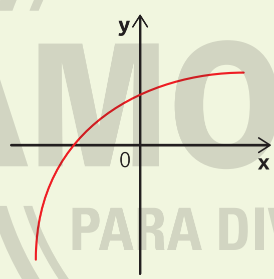
c) O ponto $P(1, h(1))$ corresponde a $P(1, 1)$. Como a abscissa e a ordenada de P são positivas, então P está no primeiro quadrante.

R2. Identifique em quais dos itens abaixo estão representados gráficos de funções. Justifique sua resposta.

a)

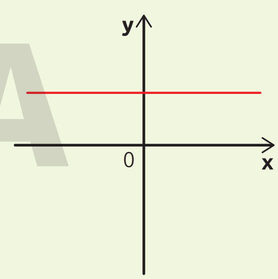


b)



c)

d)

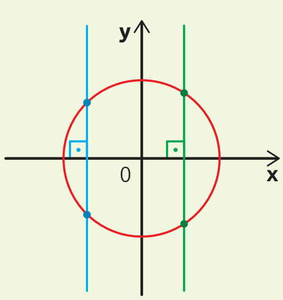


Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

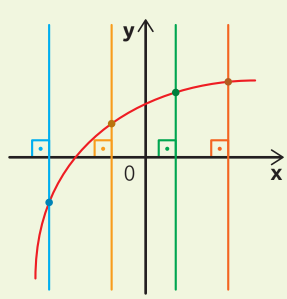
Resolução

Qualquer reta perpendicular ao eixo Ox deve intersectar o gráfico que representa uma função em, no máximo, um ponto.

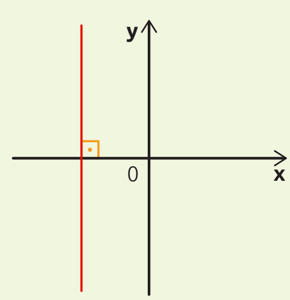
a)



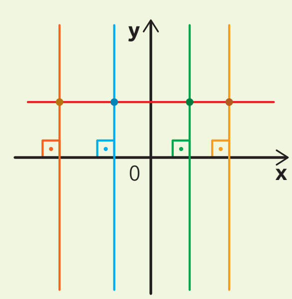
b)



c)



d)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Observe que, nos itens **b** e **d**, qualquer reta perpendicular ao eixo Ox intersecta a linha vermelha em um único ponto. O mesmo não acontece nos itens **a** e **c**, pois existe pelo menos uma reta perpendicular ao eixo Ox que intersecta essas linhas vermelhas em mais de um ponto. No item **c**, há uma reta perpendicular ao eixo Ox que coincide com a linha vermelha.

Portanto, apenas os itens **b** e **d** correspondem a gráficos de função.

Atividades

1. Identifique qual é a variável dependente e qual é a variável independente em cada caso. Em seguida, considerando as grandezas citadas, escreva uma fórmula que expresse uma em função da outra.

a) Uma vendedora de móveis recebe como salário 10% do valor total das suas vendas.

b) Uma operadora de telefonia cobra R$ 0,30 por minuto de ligação local, emitindo na fatura, ao final de cada mês, o valor gasto com as ligações locais.

c) Um pintor utiliza em média 100 mL de tinta para pintar 1 m^2 de parede.

2. Por causa de sua praticidade, o consumo de salada no pote de vidro tem se tornado um hábito comum de quem tem uma vida agitada e corrida.

Considere que certo pote de salada custe R$ 18,00.

Africa Studio/Shutterstock.com/ID/BR

O consumo de salada é importante em uma alimentação equilibrada.

Com essa informação, montamos um quadro que relaciona a quantidade de potes de salada ao preço total.

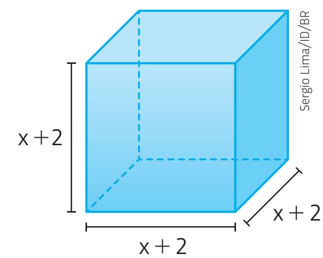
Quantidade de potes (x)	Preço total (R$) de x potes
1	18,00
2	36,00
3	54,00
4	72,00
...	...

a) Escreva uma fórmula para calcular o valor gasto y de acordo com a quantidade x de potes de salada comprados.

b) Calcule a quantia gasta, em reais, na compra de:

- 5 potes;
- 8 potes;
- 6 potes;
- 9 potes.

3. Observe o cubo a seguir.



Sergio Lima/ID/BR

a) Escreva uma fórmula que expresse o volume (V) desse cubo em função de x.

b) Determine o volume do cubo, em metros cúbicos, para os valores de x, em metros, a seguir.

- $x = 1$
- $x = 52$
- $x = 13$
- $x = 41$

c) É possível atribuir o valor 0 à variável x? Em caso afirmativo, qual seria o volume do cubo?

d) Qual é o conjunto dos valores que a variável x pode assumir na função? Justifique.

4. (Enem/Inep)

O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4 300 vagas no setor, totalizando 880 605 trabalhadores com carteira assinada.

[...]

Incremento: ato ou efeito de aumentar.

SALDO de emprego formal do comércio paulista cresce 6,3% em março. *Folhapress*. Texto na íntegra disponível em: <www1.folha.uol.com.br/mercado/2010/04/725984-saldo-de-emprego-formal-do-comercio-paulista-cresce-63-em-marco.shtml?mobile>. Acesso em: 13 jan. 2016.

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano.

Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é:

a) $y = 4\,300x$

b) $y = 884\,905x$

c) $y = 872\,005 + 4\,300x$

d) $y = 876\,005 + 4\,300x$

e) $y = 880\,605 + 4\,300x$

5. Muitos automóveis, quando estacionados em locais proibidos, acabam sendo removidos pelos agentes de trânsito e encaminhados para o pátio do Detran. Após o dia 6/2/2015, para recuperar o automóvel no Detran do Rio de Janeiro, o proprietário tinha de efetuar o pagamento de uma taxa de remoção de R$ 158,13, referente ao reboque, mais a diária de R$ 74,91, referente à estadia no pátio.

De acordo com essas informações, para calcular a quantia P a ser paga pelo proprietário ao recuperar o automóvel guinchado, utiliza-se a fórmula $P = 158{,}13 + 74{,}91q$ (q se refere ao tempo, em dias, da permanência no pátio do Detran).

Marcus Victorio/Brazil Photo Press

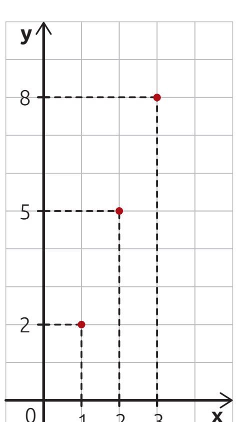
Cena de um automóvel sendo rebocado por estacionar em local proibido de um bairro do Rio de Janeiro, em 2014.

a) Qual é a variável dependente na fórmula citada no texto? E a variável independente?

b) Quanto pagará o proprietário do automóvel que ficar no pátio por 15 dias?

c) Por quantos dias o automóvel permaneceu no pátio se o proprietário pagou R$ 2 854,89?

6. Observe o gráfico da função $f: A \to B$, com $D(f) = \{1, 2, 3\}$ e construa um diagrama de flechas da função f.

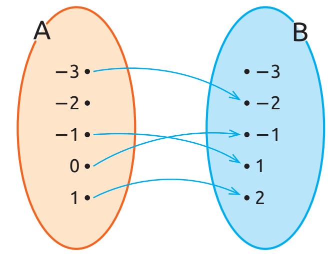


Sergio Lima/ID/BR

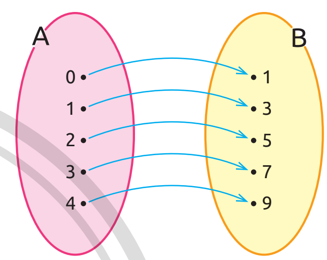
7. Represente a função definida por $f(x) = x^2 - 2x$ em que $D(f) = \{0, 1, 2, 3\}$ e $CD(f) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, por meio de um diagrama de flechas.

8. Quais dos diagramas não representam uma função $f: A \to B$? Justifique.

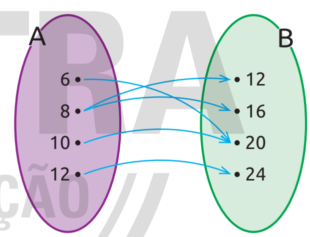
a)



b)



c)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

9. Observe o cartaz de uma confeitaria.

Fotomontagem de Maryane Silva criada com a fotografia Luiz Rocha/Shutterstock.com/ID/BR

Qual alternativa melhor representa os preços praticados pela confeitaria?

a) $f(x) = 45x + 30x + 75$

b) $f(x) = \begin{cases} 45x, \text{ se } 0 < x < 5 \\ 30x - 75, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 45x, \text{ se } 0 < x \leqslant 5 \\ 30x + 75, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

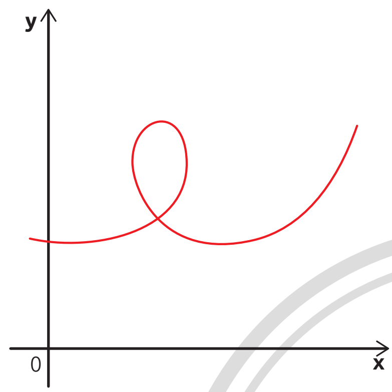
d) $f(x) = \begin{cases} 30x, \text{ se } 0 < x \leqslant 5 \\ 45x + 75, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

Dizemos que as funções dos itens **b**, **c** e **d** são definidas por mais de uma sentença ou por partes.

10. Represente por meio de um diagrama de flechas a função f de A em B, definida por $f(x) = x^2$, com $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 4, 9, 10, 16\}$. Em seguida, expresse o conjunto imagem listando os elementos entre chaves.

11. Classifique as afirmações a seguir em verdadeira ou falsa, justificando as que são falsas.

a) O gráfico a seguir representa uma função.



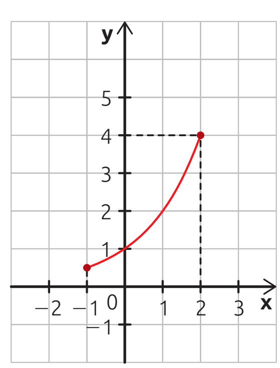
Sergio Lima/ID/BR

b) Em uma função f: $A \to B$, denominamos o conjunto A como contradomínio e o conjunto B como domínio da função f.

c) O conjunto dos elementos do contradomínio que se correspondem com os elementos do domínio, pela aplicação da função, é chamado conjunto imagem da função.

d) Em uma função, o conjunto imagem sempre será igual ao contradomínio.

12. Seja a representação gráfica da função h: $[-1, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 2^x$.



Sergio Lima/ID/BR

Determine no caderno:

a) $Im(h)$ b) $h(-1)$ c) $h(0)$ d) $h(2)$

13. Em cada item, determine o maior subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que a fórmula dada define uma função de A em $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 4x^2$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

c) $p(x) = \sqrt{2x - 8}$

d) $q(x) = \sqrt[3]{x + 9}$

14. Localize os pontos a seguir em um mesmo plano cartesiano. Em seguida, escreva a qual quadrante cada um pertence.

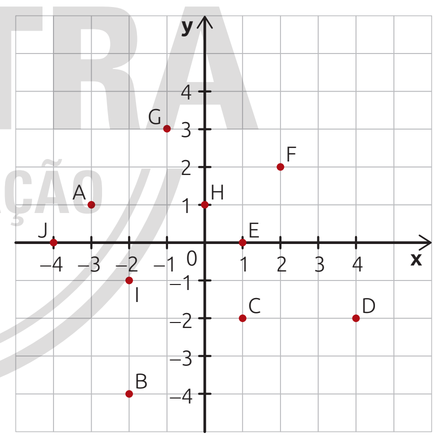
a) $P(-2, -4)$

b) $Q(1, 3)$

c) $R(2, -2)$

d) $S(-3, 1)$

15. Sejam os conjuntos:
$M = \{-4, -3, -1, 1\}$ e $N = \{-2, -1, 0\}$.
Quais dos pontos localizados no plano cartesiano a seguir representam elementos de $M \times N$?



Sergio Lima/ID/BR

16. Todos os vértices de um triângulo retângulo ABC pertencem ao segundo quadrante de um plano cartesiano. Se $A(-2, 1)$, o cateto $\overline{AC}$ do triângulo, paralelo ao eixo Oy, mede 6 unidades e a hipotenusa $\overline{BC}$ mede 10 unidades, quais as coordenadas dos vértices B e C desse triângulo?

17. No caderno, faça um esboço do gráfico de cada função a seguir.

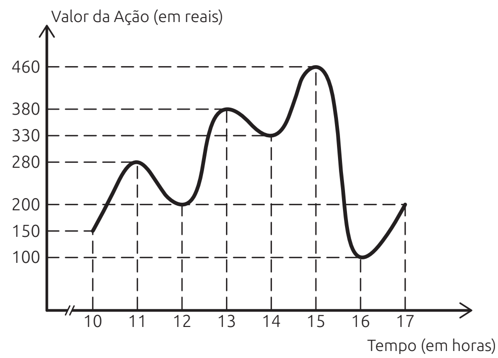
a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x + 4$.

b) g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \dfrac{x + 3}{2}$.

c) h: $[1, 5] \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x - 2$.

d) p: $\{0, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 2x - 2$.

18. (Enem/Inep) O gráfico fornece os valores das ações da empresa XPN, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo.



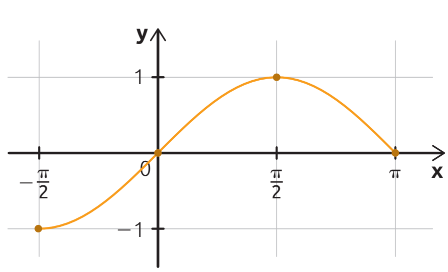
Nesse dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com o seguinte quadro.

Investidor	Hora da compra	Hora da venda
1	10:00	15:00
2	10:00	17:00
3	13:00	15:00
4	15:00	16:00
5	16:00	17:00

Com relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

19. Determine o domínio e o conjunto imagem da função f cujo gráfico está representado a seguir.



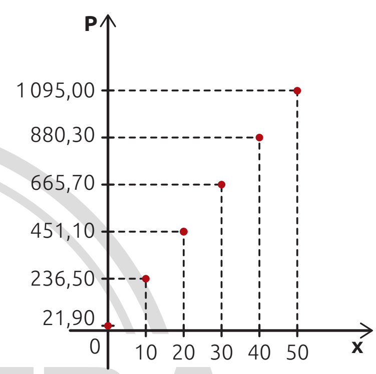
20. O preço de venda $P(x)$, em reais, de um rolo de determinado tecido pode ser calculado pela fórmula $P(x) = 21{,}9x$, em que x é o comprimento do tecido, em metros.

a) De acordo com a fórmula, qual o preço do metro do tecido?

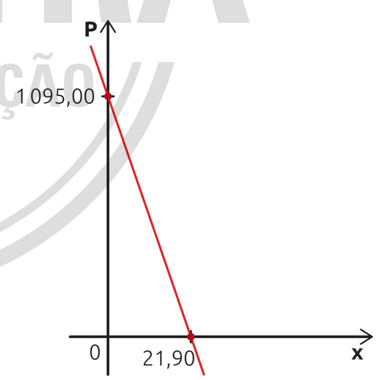
b) Sabendo que um rolo inteiro desse tecido foi vendido por R$ 1 095,00, qual o comprimento total de tecido contido nesse rolo?

c) Qual dos gráficos abaixo representa o preço $P(x)$, considerando a venda de um rolo de tecido de comprimento x metros?

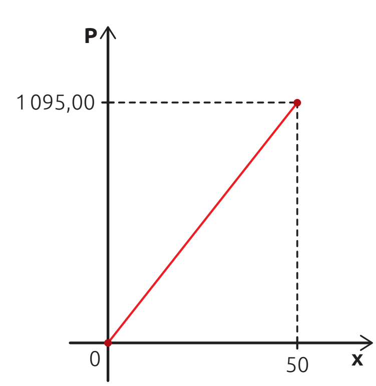
I)



II)



III)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Reduza seu lixo!

A destinação de resíduos sólidos precisa ser repensada por todos. Isso inclui o poder público (federal, estadual e municipal), iniciativas privadas e cidadãos, que se referem a cada um de nós. Quando são depositados em local inadequado, como um lixão a céu aberto, provocam sérios impactos ambientais porque sua decomposição é altamente tóxica, contaminando o solo, a água e o ar, sem falar dos riscos à saúde das pessoas.

Em 2010, foi instituída no Brasil a Política Nacional de Resíduos Sólidos (PNRS). O projeto propõe reduzir a produção de resíduos sólidos, aumentar a reutilização e a reciclagem e adequar a destinação de resíduos sólidos e orgânicos. Ainda no Brasil, em 2014, uma estimativa mostrou que uma pessoa produzia em média 1,062 kg de resíduos diariamente. A imagem a seguir traz a média de resíduos sólidos gerados por região.

Geração de resíduos sólidos urbanos no Brasil (em kg/hab./dia), por região – 2014

Maryane Silva/ASC Imagens

Fonte de pesquisa: Abrelpe. Disponível em: <www.abrelpe.org.br/Panorama/panorama2014.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2016.

Como reduzir nosso lixo?

No mercado

- Planejar as compras para evitar desperdício.
- Levar sacolas retornáveis.
- Optar por produtos concentrados, que tenham refil ou utilizem pouca embalagem.
- Comprar produtos que possuam embalagens recicláveis e retornáveis.
- Não comprar produtos só por estar na promoção.

Em casa

- Planejar as refeições, para evitar desperdício.
- Evitar o uso excessivo de papel higiênico, papel toalha e guardanapos de papel.
- Substituir frituras, a fim de evitar o descarte de óleo.
- Utilizar acendedor de fogão ao invés de fósforos.

A Que outras atitudes, além das apresentadas, podem ser tomadas para reduzirmos a quantidade de lixo produzida diariamente?

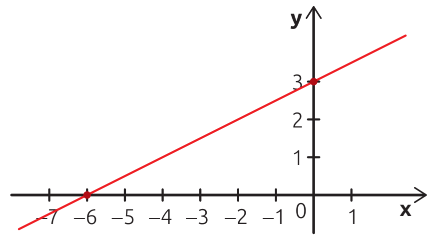
B Qual era, em 2014, a quantidade média de resíduos sólidos gerada por dia, por pessoa, na região onde você vive?

C Escreva a lei de formação de uma função $r: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que relacione a quantidade de pessoas p com a quantidade média $r(p)$ de resíduos sólidos urbanos gerada diariamente por elas em 2014 no Brasil. Em seguida, calcule quantas toneladas desses resíduos eram geradas diariamente, em média, por uma população de 400 mil habitantes.

Lightspring/Shutterstock.com/ID/BR

Função crescente, decrescente e constante

Vamos analisar o comportamento do gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{2} + 3$, representada no plano cartesiano.



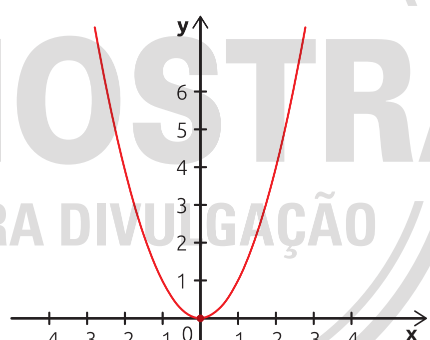
A representação gráfica de f corresponde a uma reta, e quanto maior o valor dado a x, maior é o valor correspondente a $f(x) = \frac{x}{2} + 3$.

Podemos verificar algebricamente esse fato considerando x_1 e x_2 números reais quaisquer, de modo que $x_1 < x_2$. Assim:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{2} < \frac{x_2}{2} \Rightarrow \frac{x_1}{2} + 3 < \frac{x_2}{2} + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Nesse caso, dizemos que a função f é **crescente**.

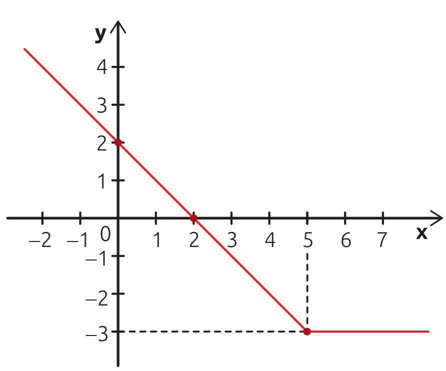
Agora, considere a representação gráfica da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$.



Para $x \leqslant 0$, a função g é **decrescente**, pois quando aumentamos o valor de x, o valor correspondente a $g(x)$ diminui. Para $x \geqslant 0$, a função g é crescente, pois quando aumentamos o valor de x, o valor correspondente a $g(x)$ também aumenta. Assim, essa função é decrescente no intervalo $]-\infty, 0]$ e crescente no intervalo $[0, +\infty[$.

Considere agora a representação gráfica da função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a seguir, definida por duas sentenças:

$$h(x) = \begin{cases} -x + 2, \text{se } x \leqslant 5 \\ -3, \text{se } x > 5 \end{cases}$$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Nesse caso, para $x \leqslant 5$, a função h é decrescente, pois quando aumentamos o valor de x, o valor correspondente a $h(x)$ diminui. Para $x > 5$, o valor correspondente a $h(x)$ permanece constante e igual a -3. Assim, dizemos que h é **constante** no intervalo $]5, +\infty[$. No caso dessa função h, como $h(5) = -5 + 2 = -3$, também é correto dizer que h é constante no intervalo $[5, +\infty[$.

Dizemos que uma função f é:

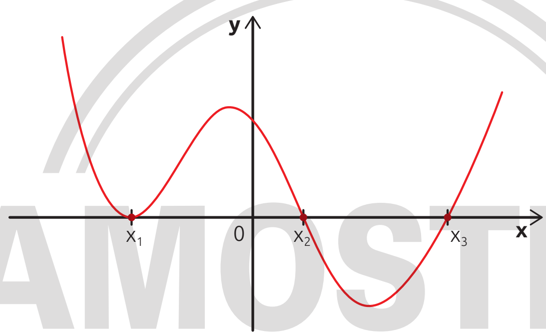
- **crescente** em certo intervalo de seu domínio se, para todo x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$;
- **decrescente** em certo intervalo de seu domínio se, para todo x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$;
- **constante** em certo intervalo de seu domínio se, para todo x_1 e x_2 desse intervalo, tivermos $f(x_1) = f(x_2)$.

Zero de uma função

É denominado zero de uma função f todo valor de $x \in D(f)$ tal que $f(x) = 0$.

Geometricamente, o zero de uma função corresponde à abscissa de cada ponto do gráfico que intersecta o eixo Ox.

No gráfico de f a seguir, x_1, x_2 e x_3 são os zeros da função, ou seja, $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$.



Sergio Lima/ID/BR

Função injetora, sobrejetora ou bijetora

Dependendo de certas características, uma função pode ser denominada injetora, sobrejetora ou bijetora.

Função injetora

Uma função f: $A \rightarrow B$ é chamada injetora ou injetiva quando elementos diferentes em A são transformados por f em elementos diferentes em B, ou seja, f é injetora quando:

$$x_1 \neq x_2 \text{ em } A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ em } B$$

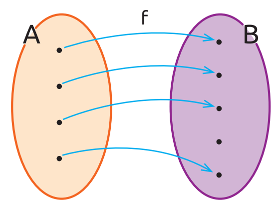
Essa condição pode ser escrita, de modo equivalente, da seguinte maneira:

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ em } B \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ em } A$$

Em outras palavras, podemos afirmar que uma função é injetora quando não há elemento algum do contradomínio que seja imagem de mais de um elemento do domínio.

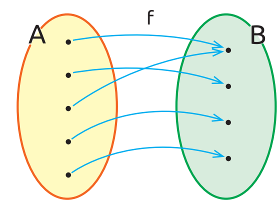
Observe as representações de funções por meio de diagrama de flechas.

- Função injetora



Não há elemento no contradomínio (B) que seja imagem de mais de um elemento do domínio (A).

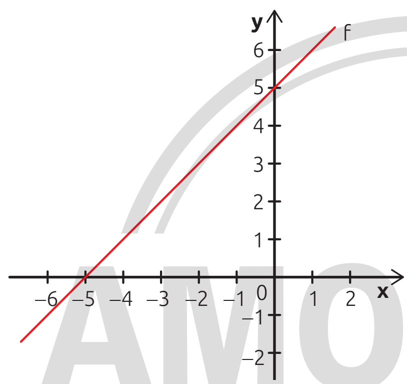
- Função não injetora



Existe um elemento no contradomínio (B) que é imagem de dois elementos diferentes do domínio (A).

Veja outras representações de funções.

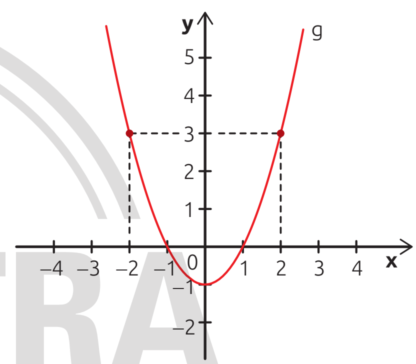
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 5$



Essa função é injetora, pois para todos os elementos distintos x_1 e x_2 do domínio de f temos:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 + 5 \neq x_2 + 5 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

- $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 - 1$

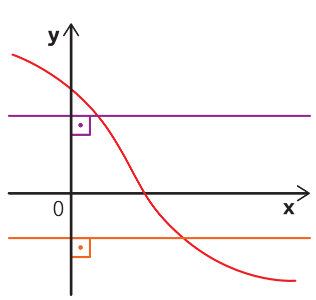


Essa função não é injetora, pois para dois elementos distintos x_1 e x_2 do domínio de g podemos ter $g(x_1) = g(x_2)$. Por exemplo, tomando $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$, temos:

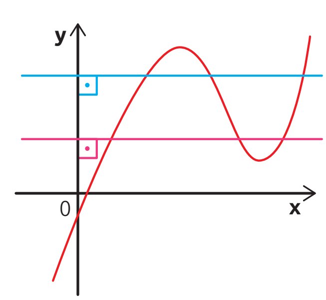
$$g(-2) = g(2) = 3$$

Geometricamente, qualquer reta perpendicular ao eixo Oy no plano cartesiano deve intersectar o gráfico de uma função injetora em, no máximo, um ponto.

Exemplos



Nessa representação, qualquer reta perpendicular ao eixo Oy intersecta o gráfico em, no máximo, um ponto. Logo esse gráfico representa uma função injetora.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Nessa representação, existem retas perpendiculares ao eixo Oy que intersectam o gráfico em mais de um ponto. Logo esse gráfico não representa uma função injetora.

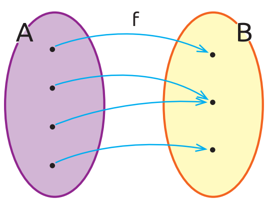
Função sobrejetora

Uma função f: $A \rightarrow B$ é chamada sobrejetora ou sobrejetiva quando, para qualquer elemento $y \in B$, pode-se encontrar pelo menos um elemento $x \in A$, de modo que $f(x) = y$.

Em outras palavras, podemos afirmar que uma função f é sobrejetora quando o conjunto imagem for igual ao contradomínio, isto é, $Im(f) = CD(f)$.

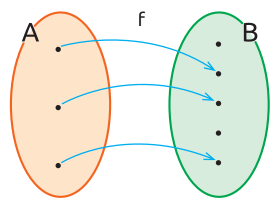
Observe as representações de funções por meio de diagrama de flechas.

- Função sobrejetora



Todos os elementos do contradomínio (B) são imagem de pelo menos um elemento do domínio (A).

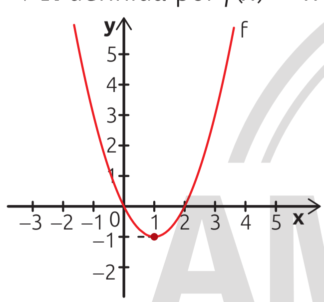
- Função não sobrejetora



Existem elementos no contradomínio (B) que não são imagem de elemento algum do domínio (A).

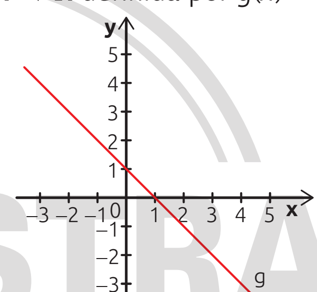
Veja outros exemplos:

- f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x$



Essa função não é sobrejetora, pois o conjunto imagem é diferente do contradomínio, isto é, $Im(f) \neq CD(f)$. Por exemplo, -2 é um elemento do contradomínio, mas não é imagem de elemento algum do domínio de f.

- g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -x + 1$



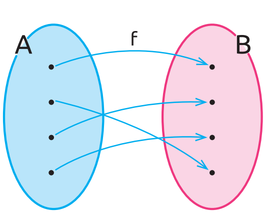
Essa função é sobrejetora, pois o conjunto imagem é igual ao contradomínio, isto é, $Im(g) = CD(g)$.

Função bijetora

Uma função f: $A \rightarrow B$ é chamada bijetora ou bijetiva quando é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora. Quando isso ocorre dizemos que f é uma bijeção, ou uma correspondência biunívoca, entre A e B.

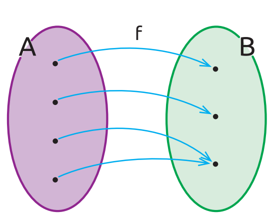
Observe as representações de funções por meio de diagrama de flechas.

- Função bijetora



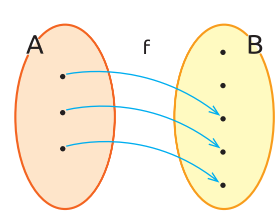
É injetora e sobrejetora simultaneamente.

- Função não bijetora



É sobrejetora, mas não é injetora, porque existe um elemento no contradomínio (B) que é imagem de dois elementos diferentes do domínio (A).

- Função não bijetora

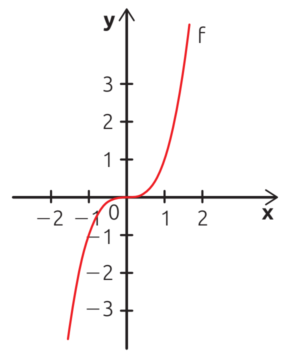


É injetora, mas não é sobrejetora, porque existem elementos no contradomínio (B) que não são imagem de elemento algum do domínio (A).

Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

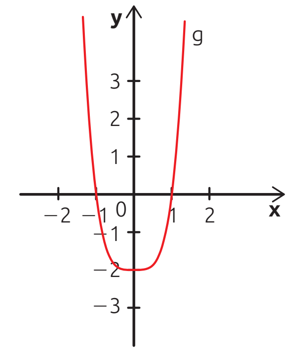
Veja outros exemplos:

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$



A função f é injetora e sobrejetora simultaneamente.

- $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x^4 - 2$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Essa função não é injetora, pois para dois elementos distintos x_1 e x_2 do domínio de g podemos ter $g(x_1) = g(x_2)$. Por exemplo, tomando $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$, temos $g(-1) = g(1) = 0$. Além disso, a função g não é sobrejetora, pois o conjunto imagem é diferente do contradomínio, isto é, $Im(g) \neq CD(g)$.

Função composta

Podemos destacar três unidades de medida de temperatura: grau Celsius (°C), grau Fahrenheit (°F) e kelvin (K). Observe as fórmulas de conversão entre elas.

- de kelvin (T_K) em grau Celsius (T_C):

$$T_C = T_K - 273$$

- de grau Celsius (T_C) em grau Fahrenheit (T_F):

$$T_F = 1{,}8\,T_C + 32$$

> A escala Celsius é medida de temperatura oficial no Brasil e a escala Fahrenheit é muito utilizada em países de língua inglesa. Já a escala kelvin é utilizada para fins científicos.

Quantos graus Fahrenheit equivalem a 400 K?

Para responder à pergunta, inicialmente convertemos 400 K em graus Celsius:

$$T_C = 400 - 273 = 127$$

Em seguida, convertemos 127 °C em graus Fahrenheit:

$$T_F = 1{,}8 \cdot 127 + 32 = 260{,}6$$

Portanto, 260,6 °F equivalem a 400 K.

Note que utilizamos as duas fórmulas: de kelvin em graus Celsius e depois de graus Celsius em graus Fahrenheit. Para simplificar, podemos escrever uma única fórmula de conversão de kelvin em graus Fahrenheit.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K} \arrow[r, "T_C = T_K - 273"] \arrow[rr, bend right, "?"'] & {}^{\circ}\mathrm{C} \arrow[r, "T_F = 1{,}8\,T_C + 32"] & {}^{\circ}\mathrm{F} \end{tikzcd}$$

Para isso, efetuamos:

$$T_F = 1{,}8\underbrace{T_C}_{T_K - 273} + 32 = 1{,}8 \cdot (T_K - 273) + 32 = 1{,}8\,T_K - 459{,}4 \Rightarrow T_F = 1{,}8\,T_K - 459{,}4$$

Para verificar, convertemos novamente 400 K em graus Fahrenheit:

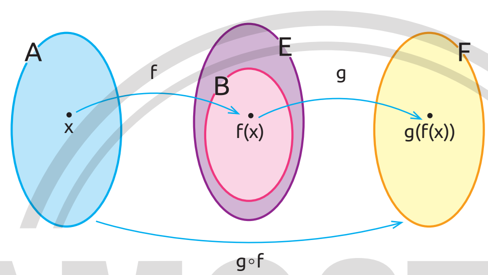
$$T_F = 1{,}8 \cdot 400 - 459{,}4 = 260{,}6$$

Portanto, 400 K equivalem a 260,6 °F.

Ao escrevermos uma única fórmula de conversão por meio da "composição" das outras duas fórmulas, estamos usando a ideia de **função composta**, que estudaremos a seguir.

Considere as funções $f\colon A \to B$ e $g\colon E \to F$, com $B \subset E$. A função composta de g com f é a função denotada por $g \circ f$, com domínio em A e contradomínio em F, isto é, $g \circ f\colon A \to F$, que a cada elemento $x \in A$ faz corresponder o elemento $y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in F$.

Observe a representação da função $g \circ f$ por meio de um diagrama de flechas.



Exemplo

Considere os conjuntos $A = \left\{0, \frac{1}{3}, 1\right\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$, $E = \{-2, -1, 0, 2\}$ e $F = \{0, 1, 4\}$ e as funções $f\colon A \to B$ definida por $f(x) = 3x - 1$ e $g\colon E \to F$ definida por $g(x) = x^2$. Como $B \subset E$, podemos determinar $g \circ f$, com domínio A e contradomínio F.

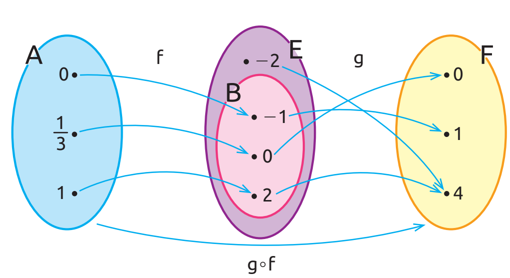
- $f(0) = 3 \cdot 0 - 1 = -1$ e $g(-1) = (-1)^2 = 1$. Logo, $g(f(0)) = g(-1) = 1$.
- $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0$ e $g(0) = 0^2 = 0$. Logo, $g\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = g(0) = 0$.
- $f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ e $g(2) = 2^2 = 4$. Logo, $g(f(1)) = g(2) = 4$.

Determinamos a lei de formação de $g \circ f$ por meio dos cálculos a seguir.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$$

Observe que também podemos determinar as imagens dos elementos do domínio (A) pela função $g \circ f$ utilizando sua lei de formação.

- $(g \circ f)(0) = 9 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$
- $(g \circ f)\left(\frac{1}{3}\right) = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$
- $(g \circ f)(1) = 9 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = 9 - 6 + 1 = 4$



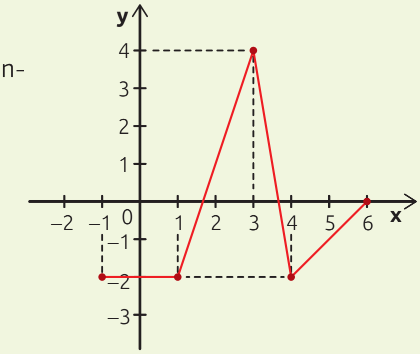
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

R3. Observe o gráfico da função $g: [-1, 6] \rightarrow [-2, 4]$.

a) Determine intervalos de seu domínio em que a função g é:

- constante;
- decrescente;
- crescente.

b) A função g é injetora? É sobrejetora? Justifique.



Sergio Lima/ID/BR

Resolução

a) Analisando o gráfico, notamos que:

- em $[-1, 1]$ a função g é constante, pois $g(x) = -2$ para qualquer x nesse intervalo;
- em $[1, 3]$ a função g é crescente, pois conforme aumentamos o valor de x, neste intervalo, o valor correspondente $g(x)$ também aumenta;
- em $[3, 4]$ a função g é decrescente, pois conforme aumentamos o valor de x, neste intervalo, o valor correspondente $g(x)$ diminui;
- em $[4, 6]$ a função g é crescente, pois conforme aumentamos o valor de x, neste intervalo, o valor correspondente $g(x)$ também aumenta.

b) Uma função qualquer $f: A \rightarrow B$ é:

- injetora se $x_1 \neq x_2$ em $A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ em B;
- sobrejetora se $Im(f) = CD(f)$.

Observe que g não é injetora, pois tomando os elementos distintos $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ pertencentes a $[-1, 6]$, tem-se $g(0) = g(1) = -2$. Porém, g é sobrejetora, pois $Im(g) = CD(g) = [-2, 4]$.

R4. Considere as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 5x$ e $g(x) = x^2 - 1$. Determine:

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(f(x))$ d) $g(g(3))$

Resolução

a) $f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 5 \cdot (x^2 - 1) = 5x^2 - 5$

b) $g(f(x)) = g(5x) = (5x)^2 - 1 = 25x^2 - 1$

c) $f(f(x)) = f(5x) = 5 \cdot (5x) = 25x$

d) Podemos determinar $g(g(3))$ de duas maneiras.

1ª maneira

$$g(g(x)) = g(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1) - 1 = x^4 - x^2 - x^2 + 1 - 1 = x^4 - 2x^2$$

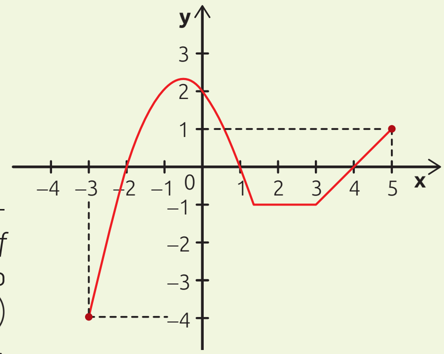
Logo $g(g(3)) = 3^4 - 2 \cdot 3^2 = 63$.

2ª maneira

Como $g(3) = 3^2 - 1 = 8$, temos que $g(g(3)) = g(8) = 8^2 - 1 = 64 - 1 = 63$.

R5. Considerando o gráfico da função $f: [-3, 5] \to \mathbb{R}$, determine os zeros da função e os valores de x tais que:

- $f(x) > 0$
- $f(x) < 0$



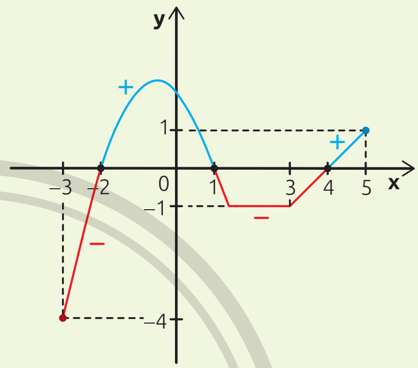
Resolução

Geometricamente, os zeros da função f correspondem à abscissa dos pontos que o gráfico de f intersecta o eixo Ox, ou seja, quando $y = 0$. Como o gráfico intersecta o eixo Ox nos pontos $(-2, 0)$, $(1, 0)$ e $(4, 0)$, segue que os zeros da função são -2, 1 e 4.

Para determinar os valores de x tais que:

- $f(x) > 0$, verificamos em quais intervalos o gráfico da função f está acima do eixo Ox, que correspondem aos pontos cuja ordenada é positiva.
- $f(x) < 0$, verificamos em quais intervalos o gráfico da função f está abaixo do eixo Ox, que correspondem aos pontos cuja ordenada é negativa.

Portanto, analisando o gráfico, concluímos que $f(x) > 0$ se x pertence aos intervalos $]-2, 1[$ ou $]4, 5]$, e $f(x) < 0$ se x pertence aos intervalos $[-3, -2[$ ou $]1, 4[$.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Dizemos que uma função f é:

- **positiva** em um intervalo $I \subset D(f)$, se tivermos $f(x) > 0$ para todo $x \in I$;
- **negativa** em um intervalo $I \subset D(f)$, se tivermos $f(x) < 0$ para todo $x \in I$.

R6. Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \leqslant -2 \\ x, \text{ se } -2 < x < 1 \\ -1, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

a) A função f é constante no intervalo $]-2, 1[$? Justifique.

b) Qual é o zero da função f?

c) A função f é bijetora? Justifique.

d) Qual é o valor de $(f \circ f)(-2)$?

Resolução

a) Não, pois os números -1 e 0 pertencem a esse intervalo, mas $f(-1) = -1$ e $f(0) = 0$, Logo, $f(-1) \neq f(0)$, ou seja, a imagem não permanece constante.

b) O zero da função f é todo valor de $x \in \mathbb{R}$, de modo que $f(x) = 0$. Pela lei de formação da função f, vemos que o zero da função pode estar apenas no intervalo $]-2, 1[$, pois nos demais intervalos $f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$. Assim, $f(x) = 0$ quando $x = 0$. Portanto, 0 é o zero da função f.

c) Uma função é bijetora quando for simultaneamente injetora e sobrejetora.
A função f não é injetora, pois aplicando $x_1 = -5$ e $x_2 = -4$ pertencentes a $\mathbb{R}$, temos $f(x_1) = f(x_2) = 1$. Como f não é injetora, não é bijetora também. Portanto não é necessário verificar se f é sobrejetora.

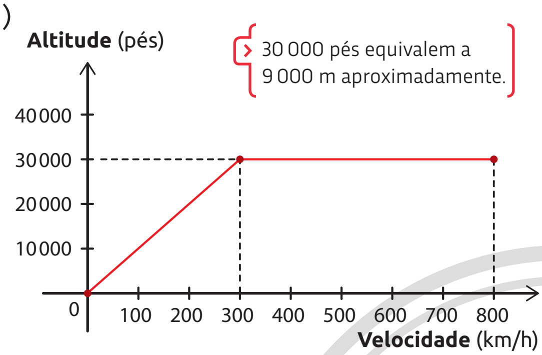
d) Queremos determinar $(f \circ f)(-2) = f(f(-2))$.
Pela lei de formação da função f, temos $f(-2) = 1$. Logo $f(f(-2)) = f(1)$. Pela função f, obtemos $f(1) = -1$. Portanto, $(f \circ f)(-2) = -1$.

Atividades

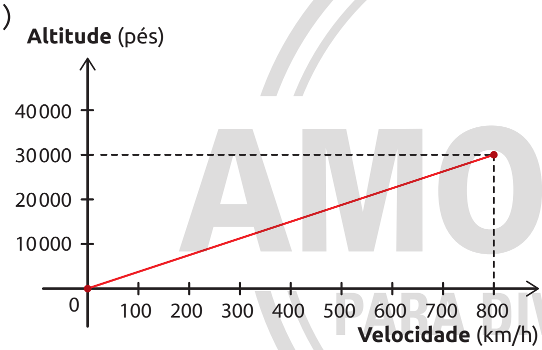
21. Suponha que certo avião comercial ganhe velocidade de maneira gradativa, desde o repouso até atingir 800 km/h. No momento da decolagem sua velocidade é 300 km/h, chegando a 800 km/h, quando atinge a altitude de 30 000 pés.

Observe os gráficos e identifique o que melhor representa as informações dadas.

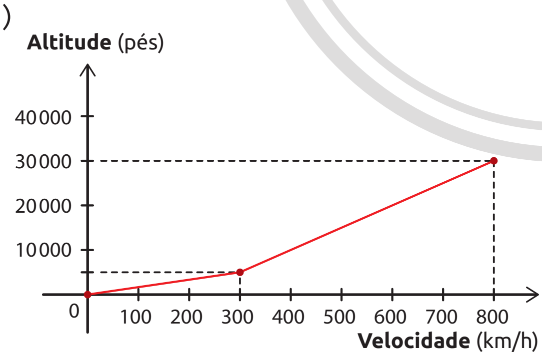
a)



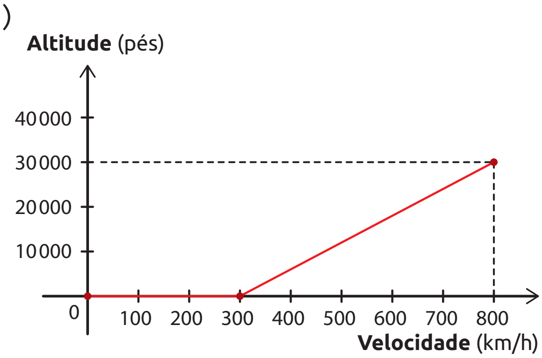
b)



c)



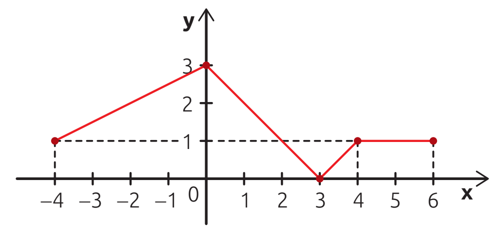
d)



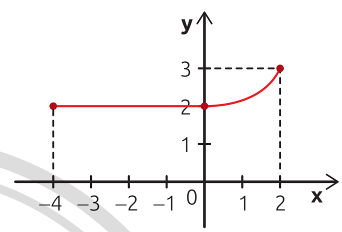
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

22. Identifique, em cada gráfico, em quais intervalos as funções são decrescentes, crescentes ou constantes.

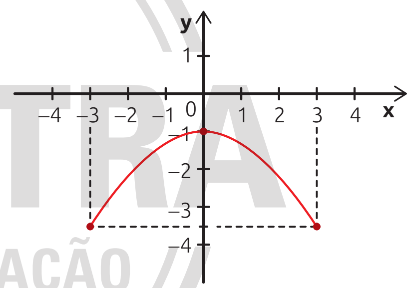
a)



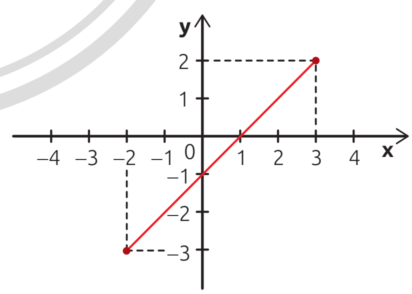
b)



c)



d)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

23. Verifique, em cada item, quais elementos do conjunto apresentado são zeros da função real, dada sua lei de formação.

a) $f(x) = x^2 - 1$; $A = \{-1, 0, 1\}$

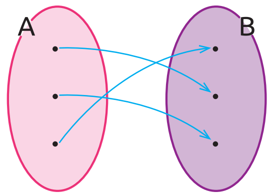
b) $g(x) = 3x - 6$; $B = \{1, 2, 3\}$

c) $h(x) = \begin{cases} -2 - x, \text{ se } x < -1 \\ x^3, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$; $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

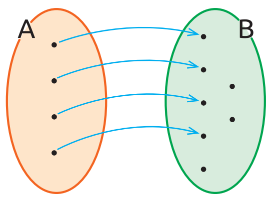
d) $p(x) = x^2 - 4x + 5$; $D = \{1, 2, 3\}$

24. Observe as representações de funções por meio de diagrama de flechas.

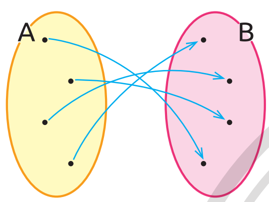
a)



b)



c)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Determine no caderno qual dos diagramas representam funções injetoras, sobrejetoras ou bijetoras.

25. Represente no caderno as seguintes funções por meio de diagrama de flechas.

a) $f(x) = 2x$ com $D(f) = A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $CD(f) = B = \{2, 4, 6, 8\}$.

b) $g(x) = x^2$ com $D(g) = C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $CD(g) = D = \{0, 1, 4\}$.

c) $h(x) = \dfrac{1}{x}$ com $D(h) = E = \{2, 3, 4\}$ e $CD(h) = F = \left\{0, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

- Identifique quais das funções representadas são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras.

26. Classifique as afirmativas em verdadeira ou falsa, corrigindo no caderno as falsas.

a) Toda função sobrejetora é bijetora.

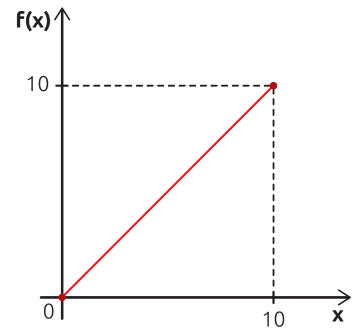
b) Se o contradomínio é igual ao conjunto imagem, então a função é sobrejetora.

c) Seja $f\colon A \to A$ dada por $f(x) = x^2$. Se $A = \mathbb{R}_+$, então f é bijetora, mas se $A = \mathbb{R}$, então f não é injetora nem sobrejetora.

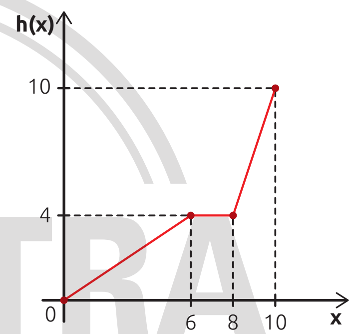
d) Seja f uma função injetora. Se $x_1, x_2 \in D(f)$ com $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) = f(x_2)$.

27. Os gráficos a seguir representam funções de $[0, 10]$ em $[0, 10]$. Identifique quais dessas funções são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras.

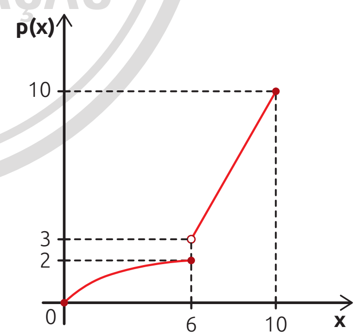
a)



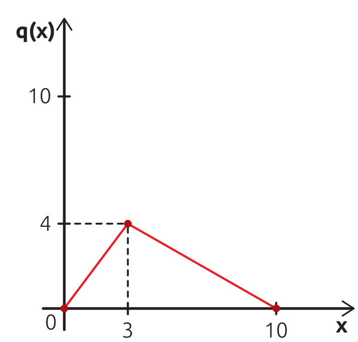
b)



c)



d)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

28. (Udesc) A função f definida por $f(x) = 1 + x^2$ é uma função bijetora, se os conjuntos que representam o domínio $\big(D(f)\big)$ e a imagem $\big(Im(f)\big)$ são:

a) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [1, +\infty[$

b) $D(f) =]-\infty, 0]$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

c) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

d) $D(f) = [0, +\infty[$ e $Im(f) = [0, +\infty[$

e) $D(f) = [0, +\infty[$ e $Im(f) = [1, +\infty[$

29. Dadas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x + 4$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -x^2 + 3x$, determine:

a) $g(f(x))$

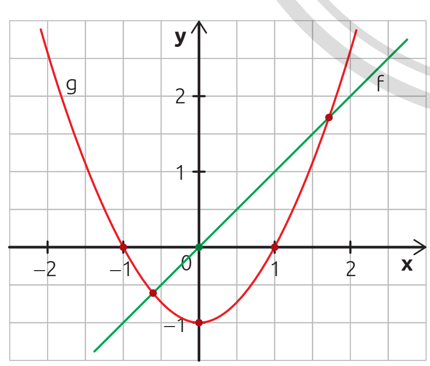
b) $f(g(x))$

c) $f\big(f(10)\big)$

d) $g\big(f(10)\big)$

30. Determine no caderno o valor de x para que $f(g(x)) = g(f(x))$, sabendo que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x + 4$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = x^2 - 3$.

31. Desafio Calcule $f\big(g(-1)\big) + g\big(f(0)\big)$ de acordo com os gráficos das funções reais f e g a seguir.



Sergio Lima/ID/BR

32. Sabendo que, em cada item, f e g são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, resolva.

a) Se $f(x) = 3x - 4$ e $f(g(x)) = -6x + 11$ para todo $x \in \mathbb{R}$, determine a lei de formação da função g.

b) Se $g(x) = -x + 3$ e $g(f(x)) = -\frac{1}{2}x + 5$ para todo $x \in \mathbb{R}$, determine a lei de formação da função f.

33. Uma costureira produz duas saias de um determinado modelo em uma hora e vende por R$ 40,00, cada uma. Considerando que todas as saias produzidas serão vendidas, resolva no caderno o que se pede.

a) Escreva a lei de formação de duas funções, sendo uma que relacione a quantidade $q(t)$ de saias produzidas em função do tempo de trabalho t, em horas, e outra que relacione a quantia $p(x)$, em reais, arrecadada com as vendas de x saias produzidas.

b) Determine a lei de formação da função composta $p \circ q$, que relaciona a quantia arrecadada e o tempo de trabalho.

c) De acordo com as informações, que quantia a costureira vai arrecadar se ela costurar por 4 h?

34. Sejam as funções:

- $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{x}$;
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = x^2$.

Verifique se é bijetora a função:

a) g b) f c) $f \circ g$

35. A quantidade $q(t)$ de peças produzidas por uma fábrica, em cada hora (t), é dada pela expressão $q(t) = 25t$.

Supondo que o lucro, em reais, de produção e venda de x unidades desse produto é dado por:

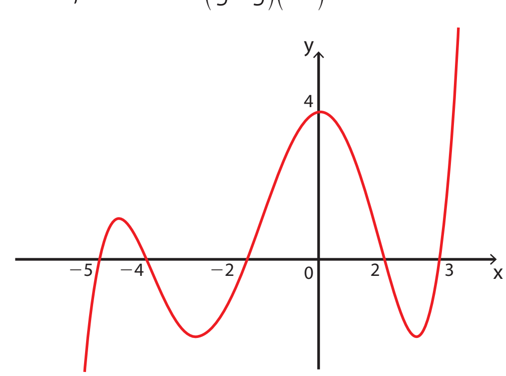
$$L(x) = 2x^2 - 3x - 10$$

resolva no caderno os itens a seguir.

a) Expresse o lucro em função do tempo de produção, determinando $(L \circ q)(t)$.

b) Supondo que todas as peças produzidas em 5 horas foram vendidas, determine o lucro obtido.

36. (UPF-RS) Considere a função real g, cuja representação gráfica está parcialmente ilustrada na figura a seguir. Sendo $g \circ g$ a função composta de g com g, então, o valor de $(g \circ g)(-2)$ é:



UPF/Fac-símile: ID/BR

a) 0 b) 4 c) 2 d) −2 e) −5

Verificando rota

1. O que é um conjunto? Dê alguns exemplos.

2. Cite possíveis maneiras de representar um conjunto.

3. Os conjuntos $\varnothing$ e $\{\varnothing\}$ são iguais? Justifique.

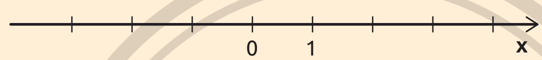
4. Qual é a condição necessária e suficiente para que um conjunto A, não vazio, esteja contido em um conjunto B?

5. Justifique a colocação a seguir.

> Na linguagem, a conjunção “ou” pode indicar exclusão e alternância, como na oração: Maria ou Joana será aprovada no concurso. No entanto, na operação de união de conjuntos, esse recurso tem outro sentido.

6. Dê exemplos de conjuntos não vazios A e B, de modo que $A - B \neq B - A$.

7. Quantos números racionais existem entre os inteiros 0 e 1?



8. Podemos escrever o número π na forma $\frac{\pi}{1}$, ou seja, como uma fração. Nesse caso, podemos afirmar que π é racional? Justifique.

9. Explique com suas palavras o que é função.

10. Cite situações que podem ser expressas por funções.

11. Das situações que você citou na questão anterior, a variável independente pode assumir apenas valores naturais em alguma delas? Se sim, escreva em quais.

12. Quando um valor $x \in D(f)$ é zero de uma função f?

13. Justifique a afirmação a seguir.

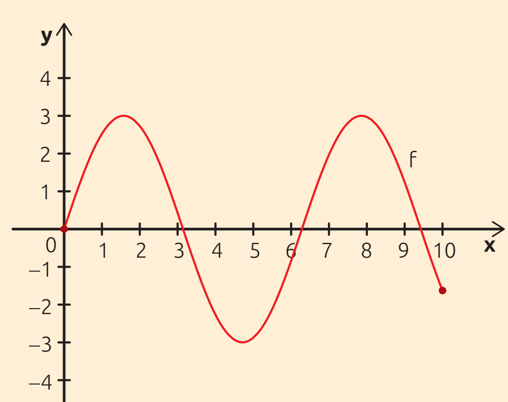
> O gráfico de uma função pode intersectar o eixo Ox mais de uma vez, no entanto, intersecta o eixo Oy, no máximo, uma vez.

14. A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4$ não é sobrejetora. Porém é possível restringir o contradomínio de modo que a função seja sobrejetora. Qual deve ser esta restrição?

15. Quando uma função é bijetora?

16. Quais tipos de informações são possíveis obter analisando o gráfico da função $f\colon [0, 10] \to \mathbb{R}$ apresentada ao lado?

17. A página de abertura da unidade **1** apresentou a miscigenação brasileira como assunto inicial, abordando a diversidade dos grupos populacionais do nosso país. Qual dos conteúdos trabalhados durante esta unidade se relacionam com este tema?



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Ampliando fronteiras

Grandezas irracionais

Assim como os números naturais, inteiros e racionais, os números irracionais são conhecidos e estudados atualmente. Mas nem sempre foi assim. A seguir, apresentamos alguns fatos que marcaram a trajetória do seu desenvolvimento.

Os números governam o mundo

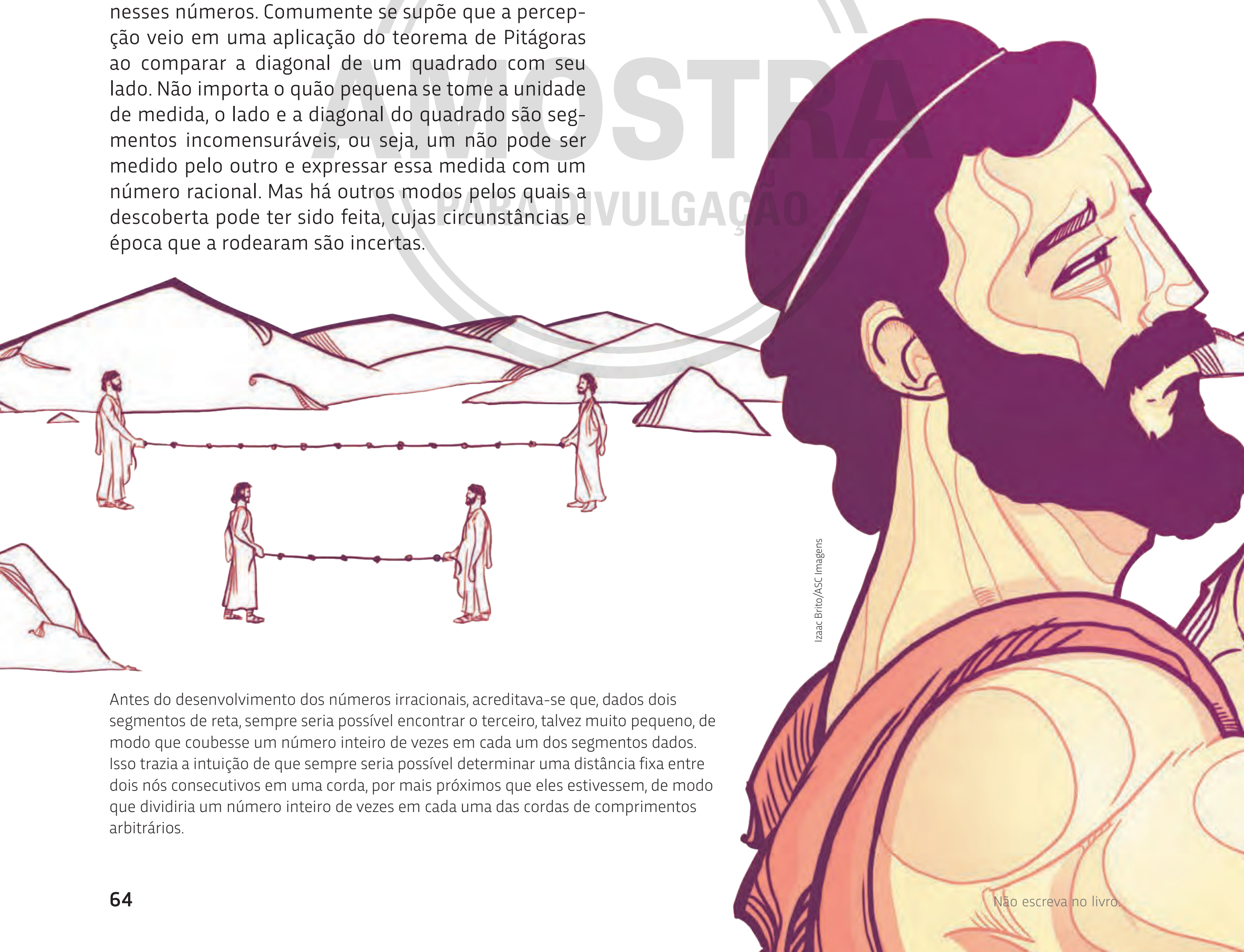
Pitágoras (c. 585 a.C.-500 a.C.) liderava uma comunidade filosófico-religiosa, a escola Pitagórica. Um dos lemas dessa comunidade se destacava como "os números governam o mundo". Nesse contexto, "número" se restringia aos inteiros positivos, admitindo-se tomar razões entre esses números, formando as frações.

A descoberta de que os inteiros e suas razões não eram suficientes para descrever simples propriedades básicas praticamente demolia a base da fé pitagórica nesses números. Comumente se supõe que a percepção veio em uma aplicação do teorema de Pitágoras ao comparar a diagonal de um quadrado com seu lado. Não importa o quão pequena se tome a unidade de medida, o lado e a diagonal do quadrado são segmentos incomensuráveis, ou seja, um não pode ser medido pelo outro e expressar essa medida com um número racional. Mas há outros modos pelos quais a descoberta pode ter sido feita, cujas circunstâncias e época que a rodearam são incertas.

Números irracionais

A solução exigida e finalmente adotada era a de ampliar o conceito de número. Novos números tiveram de ser considerados, e os que não eram racionais passaram a ser chamados irracionais (o que significa não racionais). O desenvolvimento desses números assinala um dos grandes marcos na História da Matemática.

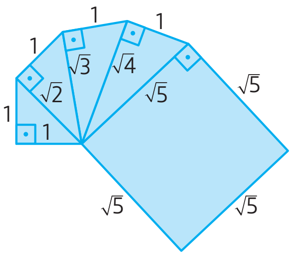
Desse modo, adotando uma unidade de comprimento qualquer, todo segmento de reta pode ter uma medida numérica.



Antes do desenvolvimento dos números irracionais, acreditava-se que, dados dois segmentos de reta, sempre seria possível encontrar o terceiro, talvez muito pequeno, de modo que coubesse um número inteiro de vezes em cada um dos segmentos dados. Isso trazia a intuição de que sempre seria possível determinar uma distância fixa entre dois nós consecutivos em uma corda, por mais próximos que eles estivessem, de modo que dividiria um número inteiro de vezes em cada uma das cordas de comprimentos arbitrários.

Construindo alguns segmentos de medidas irracionais

A partir da diagonal de um quadrado de lado unitário, é possível construir outros segmentos cuja medida seja um número irracional. Ao lado, está apresentada a construção dos segmentos de medidas $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$.

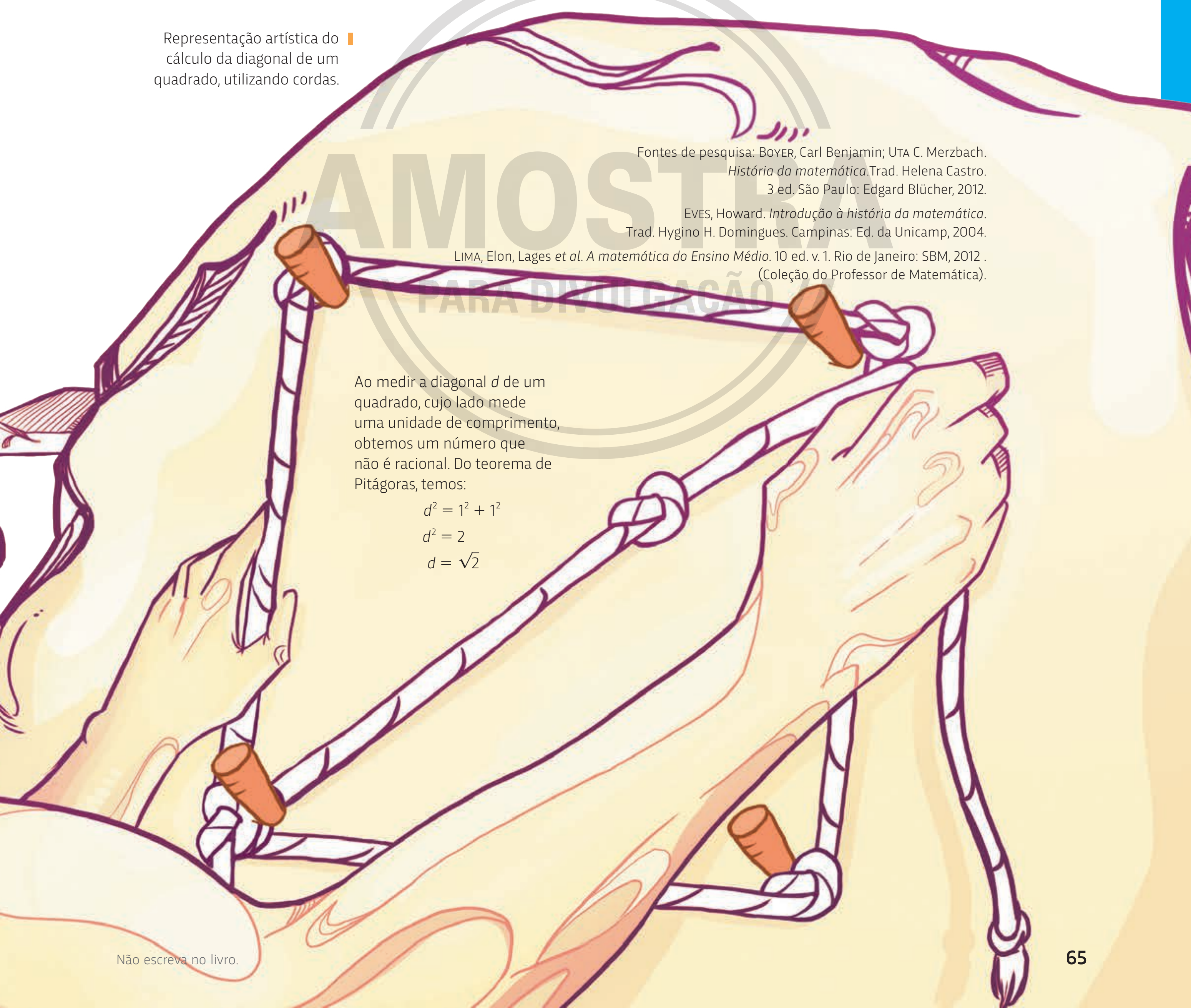


Sergio Lima/ID/BR

A Você concorda com a afirmação da escola pitagórica de que “os números governam o mundo”? Justifique.

B Por que a filosofia pitagórica foi abalada?

C Utilizando régua e compasso, esboce um segmento de medida $\sqrt{7}$, da mesma maneira como foi apresentado para a construção dos segmentos de medidas $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$. Siga as orientações do professor para essa tarefa.



Representação artística do cálculo da diagonal de um quadrado, utilizando cordas.

Fontes de pesquisa: Boyer, Carl Benjamin; Uta C. Merzbach. *História da matemática*.Trad. Helena Castro. 3 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

Eves, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

Lima, Elon, Lages *et al. A matemática do Ensino Médio.* 10 ed. v. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2012 . (Coleção do Professor de Matemática).

Ao medir a diagonal *d* de um quadrado, cujo lado mede uma unidade de comprimento, obtemos um número que não é racional. Do teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d^2 = 2$$
$$d = \sqrt{2}$$

unidade 2

Atualmente, a geração de energia eólica tem crescido consideravelmente graças a alguns fatores, como a necessidade de alternativa para as fontes não renováveis. Por ser proveniente dos ventos, ela é bem aproveitada em épocas de secas, funcionando assim como um complemento na produção das usinas hidrelétricas, cujos reservatórios de água diminuem nesse período.

A quantidade de energia produzida por uma turbina eólica pode ser determinada a partir de sua potência e do tempo de atividade, assunto associado ao conteúdo de função afim, que será abordado nesta unidade.

Bloomberg/Getty Images

Turbinas do Complexo Eólico União dos Ventos, em São Miguel do Gostoso (RN), retratadas em 2015.

A grandiosidade das instalações em uma usina eólica se comprova no tamanho das pás da hélice de uma turbina, que podem medir cerca de 80 metros de comprimento, fixadas a mais de 100 metros acima do solo.

Nesta unidade, você vai estudar o comportamento das funções afim, modular e quadrática, associando-as a algumas aplicações, como juro simples e proporcionalidade.

capítulo 3

Função afim

No capítulo anterior estudamos o conceito de função e suas características. Agora, veremos com mais detalhes a função cuja representação gráfica é uma reta.

Definição de função afim

O salário de Flávia, que trabalha em uma perfumaria, varia de acordo com um valor chamado comissão, que se refere a 5% do total de vendas realizadas em um mês. Adiciona-se a isso o valor de seu salário fixo, R$ 1 400,00.

Podemos atribuir diferentes valores, em reais, para as vendas e obter outros referentes ao salário de Flávia. Por exemplo, se em um mês ela vender R$ 2 500,00 em produtos, seu salário será R$ 1 525,00, pois:

$$\frac{5}{100} \cdot 2\,500 + 1\,400 =$$
$$= 0{,}05 \cdot 2\,500 + 1\,400 =$$
$$= 125 + 1\,400 = 1\,525$$

Portanto, o salário de Flávia será R$ 1 525,00.

Fancy/Diomedia

No Brasil, em 2014, o setor de perfumaria e cosméticos movimentou aproximadamente 100 bilhões de reais.

Desta maneira, confirmamos que a remuneração de Flávia depende do valor das vendas realizadas em um mês ou, em outras palavras, que seu salário (variável dependente) varia em função do valor dessas vendas (variável independente). Veja mais exemplos no quadro a seguir.

Vendas realizadas em um mês (R$)	Salário de Flávia (R$)
3 000	$0{,}05 \cdot 3\,000 + 1\,400 = 1\,550$
4 000	$0{,}05 \cdot 4\,000 + 1\,400 = 1\,600$
5 200	$0{,}05 \cdot 5\,200 + 1\,400 = 1\,660$
12 800	$0{,}05 \cdot 12\,800 + 1\,400 = 2\,040$
⋮	⋮
v	$0{,}05 \cdot v + 1\,400$

Relacionando as grandezas **vendas realizadas em um mês** (v) e **salário mensal de Flávia** ($S(v)$), podemos escrever uma função dada por:

$$\overbrace{S(v)}^{\text{salário mensal de Flávia}} = \underbrace{0{,}05 \cdot \overbrace{v}^{\text{vendas realizadas em um mês}}}_{\text{comissão}} + \underbrace{1\,400}_{\text{valor fixo}}$$

Não escreva no livro.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada **afim** se tiver coeficientes reais a e b tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Também podemos representar uma função afim por $y = ax + b$.

Veja alguns exemplos de lei de formação de função afim.

- $f(x) = 5x + 6$
- $f(x) = -x + 3$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = -6$

Gráfico da função afim

É possível representar a função afim por meio de um gráfico no plano cartesiano. Para isso, tomamos a lei de formação da função e atribuímos valores reais quaisquer à variável independente, obtendo os valores correspondentes, também reais, para a variável dependente.

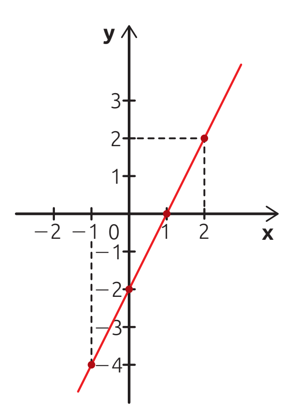
Observe uma maneira de esboçar o gráfico da função afim dada pela lei de formação $f(x) = 2x - 2$.

Inicialmente, atribuímos alguns valores para a variável independente x e obtemos valores correspondentes para a variável dependente $f(x)$, determinando assim pares ordenados (x, y). Em seguida, representamos no plano cartesiano os pontos determinados por esses pares ordenados.

Como x pode assumir qualquer valor real, podemos atribuir infinitos valores para x, obtendo valores correspondentes para y. Os infinitos pontos cujas coordenadas satisfazem a lei de formação dada formam o gráfico dessa função.

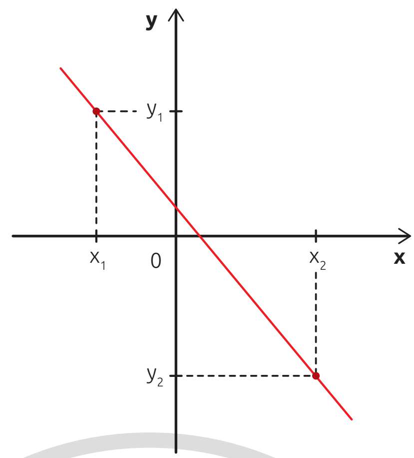
x	$f(x) = 2x - 2$	(x, y)
-1	$f(-1) = 2 \cdot (-1) - 2 = -2 - 2 = -4$	$(-1, -4)$
0	$f(0) = 2 \cdot (0) - 2 = 0 - 2 = -2$	$(0, -2)$
1	$f(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 2 - 2 = 0$	$(1, 0)$
2	$f(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 4 - 2 = 2$	$(2, 2)$

Lembre-se de que $f(x) = y$.



Sergio Lima/ID/BR

É possível demonstrar que três pontos quaisquer do gráfico de uma função afim são colineares, ou seja, existe uma reta que contém esses pontos. Logo, o gráfico da função afim é uma reta não vertical e, para defini-la, basta determinar dois de seus pontos, distintos entre si.



Sergio Lima/ID/BR

Função crescente e função decrescente

No capítulo **2** estudamos o conceito de função crescente e de função decrescente. Aplicando esse conhecimento ao estudo da função afim, podemos dizer que uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é:

- **crescente**, se para todo x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$;
- **decrescente**, se para todo x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

Vamos analisar as funções afins cujas leis de formação são $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = -x + 3$.

Como o gráfico de uma função afim é uma reta, podemos tomar apenas dois elementos desse domínio para verificar se a função é crescente ou decrescente.

Exemplos

a) $f(x) = 3x + 1$

Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $x_1 < x_2$, segue que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 + 1 < 3x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Assim, a função afim dada por $f(x) = 3x + 1$ é crescente.

b) $g(x) = -x + 3$

Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $x_1 < x_2$, segue que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_1 + 3 > -x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Assim, a função afim dada por $g(x) = -x + 3$ é decrescente.

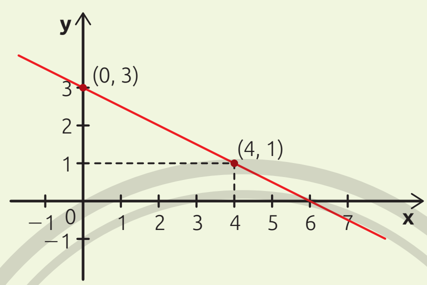
R1. Esboce o gráfico da função afim definida por $f(x) = -\dfrac{x}{2} + 3$.

Resolução

Como f é uma função afim, seu gráfico é uma reta não vertical determinada por dois pontos. Com isso, escolhemos dois elementos distintos do domínio de f e calculamos $f(x)$ correspondente, obtendo assim as coordenadas (x, y) de dois pontos.

x	$y = f(x) = -\dfrac{x}{2} + 3$	(x, y)
0	$f(0) = -\dfrac{0}{2} + 3 = 3$	$(0, 3)$
4	$f(4) = -\dfrac{4}{2} + 3 = 1$	$(4, 1)$

Indicando as coordenadas $(0, 3)$ e $(4, 1)$ no plano cartesiano, traçamos uma reta que passa por esses pontos e obtemos um esboço do gráfico da função f.



Sergio Lima/ID/BR

Atividades

1. Entre as leis de formação apresentadas a seguir, determine quais não são de função afim. Justifique.

I) $f(x) = 2x - 5 - 4x$

II) $g(x) = x(x - 3) - 1$

III) $h(x) = \dfrac{5}{x} - 2x + 1$

IV) $p(x) = 5(5 - x) + 2x$

Agora, para os casos de função afim que você identificou:

a) esboce no caderno a sua representação gráfica;

b) classifique-as em crescente ou decrescente.

2. Escreva a lei de formação da função:

a) $q: [0, 2\,000] \to [0, 10\,000]$ que determina a quantidade $q(t)$ de água em um reservatório inicialmente com 10 000 L, em função do tempo t, em minutos, sabendo que são retirados, de maneira constante, 5 L por minuto, até esvaziar completamente.

b) $p: [0, 500] \to [0, 1625]$ que determina o preço $p(q)$ de uma quantidade q, em quilograma, de batata vendida por R$ 3,25 o quilograma.

c) $c: [0, 300] \to [0, 3\,660]$ que determina o custo $c(m)$ da produção de m metros quadrados de um tecido com custo fixo de R$ 60,00 mais um custo variável de R$ 12,00 por metro quadrado produzido.

3. Um automóvel se encontrava inicialmente parado em um semáforo. No instante em que o semáforo abriu, esse automóvel iniciou um movimento uniformemente acelerado. A cada segundo, sua velocidade aumentava em 1,6 m/s.

a) Escreva a lei de formação da função v que expressa a velocidade do automóvel, em m/s, no instante t, em segundos, durante o movimento uniformemente acelerado.

b) Sabendo que o movimento uniformemente acelerado durou 12 segundos, qual deve ser o domínio da função v?

c) Se o automóvel mantivesse a mesma aceleração desse movimento, em quantos segundos após abrir o semáforo o automóvel poderia atingir a velocidade de 60 km/h?

4. Em determinada cidade, o valor da bandeirada em uma corrida de táxi é R$ 4,50 na bandeira **1**, e o valor do quilômetro percorrido é R$ 2,75.

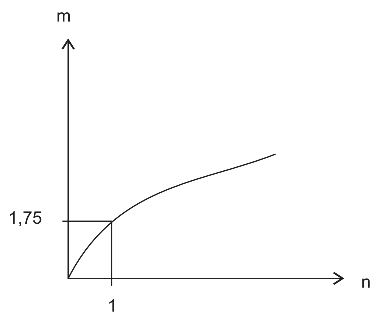
a) Qual é o preço de uma corrida de 6 km na bandeira **1**? E de uma corrida de 10 km?

b) Escreva no caderno a lei de formação de uma função $p: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ para determinar o preço de uma corrida de táxi nessa cidade na bandeira **1**, de acordo com a quantidade q de quilômetros percorridos.

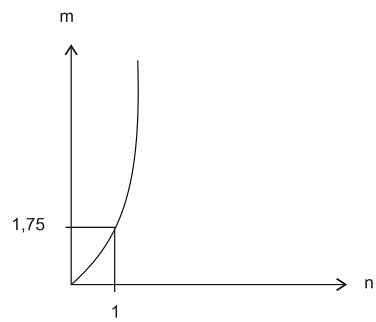
5. (Enem/Inep) As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma.

Dos gráficos a seguir, o que representa o preço *m* pago em reais pela compra de *n* quilogramas desse produto é:

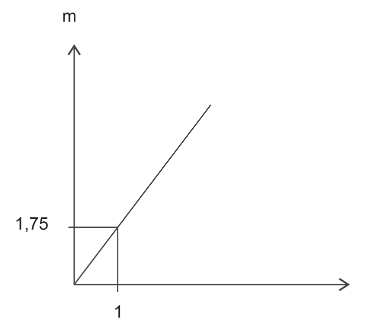
a)



c)

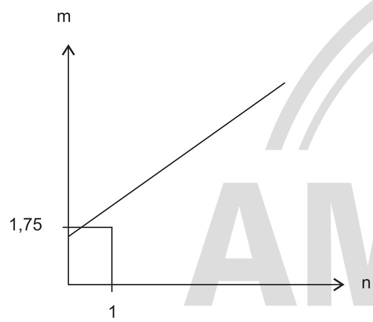


e)

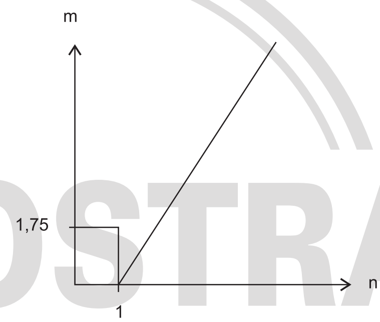


Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

b)



d)



6. O prefeito de determinada cidade abriu uma licitação para construção de ciclovias, na qual duas empresas se candidataram para fazer o serviço.

Licitação: escolha, por concorrência, de uma fornecedora de materiais e/ou serviços para órgãos públicos, de acordo com edital publicado.

A empresa **A** cobrou um valor fixo de R$ 800 000,00 mais R$ 220 000,00 por quilômetro construído. A empresa **B** cobrou um valor fixo de R$ 400 000,00 mais R$ 240 000,00 por quilômetro construído.

a) Escreva uma expressão para calcular o orçamento de cada uma das empresas para construir *x* quilômetros de ciclovias.

b) Calcule o valor cobrado por empresa para a construção de:
- 10 km de ciclovia
- 70 km de ciclovia
- 5 km de ciclovia

c) Para quantos quilômetros de ciclovia construída o valor cobrado pelas empresas será o mesmo? Qual seria o valor?

d) Considerando o aspecto econômico e sabendo que a qualidade dos serviços prestados pelas empresas é a mesma, verifique qual delas deveria ser contratada pela prefeitura para a construção de 50 km de ciclovia. Justifique.

7. Em um dos planos de locação de carros, o cliente paga R$ 500,00 por sete dias, sem taxa adicional até 700 km rodados. Caso ultrapasse essa quilometragem, é cobrado mais R$ 0,35 por quilômetro excedido, até completar o excedente de 2 000 km.

a) Escreva a lei de formação da função $v: [0, 2000] \to \mathbb{R}$ que determina o valor $v(q)$ de uma locação semanal em função da quantidade *q* de quilômetros excedentes aos 700 km.

b) Quanto um cliente paga pelo aluguel semanal do carro se ele exceder os 700 km em:
- 70 km?
- 10 km?
- 150 km?
- 65 km?

Não escreva no livro.

Coeficientes da função afim

A seguir, vamos verificar algumas características do gráfico da função afim levando-se em consideração os coeficientes *a* e *b*.

a Em uma função afim, o coeficiente *a* é chamado **taxa de variação** e o coeficiente *b*, **coeficiente linear**.

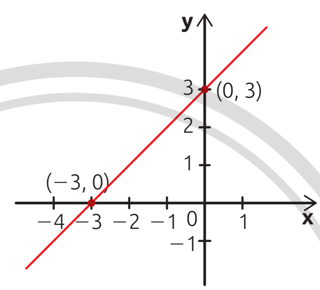
$$f(x) = \underbrace{a}_{\text{taxa de variação}}x + \overbrace{b}^{\text{coeficiente linear}}$$

b Quando o coeficiente *a* é positivo $(a > 0)$, a função afim é **crescente**.

Exemplo

$f(x) = x + 3$

x	$f(x) = x + 3$	(x, y)
-3	$f(-3) = -3 + 3 = 0$	$(-3, 0)$
0	$f(0) = 0 + 3 = 3$	$(0, 3)$



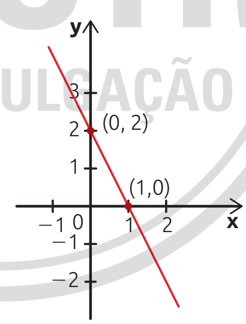
Se $a > 0$, o gráfico de f é uma reta ascendente quando se observa da esquerda para a direita.

c Quando o coeficiente *a* é negativo $(a < 0)$, a função afim é **decrescente**.

Exemplo

$f(x) = -2x + 2$

x	$f(x) = -2x + 2$	(x, y)
0	$f(0) = -2 \cdot 0 + 2 = 2$	$(0, 2)$
1	$f(1) = -2 \cdot 1 + 2 = 0$	$(1, 0)$



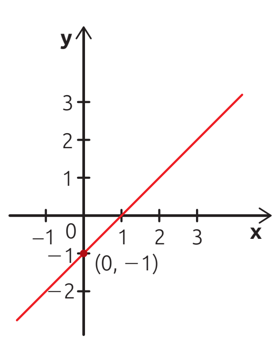
Se $a < 0$, o gráfico de f é uma reta descendente quando se observa da esquerda para a direita.

d O gráfico de uma função afim intersecta o eixo *Oy* no ponto de coordenadas $(0, b)$.

De fato, em uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, se $x = 0$, então $f(0) = a \cdot 0 + b = b$.

Exemplos

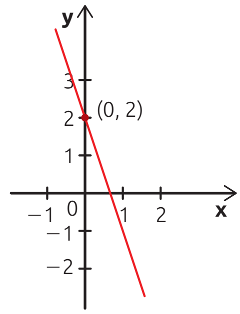
a) $f(x) = x - 1$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

O gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x - 1$ intersecta o eixo *Oy* no ponto de coordenadas $(0, -1)$, pois $f(0) = -1$.

b) $g(x) = -3x + 2$



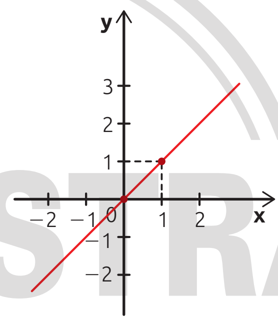
O gráfico da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = -3x + 2$ intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 2)$, pois $g(0) = 2$.

e A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é chamada **função identidade**.

A função identidade é um caso particular de função afim, pois pode ser representada na forma $f(x) = ax + b$ com $a = 1$ e $b = 0$.

$\boxed{f(x) = x}$

x	$f(x) = x$	(x, y)
0	$f(0) = 0$	$(0, 0)$
1	$f(1) = 1$	$(1, 1)$



A função identidade é crescente $(a > 0)$ e seu gráfico intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 0)$.

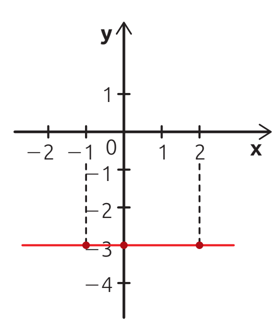
f A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é chamada **função constante**.

A função constante é outro caso particular de função afim, pois pode ser representada na forma $f(x) = ax + b$ com $a = 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

Exemplo

$\boxed{f(x) = -3}$

x	$f(x) = -3$	(x, y)
-1	$f(-1) = -3$	$(-1, -3)$
2	$f(2) = -3$	$(2, -3)$



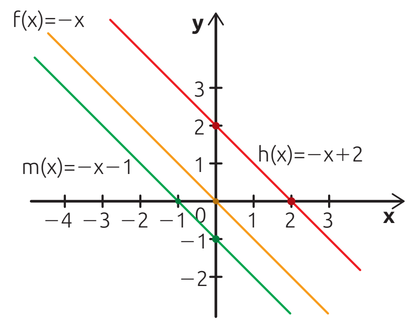
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo Ox e que intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, b)$.

g Para efetuar a **translação** vertical do gráfico de uma função afim, basta adicionar à função uma constante real diferente de zero. Sendo a constante positiva, o gráfico é transladado para cima. Se a constante for negativa, o gráfico é transladado para baixo. Veja, a seguir, o exemplo da função afim dada por $f(x) = -x$.

O gráfico da função h resultou de uma translação de 2 unidades para cima em relação ao gráfico da função f. Neste caso, adicionamos à função f uma constante de valor positivo (2), obtendo o gráfico da função h.

Para cada valor de x, a ordenada $h(x) = -x + 2$ é obtida adicionando-se 2 unidades à ordenada $f(x) = -x$. Isto significa que para cada ponto do gráfico de f corresponde um ponto do gráfico de h, obtido ao deslocar o primeiro 2 unidades para cima.



De modo semelhante, obtém-se o gráfico de m a partir do gráfico de f, deslocando este último 1 unidade para baixo.

Zero da função afim

Vimos no capítulo **2** que o zero de uma função f é todo valor de $x \in D(f)$ tal que $f(x) = 0$. No caso da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, para determinar o seu zero basta determinar o valor x tal que $f(x) = ax + b = 0$, ou seja, é necessário resolver a equação $ax + b = 0$.

Geometricamente, o zero da função afim é a abscissa do ponto em que o gráfico dessa função intersecta o eixo Ox.

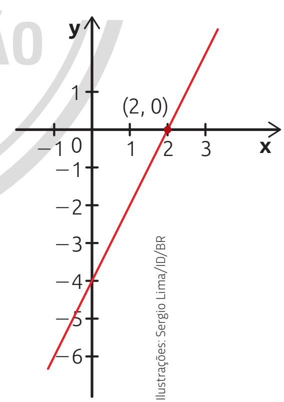
Veja como determinar, algebricamente e geometricamente, o zero da função afim dada por $f(x) = 2x - 4$.

- Resolvendo a equação $2x - 4 = 0$, temos:

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$$

Logo o zero desta função afim é 2.

- O gráfico intersecta o eixo Ox no ponto de coordenadas $(2, 0)$. Logo o zero desta função é a abscissa do ponto de coordenadas $(2, 0)$, ou seja, 2.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

R2. Em certa cidade, a tarifa mensal de água nas residências é estabelecida de acordo com a faixa de consumo. Observe a seguir.

Faixa de consumo	Valor cobrado
de 0 m³ até 10 m³	R$ 32,00 por mês
acima de 10 m³ até 40 m³	R$ 3,80 por m³
acima de 40 m³	R$ 6,10 por m³

a) Escreva a lei de formação da função $v: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ que associa o valor cobrado $(v(x))$, em reais, ao consumo mensal de água (x), em metros cúbicos.

b) Determine o maior intervalo do domínio em que a função v é constante.

Atividades resolvidas

Resolução

a) De acordo com o quadro, a tarifa de água é cobrada conforme três faixas de consumo. Logo a função que associa o valor cobrado ($v(x)$) ao consumo de água (x) é definida por mais de uma sentença.

- Para x de 0 m^3 até 10 m^3, o valor cobrado é igual a R$ 32,00, ou seja, se $0 \leqslant x \leqslant 10$ temos $v(x) = 32$.
- Para x acima de 10 m^3 até 40 m^3 podemos construir um quadro relacionando o valor cobrado ao consumo de água mensal.

Logo se $10 < x \leqslant 40$, temos $v(x) = 3{,}8x$.

Consumo de água (m^3)	Valor cobrado (R$)
11	$11 \cdot 3{,}80 = 41{,}80$
12	$12 \cdot 3{,}80 = 45{,}60$
13	$13 \cdot 3{,}80 = 49{,}40$
$\vdots$	$\vdots$
x	$x \cdot 3{,}80 = 3{,}8x$

- Para x acima de 40 m^3 também podemos construir um quadro relacionando o valor cobrado ao consumo de água mensal.

Logo se $x > 40$, temos $v(x) = 6{,}1x$.

Portanto, a função $v: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é dada por

$$v(x) = \begin{cases} 32; \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 3{,}8x; \text{ se } 10 < x \leqslant 40 \\ 6{,}1x; \text{ se } x > 40 \end{cases}$$

Consumo de água (m^3)	Valor cobrado (R$)
41	$41 \cdot 6{,}10 = 250{,}10$
42	$42 \cdot 6{,}10 = 256{,}20$
43	$43 \cdot 6{,}10 = 262{,}30$
$\vdots$	$\vdots$
x	$x \cdot 6{,}10 = 6{,}1x$

b) A função constante possui lei de formação do tipo $f(x) = b$, com $b \in \mathbb{R}$. A única sentença da função v correspondente a uma função constante está definida para $0 \leqslant x \leqslant 10$. Portanto, o maior intervalo do domínio em que a função v é constante é $[0, 10]$.

Atividades

8. Classifique em crescente, decrescente ou constante a função afim definida por:

a) $f(x) = 4x + 2$ b) $g(x) = 20$ c) $h(x) = -x + 5$ d) $m(x) = 12 - 5x$

9. Em cada item, determine o zero da função afim e a ordenada do ponto em que seu gráfico intersecta o eixo Oy sabendo que a função é definida por:

a) $f(x) = x + 3$ b) $g(x) = -5x + 1$ c) $h(x) = \dfrac{2x}{3} - 8$ d) $m(x) = 12 - 2x$

10. Considere a função $f: [-3, 8] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ 4, \text{ se } 0 < x \leqslant 4 \\ 12 - 2x, \text{ se } 4 < x \leqslant 8 \end{cases}$$

a) Em uma malha quadriculada esboce o gráfico da função f.

b) Em quais pontos o gráfico da função f intersecta o eixo Ox? E em qual ponto o gráfico intersecta o eixo Oy?

c) Determine no caderno intervalos do domínio em que a função f é:

- crescente;
- decrescente;
- constante.

11. No dia 22 de julho de 2015, a cotação, em reais, de fechamento do dólar americano no Brasil para compra foi 3,2094 e para venda, 3,2088.

a) Escreva no caderno a lei de formação de uma função $c: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que expresse o valor em reais, nesse dia, de uma quantia x de dólares americanos para:

- compra;
- venda.

b) As funções que você escreveu no item **a** são crescentes ou são decrescentes? Justifique.

12. Desafio Considere as funções afins $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que $f(4) = g(4)$. Sabendo que f é crescente e g é decrescente, podemos afirmar que o coeficiente linear de f é menor do que o coeficiente linear de g? Justifique.

13. Durante o tempo em que está empregado, todo trabalhador com registro em carteira contribui com o INSS (Instituto Nacional do Seguro Social) com uma porcentagem do seu salário. O INSS utiliza essas contribuições para o pagamento de aposentadoria, entre outros benefícios. Observe a tabela de contribuição.

Porcentagem do salário destinada à contribuição para o INSS válida em 1º de janeiro de 2015

Salário do contribuinte	Porcentagem
até R$ 1 399,12	8
de R$ 1 399,13 até R$ 2 331,88	9
de R$ 2 331,89 até R$ 4 663,75	11

Fonte de pesquisa: Ministério da Previdência Social. Disponível em: <www.previdencia.gov.br/servicos-ao-cidadao/todos-os-servicos/gps/tabela-contribuicao-mensal>. Acesso em: 18 ago. 2015.

Para salários maiores do que R$ 4 663,75 o valor da contribuição mensal é fixo e corresponde a R$ 513,01.

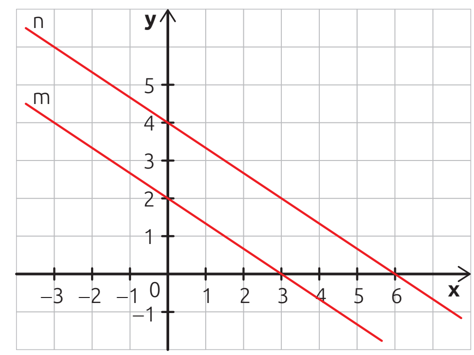
De acordo com os dados apresentados, resolva no caderno as questões a seguir.

a) Escreva a lei de formação de uma função que expresse o valor, em reais, da contribuição mensal com o INSS, em função do salário do contribuinte.

b) Determine o valor da contribuição ao INSS de um trabalhador cujo salário é:

- R$ 1 550,89
- R$ 3 340,56
- R$ 890,13
- R$ 6 133,03

14. Em um plano cartesiano foi representado o gráfico da função $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $m(x) = -\frac{2}{3}x + 2$. Em seguida representou-se o gráfico da função $n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ obtido por meio da translação do gráfico de m.



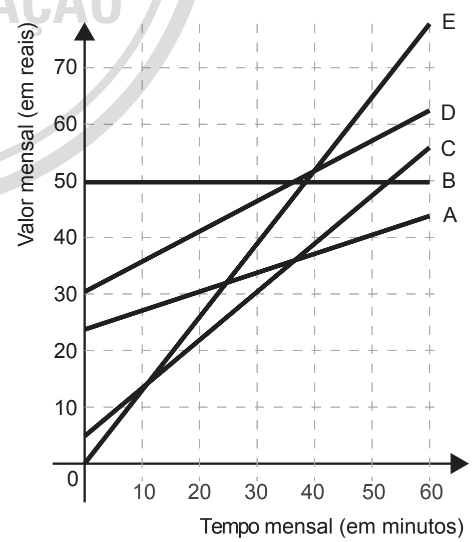
Sergio Lima/ID/BR

a) Determine no caderno a lei de formação da função n.

b) Qual é a lei de formação da função $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é uma translação de 3 unidades para baixo em relação ao gráfico da função m?

15. (Enem/Inep) No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular.

Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



Sergio Lima/ID/BR

Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês com telefone.

Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

a) A   b) B   c) C   d) D   e) E

Proporcionalidade e função linear

A seguir, vamos ampliar o estudo da função afim relacionando-a com a noção de proporcionalidade direta.

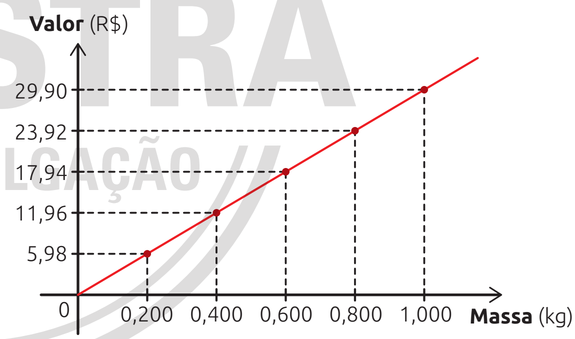
Em muitas cidades existem restaurantes que vendem refeições cujo preço varia em função da massa de comida colocada no prato. Funciona da seguinte maneira: o cliente monta seu prato escolhendo entre as diversas opções de alimentos, depois verifica a massa, em quilogramas, dessa porção de comida. Assim, o valor a ser pago, em reais, é proporcional à massa, em quilogramas.

Comer fora de casa pode ser um desafio para quem deseja manter uma alimentação saudável. Pensando nisso, muitos restaurantes oferecem, para escolha do cliente, opções saborosas que atendem as necessidades nutricionais diárias.

Fotomontagem de Eduardo dos Santos criada com as fotografias Titanchik, svry e Alexander Bark/Shutterstock.com/ID/BR

A imagem da balança mostra que o preço (em R$) do quilograma custa R$ 29,90. Como a massa de alimento no prato é 0,400 kg, o valor a ser pago é R$ 11,96. Com essas informações, podemos construir um quadro com outros valores para a massa (m) a fim de obter os valores a serem pagos ($v(m)$) e depois representar essa situação por meio de um gráfico.

massa (kg)	valor a ser pago (R$)
0,200	$29{,}90 \cdot 0{,}200 = 5{,}98$
0,400	$29{,}90 \cdot 0{,}400 = 11{,}96$
0,600	$29{,}90 \cdot 0{,}600 = 17{,}94$
0,800	$29{,}90 \cdot 0{,}800 = 23{,}92$
⋮	⋮
m	$29{,}90 \cdot m = 29{,}9\ m$



Sergio Lima/ID/BR

A situação acima foi representada por meio de uma função v cujo domínio são os números reais não negativos m e cuja lei de formação é $v(m) = 29{,}9\ m$. Nesse caso, é necessário restringir o domínio, pois não faz sentido atribuir valores negativos para a massa.

Seja $a \in \mathbb{R}$. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é chamada **função linear**. A função linear é um caso particular de função afim.

A função linear é o modelo matemático para situações que envolvem proporcionalidade. Uma proporcionalidade direta, o que chamaremos apenas de **proporcionalidade**, é uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(cx) = c \cdot f(x)$, para todo x e c reais.

Se $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo x e c reais, então podemos escrever $a = f(1)$ e assim obter $f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) = c \cdot a$, ou seja, $f(c) = ac$ para todo c real. Utilizando a notação de função linear apresentada anteriormente, temos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

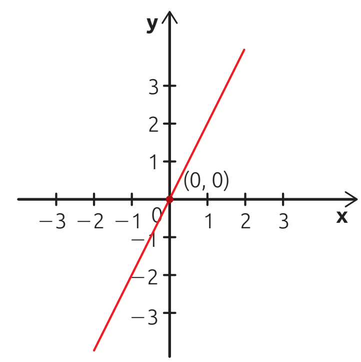
Voltando ao caso dos restaurantes da página anterior, a função dada por $v(m) = 29{,}9 \cdot m$ é da forma $f(x) = ax$.

Como o valor a ser pago é proporcional à massa de comida, podemos determinar a constante de proporcionalidade:

$$\frac{5{,}98}{0{,}200} = \frac{11{,}96}{0{,}400} = \frac{17{,}94}{0{,}600} = \frac{23{,}92}{0{,}800} = \underbrace{29{,}90}_{\text{constante de proporcionalidade}}$$

Comparando a função dada por $v(m) = 29{,}9 \cdot m$ e a função linear dada por $f(x) = ax$ verificamos que a constante de proporcionalidade equivale numericamente à constante a da função linear, ou seja, à taxa de variação da função afim.

O gráfico da função afim é uma reta que intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, b)$. Como a função linear é um caso particular de função afim na forma $f(x) = ax + b$, com $b = 0$, obtemos $f(0) = a \cdot 0 + 0 = 0$. Logo o gráfico dessa função intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 0)$, ou seja, na origem do plano cartesiano.



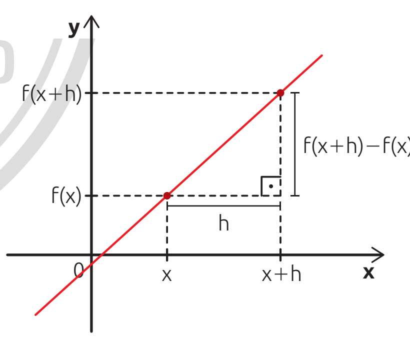
Taxa de variação

De modo geral, dados x e $(x + h)$ números reais e com $h \neq 0$, determinamos a **taxa de variação** de uma função f no intervalo de extremos x e $(x + h)$ como $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$. No caso específico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, a taxa de variação é a constante a.

De fato, a taxa de variação da função afim é dada por:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{a \cdot (x + h) + b - (ax + b)}{h} =$$

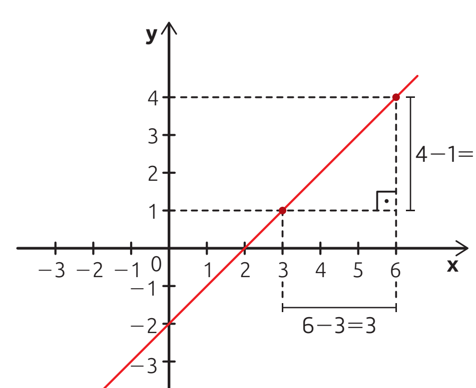
$$= \frac{\cancel{ax} + ah \cancel{+ b} \cancel{- ax} \cancel{- b}}{h} = \frac{ah}{h} = a$$



Logo $\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = a$.

Podemos calcular a taxa de variação de uma função afim f conhecendo dois pontos distintos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ de seu gráfico. Observe como determinar a taxa de variação de uma função afim dados $f(3) = 1$ e $f(6) = 4$.

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = \frac{4 - 1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$



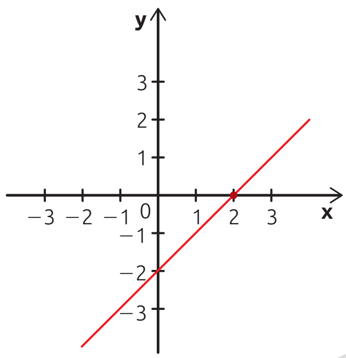
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Estudo do sinal da função afim

Estudar o sinal de uma função f significa determinar os valores reais de x para os quais $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$.

Exemplos

a) $f(x) = x - 2$



- Se $f(x) = 0$, temos:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

- Se $f(x) > 0$, temos:

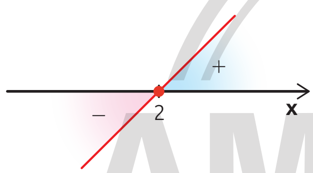
$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

- Se $f(x) < 0$, temos:

$$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$$

Como a taxa de variação dessa função é positiva $(a = 1 > 0)$, a função é crescente.

Esquematicamente, podemos representar o estudo do sinal dessa função afim crescente da seguinte maneira:

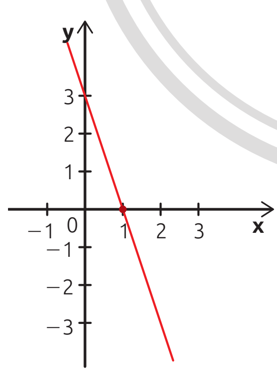


No esquema ao lado, o sinal + indica imagens positivas e o sinal − indica imagens negativas.

Em resumo, para a função f tal que $f(x) = x - 2$, temos:

$$x < 2 \Rightarrow f(x) < 0$$
$$x = 2 \Rightarrow f(x) = 0$$
$$x > 2 \Rightarrow f(x) > 0$$

b) $g(x) = -3x + 3$



- Se $g(x) = 0$, temos:

$$-3x + 3 = 0 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

- Se $g(x) > 0$, temos:

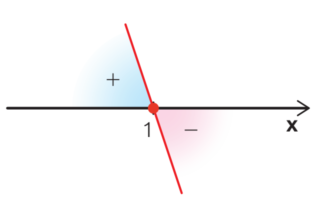
$$-3x + 3 > 0 \Rightarrow -3x > -3 \Rightarrow x < 1$$

- Se $g(x) < 0$, temos:

$$-3x + 3 < 0 \Rightarrow -3x < -3 \Rightarrow x > 1$$

Como a taxa de variação dessa função é negativa $(a = -3 < 0)$, a função é decrescente.

Esquematicamente, podemos representar o estudo do sinal dessa função afim decrescente da seguinte maneira:



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

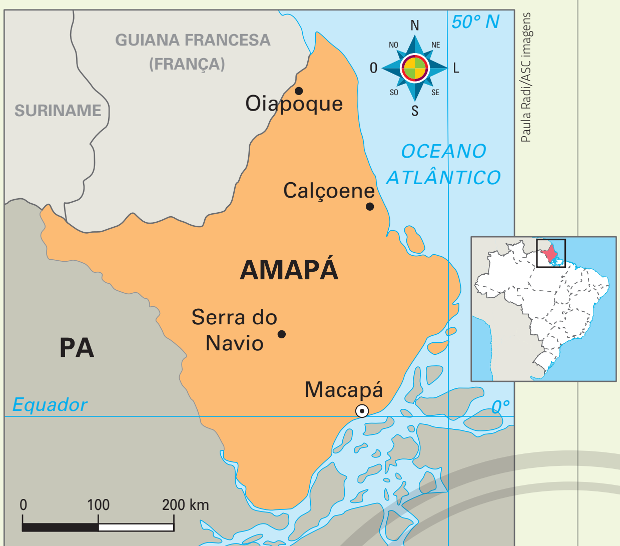
No esquema ao lado, o sinal + indica imagens positivas e o sinal − indica imagens negativas.

Em resumo, para a função g tal que $g(x) = -3x + 3$, temos:

$$x < 1 \Rightarrow g(x) > 0$$
$$x = 1 \Rightarrow g(x) = 0$$
$$x > 1 \Rightarrow g(x) < 0$$

R3. Observe o mapa do estado do Amapá localizado na região Norte do Brasil.

Mapa do estado do Amapá - 2011



Fonte de pesquisa: ATLAS geográfico escolar. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

Em um mapa é possível medir a distância, em cm, entre duas cidades para obter a distância real em linha reta, em km, a partir da escala indicada nele.

a) Escreva uma função que determine a distância real em linha reta ($R(d)$), em km, entre duas localidades conforme a distância d medida no mapa, em cm.

b) Qual a constante de proporcionalidade da função escrita no item anterior?

Resolução

a) Pela escala do mapa, sabemos que 1 cm corresponde a 100 km, portanto, para obter a função R, construímos um quadro relacionando a distância real à distância indicada no mapa.

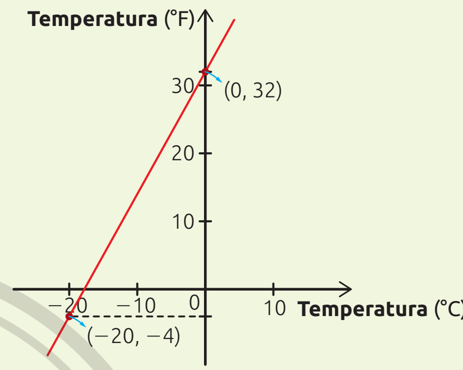
Distância no mapa (cm)	Distância real (km)
1	$1 \cdot 100 = 100$
2	$2 \cdot 100 = 200$
3	$3 \cdot 100 = 300$
$\vdots$	$\vdots$
d	$d \cdot 100 = 100d$

Observe que o domínio e a imagem da função R são os reais não negativos.

Portanto, a função $R\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é definida por $R(d) = 100d$.

b) Como a constante de proporcionalidade corresponde ao coeficiente a da função linear, então a constante de proporcionalidade da função dada por $R(d) = 100d$ é igual a 100.

R4. O gráfico a seguir apresenta a função $T\colon A \to \mathbb{R}$, com $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -273{,}15\}$, que relaciona as escalas de medidas de temperatura Celsius (°C) e Fahrenheit (°F).



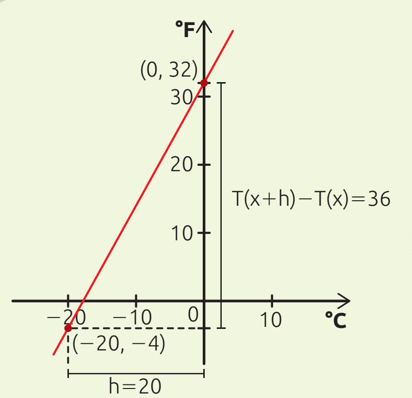
Determine a taxa de variação da função T.

Resolução

Dado o gráfico que representa a função T e dois pontos distintos pertencentes a ela, determinamos a taxa de variação de T por meio da expressão $\dfrac{T(x+h) - T(x)}{h}$, com x e $(x+h)$ em A e $h \neq 0$.

Tomando os pontos $(-20, -4)$ e $(0, 32)$ indicados no gráfico, temos:

- $h = 0 - (-20) = 20$
- $T(x+h) - T(x) = 32 - (-4) = 36$



Portanto, a taxa de variação da função T é dada por:

$$\frac{T(x+h) - T(x)}{h} = \frac{36}{20} = \frac{9}{5}$$

Atividades

16. O lixo eletrônico refere-se a todo resíduo material produzido a partir do descarte de equipamentos eletrônicos que não pode ser reaproveitado, como computadores, telefones celulares, *notebooks* e câmeras digitais. No entanto, isso tem gerado um grande problema ambiental quando não é descartado em locais adequados.


Ernesto Reghran/Pulsar Imagens

Lixo eletrônico encaminhado a uma organização não governamental de reciclagem em Londrina (PR), em 2015.

a) O quadro apresenta a quantidade média de lixo eletrônico produzido anualmente no Brasil em função da quantidade de pessoas, supondo que uma pessoa produza, em média, 2,6 kg de lixo eletrônico por ano.

Quantidade de pessoas	Lixo eletrônico produzido anualmente (kg)
10	26
20	52
30	78
40	104
50	130
60	156
⋮	⋮

Segundo o IBGE, a projeção da população brasileira em 23 de julho de 2015 era de 204 566 288 pessoas. De acordo com essas informações, quantas toneladas de lixo eletrônico seriam produzidas anualmente por essa população?

b) A relação entre a quantidade de pessoas e a quantidade média de lixo eletrônico produzido, representada no quadro, é uma relação de proporcionalidade? Justifique.

c) Qual é a constante de proporcionalidade entre as grandezas quantidade de pessoas e quantidade média de lixo eletrônico nesse caso?

17. Camila passou a economizar mensalmente R$ 150,00 de seu salário, a partir do mês de seu aniversário, para uma viagem que custará R$ 1800,00.

a) Qual é a lei de formação da função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que relaciona o tempo x, em meses, com a quantia economizada $f(x)$, em reais?

b) Mantendo essa economia, em quantos meses Camila terá dinheiro suficiente para realizar essa viagem?

18. Escreva no caderno a taxa de variação da função afim definida por:

a) $y = 5x - 3$ b) $y = \frac{3}{5}x$ c) $y = 5$

19. Uma fábrica produz peças com um custo de R$ 6,50 por unidade produzida. De acordo com essas informações, escreva no caderno:

a) a lei de formação de uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que forneça o custo total de x peças;

b) o custo de 100 peças;

c) a taxa de variação da função f.

20. Estude o sinal de cada função afim definida a seguir.

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = x + 2$

c) $f(x) = -2x - 8$

d) $f(x) = \frac{x}{3} + 2$

21. Dada a função afim definida por $f(x) = 4x + 16$, determine o que se pede.

a) A função f é crescente ou decrescente? Justifique.

b) Calcule o zero da função f.

c) Esboce o gráfico da função f.

d) Faça o estudo do sinal da função f.

Dignidade no trabalho

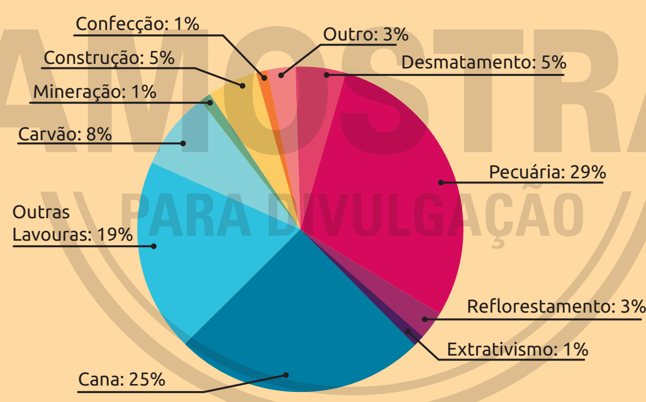
Não raramente, vemos em noticiários que marcas famosas de confecção contratam pessoas para trabalharem em condições precárias, caracterizando, muitas vezes, uma forma de trabalho escravo.

Em 2015, uma campanha realizada na principal praça de Berlim, Alemanha, sensibilizou as pessoas instalando uma máquina com camisetas à venda por apenas 2 euros, aproximadamente R$ 6,40 na cotação do dia, 28 de abril. Ao selecionar o tamanho da peça, o comprador assistia a um vídeo sobre os trabalhadores que as confeccionaram. O filme mostrava a dura realidade de mulheres e crianças em longas jornadas de trabalho diário, 16 h, a um valor de 13 centavos de euro por hora.

Euro: unidade monetária de 19 países da União Europeia.

No Brasil, os aspectos que caracterizam "trabalho análogo ao de escravo" são: trabalho forçado; jornada exaustiva; condições degradantes; e restrição de locomoção em razão de dívida. Esse tipo de exploração no país geralmente se encontra em atividades econômicas desenvolvidas no setor rural, como a pecuária e em lavouras.

Trabalhadores libertados no Brasil de 2003 a 2014 – por atividade



Poliana F. G./ASC imagens

Fonte de pesquisa: Escravo, nem pensar! Disponível em: <www.escravonempensar.org.br/sobre-o-projeto/o-trabalho-escravo-no-brasil>. Acesso em: 6 ago. 2015.

A Discuta com o professor e os colegas ações que podem ser adotadas pelos governos e pelas comunidades para combater o trabalho análogo ao de escravo.

B Nas lavouras de cana foram libertados 11 007 trabalhadores de 2003 a 2014. A quantidade total de trabalhadores libertados nesse período é maior ou menor do que 40 000? Justifique.

C Sobre a produção das camisetas, escreva a lei de formação de uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ do salário, em euros, de um trabalhador em função da quantidade x de horas trabalhadas. Considerando a jornada diária de 16 h, que valor ele receberia por 30 dias? Qual a sua opinião a respeito dessa quantia?

Fotomontagem de Maryane Silva criada com as fotografias BEAUTYofLIFE/Shutterstock.com/ID/BR e Andrey_Kuzmin/Shutterstock.com/ID/BR

Sistema de inequações do 1º grau com uma incógnita

Para resolver um sistema de inequações do 1º grau com uma incógnita, determinamos o conjunto solução de cada uma das inequações e em seguida fazemos a intersecção desses conjuntos.

Observe o exemplo a seguir, sendo $x \in \mathbb{R}$.

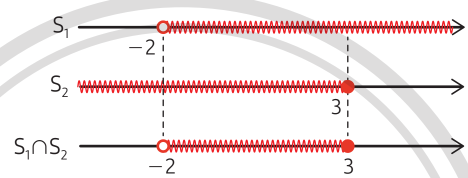
$$\begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ 3x - 9 \leqslant 0 \end{cases}$$

$2x + 4 > 0 \Rightarrow 2x > -4 \Rightarrow x > -\dfrac{4}{2} \Rightarrow x > -2$ $\qquad S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

$3x - 9 \leqslant 0 \Rightarrow 3x \leqslant 9 \Rightarrow x \leqslant \dfrac{9}{3} \Rightarrow x \leqslant 3$ $\qquad S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

O conjunto solução do sistema é dado por $S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant 3\}$.

Representando essa situação por meio de um esquema, temos:



Sergio Lima/ID/BR

Função e juro simples

Capital: valor investido inicialmente.

Juro: remuneração sobre o valor investido.

Montante: resultado do investimento, dado pela soma do capital com o juro.

Em algumas situações financeiras envolvendo juro pode-se utilizar o regime de **juro simples**, em que a taxa é aplicada sobre o capital inicial. A expressão que descreve o montante de uma aplicação no regime de juro simples pode ser representada na forma $f(x) = ax + b$.

Supondo que uma pessoa invista R$ 5 000,00 em uma instituição financeira, a uma taxa de juro simples de 2% ao mês, podemos determinar o montante obtido após 4 meses da seguinte maneira:

- primeiro mês

$$5\,000 + \overbrace{0{,}02 \cdot 5\,000}^{\text{2\% de 5 000}} = 5\,100$$

> Como 2% é equivalente a 0,02 e a $\dfrac{2}{100}$, para determinar 2% de 5 000 podemos efetuar, por exemplo, a multiplicação $0{,}02 \cdot 5\,000$.

Utilizando C para indicar o capital, i para a taxa de juro e M para o montante, obtemos o cálculo $M = C + i \cdot C$.

Portanto, o montante ao final do primeiro mês será R$ 5 100,00.

- segundo mês

$$5\,000 + 0{,}02 \cdot 5\,000 + 0{,}02 \cdot 5\,000 = 5\,200$$
$$M = C + i \cdot C + i \cdot C = C + i \cdot C \cdot 2$$

Portanto, o montante ao final do terceiro mês será R$ 5 200,00.

- terceiro mês

$$5\,000 + 0{,}02 \cdot 5\,000 + 0{,}02 \cdot 5\,000 + 0{,}02 \cdot 5\,000 = 5\,300$$
$$M = C + i \cdot C + i \cdot C + i \cdot C = C + i \cdot C \cdot 3$$

Portanto, o montante ao final do terceiro mês será R$ 5 300,00.

• quarto mês

$$5\,000 + 0{,}02 \cdot 5\,000 + 0{,}02 \cdot 5\,000 + 0{,}02 \cdot 5\,000 + 0{,}02 \cdot 5\,000 = 5\,400$$

$$M = C + i \cdot C + i \cdot C + i \cdot C + i \cdot C = C + i \cdot C \cdot 4$$

Portanto, o montante obtido após 4 meses será R$ 5 400,00.

Note que a cada período de tempo adicionamos ao capital uma parcela igual a $i \cdot C$. Ao final de t períodos de tempo, adicionamos ao capital a parcela $i \cdot C \cdot t$. E ao final de um período de tempo t qualquer o montante pode ser obtido por meio da expressão $M_t = C + i \cdot C \cdot t$. Assim, o cálculo do montante no regime de juro simples pode ser interpretado como uma função $M: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $M(t) = C + i \cdot C \cdot t$, sendo C e i números reais positivos.

Considerando a mesma situação do investimento de R$ 5 000,00 à taxa de juro simples de 2% ao mês, podemos determinar, por exemplo, o montante obtido após 10 meses utilizando a lei de formação $M(t) = 5\,000 + 0{,}02 \cdot 5\,000 \cdot t$. Assim:

$$M(10) = 5\,000 + 0{,}02 \cdot 5\,000 \cdot 10 = 6\,000$$

Portanto, o montante obtido após 10 meses será R$ 6 000,00.

R5. (Cefet-MG) O conjunto solução S, em $\mathbb{R}$, da inequação $-4 \cdot (2x - 1) \cdot \left(\frac{x}{3} - 1\right) > 0$ é:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 3\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

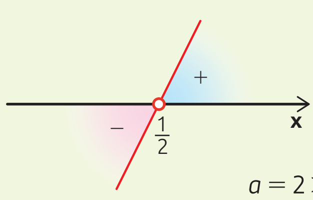
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3\right\}$

Resolução

A inequação $-4 \cdot (2x - 1) \cdot \left(\frac{x}{3} - 1\right) > 0$ é verdadeira se $(2x - 1) \cdot \left(\frac{x}{3} - 1\right) < 0$, pois o fator -4 é negativo. Logo precisamos verificar para quais valores de x o produto entre $(2x - 1)$ e $\left(\frac{x}{3} - 1\right)$ é menor do que zero. Para isso, vamos analisar os sinais de $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = \frac{x}{3} - 1$ separadamente.

• $f(x) = 2x - 1$

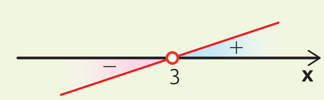
$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$



$a = 2 > 0$

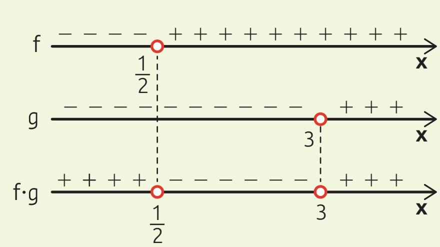
• $g(x) = \frac{x}{3} - 1$

$g(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} - 1 = 0 \Rightarrow x = 3$



$a = \frac{1}{3} > 0$

Observe no esquema os intervalos determinados pelos zeros de f e g em que os seus valores, assim como o produto $f(x) \cdot g(x)$ para cada x, são positivos ou negativos. Nesse caso, temos que $f(x) \cdot g(x) < 0$ para $\frac{1}{2} < x < 3$.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Então, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 3\right\}$. Portanto, a resposta correta é **b**.

Atividades resolvidas

R6. Determine o conjunto solução da inequação quociente $\frac{x+1}{x-1} \geqslant 0$, em $\mathbb{R}$.

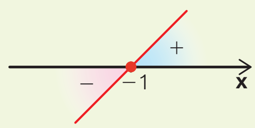
Resolução

A expressão $\frac{x+1}{x-1}$ está definida no conjunto dos números reais apenas quando $x - 1 \neq 0$, ou seja, quando $x \neq 1$.

Determinamos para quais valores de x teremos $\frac{x+1}{x-1} \geqslant 0$ analisando os sinais de $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x - 1$ separadamente.

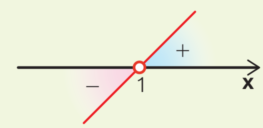
- $f(x) = x + 1$
  $f(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$a = 1 > 0$

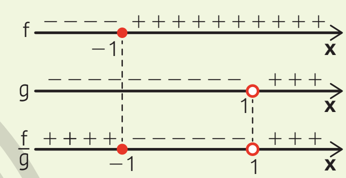


- $g(x) = x - 1$
  $g(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$a = 1 > 0$



Observe no esquema os intervalos determinados pelos zeros de f e g em que os seus valores, assim como o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ para cada $x \neq 1$, são positivos, negativos ou nulos.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Nesse caso, temos que $\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$ para $x \leqslant -1$ ou $x > 1$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x > 1\}$.

Atividades

22. Resolva no caderno os sistemas de inequações do 1º grau com $x \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} x + 4 > 0 \\ 5x - 25 \leqslant 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 5 \\ -x - 3 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 8 > 0 \\ x - 9 \leqslant 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -4x > x + 15 \\ 2(x + 9) < 3 - x \end{cases}$

23. Para resolver a inequação simultânea $0 \leqslant 2x - 1 < 7$, determinamos para quais valores de x ambas as inequações $2x - 1 \geqslant 0$ e $2x - 1 < 7$ são satisfeitas. Isso equivale a resolver o sistema de inequações $\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0 \\ 2x - 1 < 7 \end{cases}$.

Sabendo disso, resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações simultâneas.

a) $0 \leqslant 2x - 1 < 7$

b) $-1 \leqslant 3x - 4 \leqslant 5$

c) $x < -x + 2 < 5$

d) $x - 4 < 3x \leqslant 2x + 9$

24. (Unicamp-SP) Seja a um número real positivo e considere as funções afins $f(x) = ax + 3a$ e $g(x) = 9 - 2x$, definidas para todo número real x.

a) Encontre o número de soluções inteiras da inequação $f(x)g(x) > 0$.

b) Encontre o valor de a tal que $f(g(x)) = g(f(x))$.

25. Resolva no caderno as seguintes inequações em $\mathbb{R}$.

a) $(x + 3)(x - 4) \geqslant 0$

b) $\frac{2x - 3}{x + 2} < 0$

Observe as restrições do denominador.

c) $\frac{x + 3}{x - 5} < 2$

d) $\frac{(x + 4)(x + 1)}{x - 2} > 0$

26. Determine o montante de um investimento de R$ 1200,00 calculado a uma taxa de juro simples de:

a) 8% ao ano, por 3 anos.

b) 1% ao mês, por 5 meses.

c) 0,05% ao dia, por 45 dias.

27. Por quanto tempo deve-se investir um capital de R$ 892,00 a uma taxa de juro simples de 6% ao ano para obter o montante de R$ 1052,56?

28. Certo investimento de R$ 3 452,00 gerou um montante de R$ 5143,48 após 7 anos. Qual foi a taxa anual de juro simples?

Não escreva no livro.

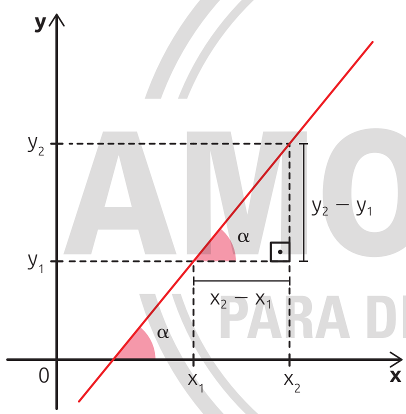
Estudo da reta

No estudo da função afim, vimos que seu gráfico é uma reta não vertical e que para defini-la basta conhecer dois pontos distintos entre seus infinitos pontos. Por outro lado, toda reta não vertical é o gráfico de uma função afim.

Dada uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de coeficientes reais a e b, podemos associá-la com a **equação reduzida da reta** r dada por $y = ax + b$. O coeficiente a, que no estudo da função afim é chamado taxa de variação, recebe o nome de **coeficiente angular** no estudo da reta, dado por:

$$\boxed{a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ com } x_1 \neq x_2}$$

O coeficiente angular está relacionado com a inclinação da reta, ou seja, com o ângulo que a reta forma com o eixo *Ox*, no sentido anti-horário. O coeficiente angular possui o mesmo valor numérico da tangente do ângulo que a reta forma com o eixo *Ox*.



Sergio Lima/ID/BR

Para o coeficiente angular ser igual à tangente do ângulo que a reta forma com o eixo *Ox*, é necessário os eixos *Ox* e *Oy* estarem graduados na mesma unidade, o que nem sempre acontece ao esboçar o gráfico de uma função.

$$\boxed{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\alpha, \text{ com } x_1 \neq x_2}$$

Utilizando a relação apresentada acima podemos determinar a equação reduzida da reta conhecendo o coeficiente angular e as coordenadas de um ponto pertencente a essa mesma reta.

Se uma reta de coeficiente angular a passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$, então, para qualquer ponto de coordenadas (x, y) pertencente a essa reta, temos:

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = a(x - x_0) \Rightarrow \boxed{y = y_0 + a(x - x_0)}$$

Exemplo

Para determinar a equação reduzida da reta cujo coeficiente angular é $a = 3$ e que contém o ponto P_0 de coordenadas $(5, 4)$, fazemos:

$$y = y_0 + a(x - x_0) \Rightarrow y = 4 + 3 \cdot (x - 5) \Rightarrow y = 4 + 3x - 15 \Rightarrow y = 3x - 11$$

Para esboçar essa reta no plano cartesiano, podemos determinar outro ponto pertencente a ela atribuindo um valor real qualquer para x e obtendo o valor correspondente para y.

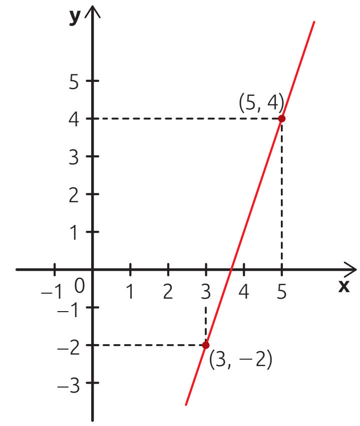
Para $x = 3$, temos:

$$y = 3x - 11$$

$$y = 3 \cdot 3 - 11$$

$$y = 9 - 11$$

$$y = -2$$



Sergio Lima/ID/BR

Logo o ponto de coordenadas $(3, -2)$ também pertence à reta dada por $y = 3x - 11$.

Também podemos determinar a equação reduzida de uma reta sabendo as coordenadas de dois de seus pontos.

Exemplo

Dados os pontos $A(1, 2)$ e $B(2, 5)$, substituímos os valores de x e y, obtendo duas equações lineares de incógnitas a e b, respectivamente o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta que queremos determinar.

Como a equação reduzida da reta é dada por $y = ax + b$, temos:

$$2 = a \cdot 1 + b \Rightarrow a + b = 2$$

Com as coordenadas do ponto A, substituímos x por 1 e y por 2.

$$5 = a \cdot 2 + b \Rightarrow 2a + b = 5$$

Com as coordenadas do ponto B, substituímos x por 2 e y por 5.

Em seguida, resolvemos o sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas dado por $\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$.

- Resolvendo pelo método da substituição, podemos isolar a incógnita a na primeira equação.

$$a + b = 2 \Rightarrow a = 2 - b$$

- Substituímos a por $2 - b$ na segunda equação e determinamos o valor de b.

$$2a + b = 5 \Rightarrow 2 \cdot (2 - b) + b = 5 \Rightarrow 4 - 2b + b = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -b = 5 - 4 \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1$$

- Determinamos o valor da incógnita a, que foi isolada na primeira equação.

$$a = 2 - b \Rightarrow a = 2 - (-1) \Rightarrow a = 2 + 1 \Rightarrow a = 3$$

Logo a equação reduzida dessa reta é dada por $y = 3x - 1$.

Representação gráfica de sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas

A resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas pode ser associada com a representação geométrica de retas no plano cartesiano, pois uma equação do 1º grau com duas incógnitas corresponde à equação de uma reta no plano. Observe as situações a seguir.

Situação 1: Veja como resolver o sistema de equações dado por $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$.

- Isolamos a incógnita y na primeira equação.

$$2x + y = 2 \Rightarrow y = -2x + 2$$

- Substituímos y por $-2x + 2$ na segunda equação e determinamos o valor de x.

$$x - 2y = 6 \Rightarrow x - 2 \cdot (-2x + 2) = 6 \Rightarrow x + 4x - 4 = 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x = 6 + 4 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

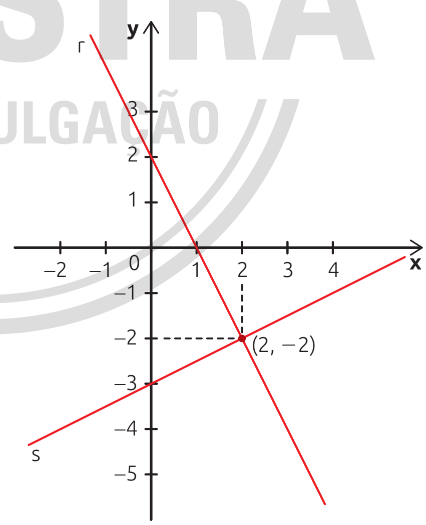
- Determinamos o valor da incógnita y, que foi isolada na primeira equação.

$$y = -2x + 2 \Rightarrow y = -2 \cdot 2 + 2 \Rightarrow y = -4 + 2 \Rightarrow y = -2$$

Logo a solução do sistema é o par ordenado $(2, -2)$. Como a solução é única, dizemos que esse sistema de equações é **possível e determinado** (SPD).

Escrevendo na forma de equação reduzida da reta as equações do sistema e representando essas retas no plano cartesiano, temos:

- Reta r: $2x + y = 2 \Rightarrow y = -2x + 2$
- Reta s: $x - 2y = 6 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 3$



Sergio Lima/ID/BR

O ponto em que as retas r e s se intersectam corresponde à única solução do sistema de equações apresentado. Dizemos que as retas r e s são concorrentes, ou seja, possuem apenas um ponto em comum, neste caso o ponto de coordenadas $(2, -2)$.

Situação 2: Vamos analisar agora o sistema de equações dado por $\begin{cases} -x + 2y = 5 \\ -4x + 8y = -4 \end{cases}$.

- Isolamos a incógnita x na primeira equação.

$$-x + 2y = 5 \Rightarrow x = 2y - 5$$

- Substituímos x por $2y - 5$ na segunda equação.

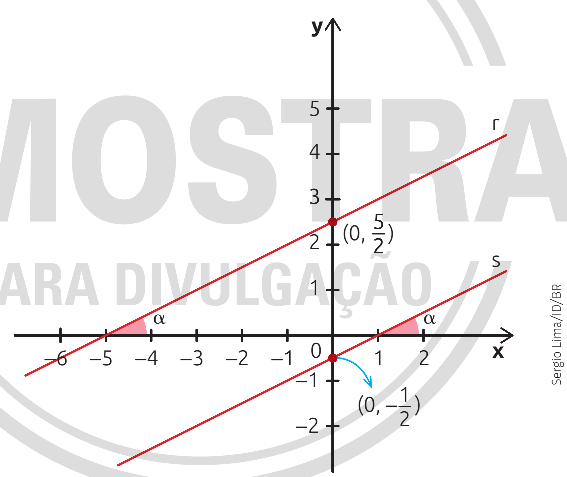
$$-4x + 8y = -4 \Rightarrow -4 \cdot (2y - 5) + 8y = -4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -8y + 20 + 8y = -4 \Rightarrow -8y + 8y = -4 - 20 \Rightarrow 0y = -24$$

Como não há valor para y que multiplicado por 0 resulte em -24, dizemos que esse sistema de equações é **impossível** (SI), pois não existe um par ordenado (x, y) que seja solução do sistema.

Escrevendo as equações do sistema na forma de equação reduzida da reta, observamos que elas possuem coeficientes angulares iguais. Isso indica que os ângulos formados entre cada uma das retas e o eixo *Ox* possuem medidas iguais. Observando ainda o coeficiente linear, vemos que as retas intersectam o eixo *Oy* em ordenadas diferentes.

- Reta r: $-x + 2y = 5 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
- Reta s: $-4x + 8y = -4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Assim, as retas r e s são paralelas e, portanto, não possuem ponto em comum.



Situação 3: Vamos resolver agora o sistema de equações dado por $\begin{cases} -x + y = 3 \\ 3x - 3y = -9 \end{cases}$

- Isolamos a incógnita y na primeira equação.

$$-x + y = 3 \Rightarrow y = x + 3$$

- Substituímos y por $x + 3$ na segunda equação.

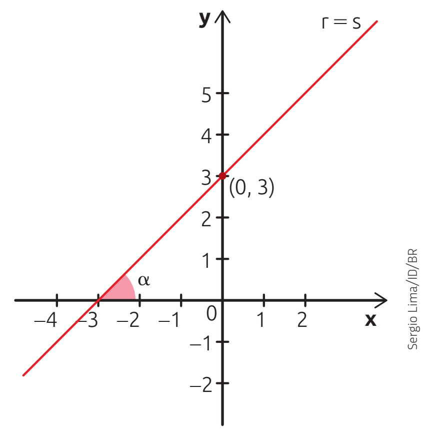
$$3x - 3y = -9 \Rightarrow 3x - 3 \cdot (x + 3) = -9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x - 3x - 9 = -9 \Rightarrow 3x - 3x = -9 + 9 \Rightarrow 0x = 0$$

Para qualquer valor x, $0x = 0$ é verdadeiro, ou seja, todo número multiplicado por 0 resulta em 0. Neste caso, o sistema de equações é **possível e indeterminado** (SPI), pois qualquer par ordenado (x, y) com $y = x + 3$ é solução desse sistema.

Escrevendo as equações do sistema na forma de equação reduzida da reta, observamos que elas são equivalentes, pois possuem coeficientes angulares e coeficientes lineares respectivamente iguais.

- Reta r: $-x + y = 3 \Rightarrow y = x + 3$
- Reta s: $3x - 3y = -9 \Rightarrow y = x + 3$

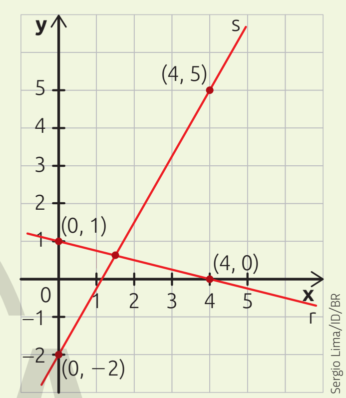
Assim, as duas equações correspondem a uma mesma reta, ou seja, r e s são retas coincidentes e, portanto, possuem infinitos pontos em comum.



R7. Considerando as retas r e s representadas no plano cartesiano, determine:

a) a equação reduzida de r e s;

b) as coordenadas do ponto de intersecção de r e de s.



Resolução

a) Reta r: os pontos de coordenadas $(0, 1)$ e $(4, 0)$ pertencem à reta r. Logo:

- $1 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$
- $0 = a \cdot 4 + b \Rightarrow 4a + b = 0$

Fazendo $b = 1$, temos $4a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$.

Portanto, a equação reduzida da reta r é dada por $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

Reta s: os pontos de coordenadas $(0, -2)$ e $(4, 5)$ pertencem à reta s. Logo:

- $-2 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = -2$
- $5 = a \cdot 4 + b \Rightarrow 4a + b = 5$

Fazendo $b = -2$, obtemos

$4a - 2 = 5 \Rightarrow a = \frac{7}{4}$.

Portanto, a equação reduzida da reta s é dada por $y = \frac{7}{4}x - 2$.

b) Determinamos as coordenadas do ponto de intersecção entre as retas r e s igualando as equações reduzidas:

$$-\frac{1}{4}x + 1 = \frac{7}{4}x - 2$$

$$-\frac{1}{4}x - \frac{7}{4}x = -2 - 1$$

$$-2x = -3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Substituindo $x = \frac{3}{2}$ em uma das equações reduzidas obtemos a coordenada y.

$$y = -\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{8}$$

Portanto, o ponto de intersecção entre as retas r e s possui coordenadas $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right)$.

Atividades

29. Escreva no caderno a equação reduzida das retas de acordo com as informações em cada item.

a) Reta r que contém os pontos $A(-1, -1)$ e $B(1, 5)$.

b) Reta s que contém os pontos $C(6, 2)$ e $D(-2, -2)$.

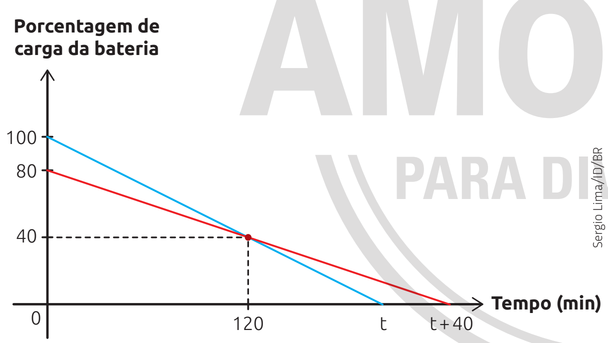
c) Reta t cujo coeficiente angular é $a = \frac{1}{2}$ e que contém o ponto $E(3, 8)$.

Agora, represente em um mesmo plano cartesiano as retas cujas equações você escreveu nos itens acima.

30. Em certo instante, as baterias A_1 e A_2 de dois *notebooks* estão com 100% e 80% de sua carga total, respectivamente.

Suponha que as baterias descarregam de forma linear. Conforme as porcentagens indicadas, a bateria A_1 descarrega por completo após t minutos, e a A_2, 40 minutos depois. Decorridos 120 minutos, ambas as baterias estão com carga igual a 40%.

Observe o gráfico que representa a porcentagem de carga de cada bateria em função do tempo.



Sergio Lima/ID/BR

a) Escreva a lei de formação das funções f e g que expressam, respectivamente, a porcentagem de carga das baterias A_1 e A_2, de acordo com o tempo, em minutos.

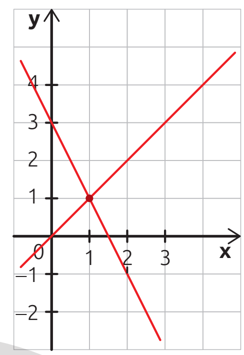
b) Quantos minutos terão decorrido até que a carga de cada bateria tenha descarregado por completo?

31. **Em grupo** Escreva o enunciado de uma atividade que, para ser resolvida, necessite utilizar o sistema apresentado a seguir. Depois, entregue a atividade para um colega resolver e, em seguida, verifique se a resolução está correta.

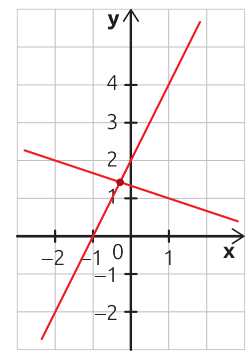
$$\begin{cases} 3y = 3 + 2x \\ y = 3x - 6 \end{cases}$$

32. Para cada item a seguir escreva no caderno um sistema de equações cuja solução está representada geometricamente.

a)



b)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

33. Em cada item a seguir, represente graficamente as equações do sistema em um plano cartesiano e, sem resolvê-lo, determine se é SPD, SPI ou SI.

a) $\begin{cases} -3y - 9x = -9 \\ y + x = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - x = 1 \\ y - x = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2y - x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - \dfrac{2x}{3} = 2 \\ 3y - 2x = 6 \end{cases}$

34. Diogo comprou duas camisas e três bermudas por R$ 230,00. Na mesma loja, André comprou uma camisa e quatro bermudas gastando R$ 240,00. Sabendo que todas as bermudas têm o mesmo preço, todas as camisas também, e que as camisas e as bermudas têm preços distintos entre si, resolva o que se pede.

a) Escreva no caderno um sistema de equações para determinar o valor pago em cada bermuda e em cada camisa.

b) Qual é o preço de cada camisa? E de cada bermuda?

35. Um professor de Matemática aplicou aos seus alunos um simulado com 25 questões. Ele atribuiu a cada resposta correta o valor de 4 pontos, e a cada erro ou questão não respondida o desconto de 1 ponto.

a) Calcule quantos pontos Aline fez nesse simulado, sabendo que ela acertou 20 questões e errou 5.

b) Se Rafael fez 40 pontos nesse teste, quantas questões ele acertou e quantas questões ele errou ou não respondeu?

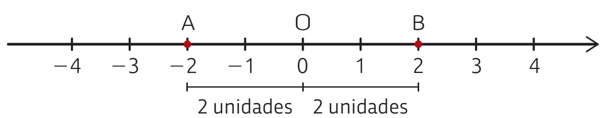
4 capítulo

Função modular

Neste capítulo você vai estudar a função modular e sua representação gráfica. Antes, porém, vamos apresentar a ideia do módulo de um número real.

Módulo de um número real

Observe na reta real a distância entre o ponto *A* e a origem *O* e o ponto *B* e a origem *O*.



Sergio Lima/ID/BR

Tanto o ponto *A* quanto o ponto *B* estão a 2 unidades da origem.

A distância entre um ponto *P* qualquer da reta real e a origem corresponde ao chamado **módulo** ou **valor absoluto** da abscissa do ponto *P*. Os módulos de -2 e 2 são denotados, respectivamente, por $|-2|$ e $|2|$. Assim, $|A| = |-2| = |2| = 2$. Observe uma maneira de definir o módulo de um número real qualquer.

O módulo ou valor absoluto de um número real *a*, indicado pela notação $|a|$, é definido por $|a| = \begin{cases} a, \text{ se } a \geqslant 0 \\ -a, \text{ se } a < 0 \end{cases}$.

O módulo de um número real não negativo é igual ao próprio número, e o módulo de um número real negativo é igual ao oposto dele. Logo, o módulo de um número real é sempre maior do que ou igual a zero.

Exemplos

a) $|6| = 6$

b) $|-13| = 13$

c) $|0| = 0$

d) $|-5{,}7| = 5{,}7$

e) $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

f) $\left|-\frac{3}{8}\right| = \frac{3}{8}$

Com essas informações, podemos resolver equações envolvendo o módulo de números reais. Por exemplo, na equação $|x| = 4$ determinamos os números que distam 4 unidades da origem. Nesse caso, temos $x = 4$ ou $x = -4$, porque $|4| = 4$ e $|-4| = 4$, isto é, o conjunto solução da equação $|x| = 4$ é $S = \{-4, 4\}$.

De maneira semelhante podemos resolver a equação $|x - 2| = 7$ em duas partes:

- $x - 2 = 7 \Rightarrow x = 7 + 2 \Rightarrow x = 9$
- $x - 2 = -7 \Rightarrow x = -7 + 2 \Rightarrow x = -5$

Portanto, o conjunto solução da equação $|x - 2| = 7$ é $S = \{-5, 9\}$.

A equação $|x| = a$, com $a < 0$, tem solução? Justifique.

Função modular

Vimos na página anterior que existe o módulo de um número real qualquer e aprendemos que um número real possui um único módulo. Com essas informações, podemos estabelecer uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x a seu módulo.

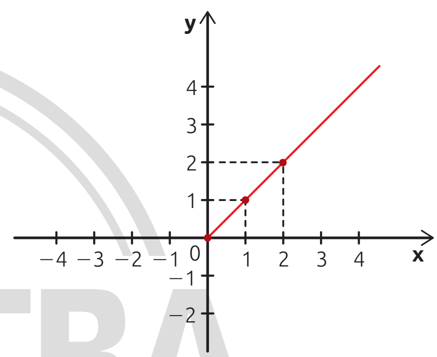
> Denomina-se **função modular** a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, em que $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$.

A função modular é injetora? Justifique.

Para obter a representação gráfica da função modular podemos esboçar, inicialmente, o gráfico correspondente a cada sentença. Observe a seguir.

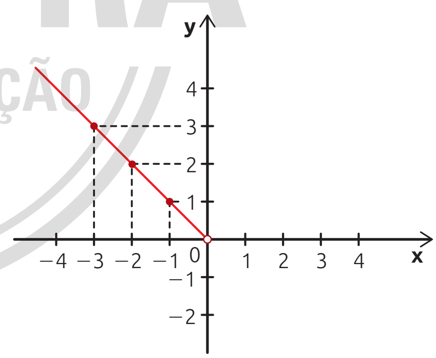
- Se $x \geqslant 0$, então f é dada por $f(x) = |x| = x$.

x	$f(x)$
0	0
1	1
2	2



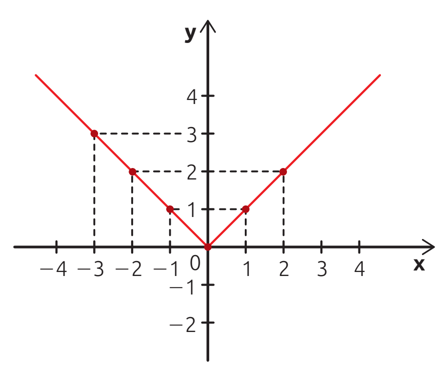
- Se $x < 0$, então f é dada por $f(x) = |x| = -x$.

x	$f(x)$
−1	1
−2	2
−3	3



Em seguida, reunimos os esboços dos gráficos de ambas as sentenças e obtemos a representação gráfica da função modular.

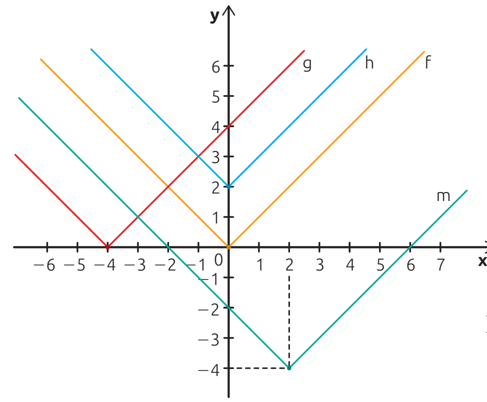
Qual é o domínio da função f? E a imagem da função f?



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

A função modular pode ser interpretada como uma função definida por mais de uma sentença ou uma função afim definida por partes. Além disso, seu gráfico é uma linha poligonal. Por esse motivo, a função modular também pode ser chamada função poligonal.

A partir do gráfico da função modular $f(x) = |x|$ podemos obter o gráfico de uma função cuja lei de formação é do tipo $y = |x + a| + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Por exemplo, vamos comparar em um mesmo plano cartesiano as representações gráficas da função modular f e das funções $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $g(x) = |x + 4|$, $h(x) = |x| + 2$ e $m(x) = |x - 2| - 4$.



Sergio Lima/ID/BR

- O gráfico de g é uma translação horizontal de 4 unidades para a esquerda em relação ao gráfico da função modular f.
- O gráfico de h é uma translação vertical de 2 unidades para cima em relação ao gráfico da função modular f.
- O gráfico de m é uma translação horizontal de 2 unidades para a direita e vertical de 4 unidades para baixo, em relação ao gráfico da função modular f.

Em relação ao gráfico da função modular, o gráfico de uma função $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, expressa por:

- $p(x) = |x + a|$ com $a \in \mathbb{R}^*$, é uma translação horizontal de a unidades para a esquerda se $a > 0$ ou de a unidades para a direita se $a < 0$.
- $p(x) = |x| + b$ com $b \in \mathbb{R}^*$, é uma translação vertical de b unidades para cima se $b > 0$ ou de b unidades para baixo se $b < 0$.
- $p(x) = |x + a| + b$ com $a, b \in \mathbb{R}^*$, é uma translação horizontal (de a unidades para a esquerda se $a > 0$ ou de a unidades para a direita se $a < 0$) e uma translação vertical (de b unidades para cima se $b > 0$ ou de b unidades para baixo se $b < 0$).

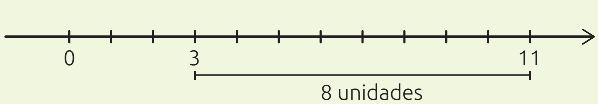
A translação horizontal "transforma" o ponto (x, y) em $(x + a, y)$. A translação vertical "transforma" o ponto (x, y) em $(x, y + b)$. Consequentemente, a translação vertical e horizontal "transforma" o ponto (x, y) em $(x + a, y + b)$.

R1. Resolva em $\mathbb{R}$ as equações a seguir.

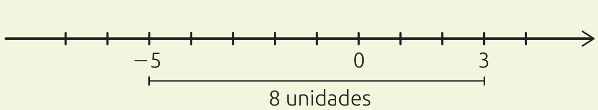
a) $|x - 3| = 8$ b) $|x - 5| = 2x + 2$

Resolução

a) Geometricamente, a equação $|x - 3| = 8$ significa que o número x está a uma distância 8 do número 3. Então, podemos determinar na reta real os números que distam 8 unidades de 3.



O número 11 dista 8 unidades à direita de 3.



O número −5 dista 8 unidades à esquerda de 3.

Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Portanto, $S = \{-5, 11\}$.

b) A solução da equação $|x - 5| = 2x + 2$ só é possível para $2x + 2 \geqslant 0$.

Assim, $2x + 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -1$.

Então, vamos resolver em duas partes a equação $|x - 5| = 2x + 2$:

- $x - 5 = 2x + 2 \Rightarrow x = -7$
- $x - 5 = -(2x + 2) \Rightarrow x = 1$

Como $x = -7$ não satisfaz a condição de existência de que $x \geqslant -1$, então o conjunto solução da equação $|x - 5| = 2x + 2$ é $S = \{1\}$.

R2. Dada a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - 3| + 1$, faça o que se pede.

a) Calcule $f(5)$, $f(-3)$, $f(-9)$ e $f(0)$.

b) Escreva a lei de formação da função f como uma função definida por partes, sem utilizar o módulo.

c) Esboce o gráfico da função f.

Resolução

a) $f(5) = |5 - 3| + 1 = |2| + 1 = 2 + 1 = 3$

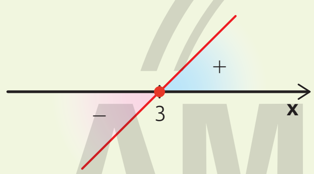
$f(-3) = |-3 - 3| + 1 = |-6| + 1 = 6 + 1 = 7$

$f(-9) = |-9 - 3| + 1 = |-12| + 1 = 12 + 1 = 13$

$f(0) = |0 - 3| + 1 = |-3| + 1 = 3 + 1 = 4$

b) Inicialmente, vamos determinar os valores de x para os quais $x - 3 \geqslant 0$ ou $x - 3 < 0$.

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

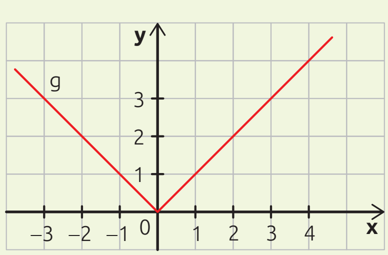


Assim, $x \geqslant 3 \Rightarrow x - 3 \geqslant 0$ e $x < 3 \Rightarrow x - 3 < 0$.
Escrevendo a função, temos:

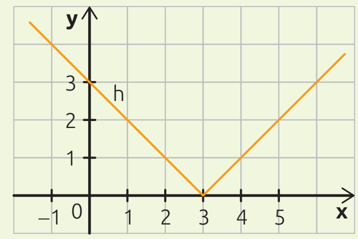
- se $x \geqslant 3$: $f(x) = (x - 3) + 1 = x - 2$
- se $x < 3$: $f(x) = -(x - 3) + 1 = -x + 4$

Assim, $f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{ se } x \geqslant 3 \\ -x + 4, \text{ se } x < 3 \end{cases}$.

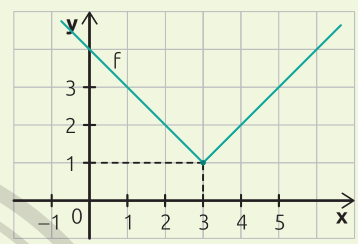
c) Vamos esboçar o gráfico da função f utilizando translações da representação gráfica da função modular $g(x) = |x|$.



Obtemos a representação gráfica da função h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = |x - 3|$ transladando horizontalmente a representação gráfica de g três unidades para a direita.

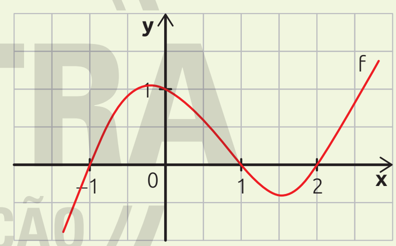


Por fim, para obter o esboço do gráfico da função dada por $f(x) = |x - 3| + 1$ transladamos verticalmente a representação gráfica de h uma unidade para cima.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

R3. Observe a representação gráfica da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

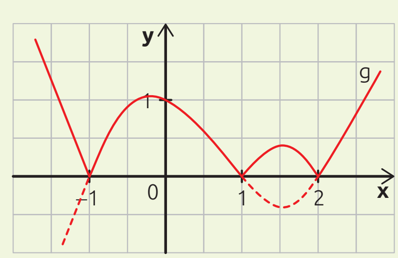


Esboce, em uma malha quadriculada, o gráfico da função g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = |f(x)|$.

Resolução

Como $g(x) = f(x)$ se $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) = -f(x)$ se $f(x) < 0$, nos pontos em que $f(x)$ é positiva os gráficos de f e g coincidem, e nos pontos em que $f(x) < 0$ o gráfico de g é simétrico ao gráfico de f em relação ao eixo Ox.

De maneira prática, "transformamos" os pontos de ordenadas negativas da função f em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas para obter o esboço do gráfico da função g.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

R4. Esboce o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$.

Resolução

Primeiro, verificamos o sinal de cada expressão nos módulos de acordo com o valor de x.

- $x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2$
- $x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -2$

Assim, $|x + 2| = \begin{cases} x + 2 \text{ se } x \geqslant -2 \\ -x - 2 \text{ se } x < -2 \end{cases}$

- $x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$
- $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Assim, $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 \text{ se } x \geqslant 1 \\ -x + 1 \text{ se } x < 1 \end{cases}$

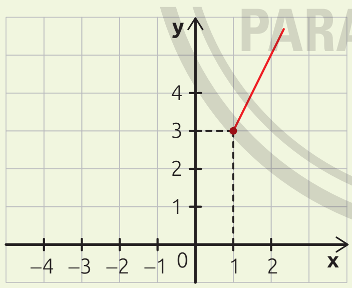
Portanto,

- para $x \geqslant 1$,
  $|x + 2| + |x - 1| = x + 2 + x - 1 = 2x + 1$;
- para $-2 \leqslant x < 1$,
  $|x + 2| + |x - 1| = x + 2 - x + 1 = 3$;
- para $x < -2$,
  $|x + 2| + |x - 1| = -x - 2 - x + 1 = -2x - 1$.

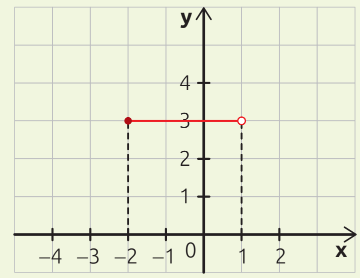
Logo $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ 3, \text{ se } -2 \leqslant x < 1 \\ -2x - 1, \text{ se } x < -2 \end{cases}$.

Esboçando o gráfico de cada uma das sentenças da função, temos:

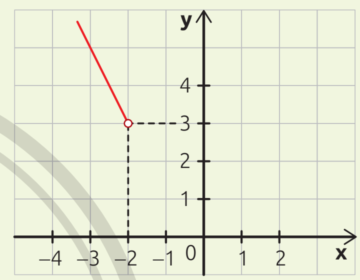
- $f(x) = 2x + 1$, se $x \geqslant 1$.



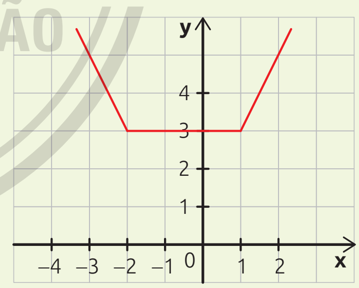
- $f(x) = 3$, se $-2 \leqslant x < 1$.



- $f(x) = -2x - 1$, se $x < -2$.



Em seguida, reunimos os esboços dos gráficos das três sentenças e obtemos a representação da função dada por $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Atividades

1. No caderno, efetue.

a) $|5| + |-4|$

b) $|1| - |-3| + |7|$

c) $|10| \cdot |2| - |8|$

d) $|1 \cdot (-2) + 5| \cdot |3|$

2. Resolva no caderno as equações, em $\mathbb{R}$.

a) $|x + 5| = 2$

b) $|10y| = 48$

c) $|8 - z| = 4$

d) $|3w - 1| = w + 3$

3. Determine, em $\mathbb{R}$, o valor ou os valores de x em cada item, quando possível.

a) $|8| = x$ b) $|3| = |x|$ c) $|x| = -1$ d) $14 = |x|$

4. Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |4x + 3|$.

a) Determine $f(0)$, $f(-1)$, $f\left(-\frac{3}{4}\right)$, $f(5)$.

b) Escreva a lei de formação da função f por meio de duas sentenças.

c) Qual é o domínio e o conjunto imagem dessa função?

5. Esboce o gráfico e determine o conjunto imagem de cada função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada a sua lei de formação.

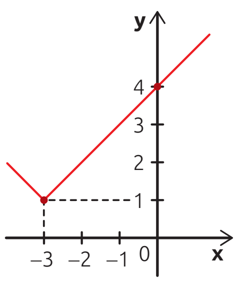
a) $f(x) = |x - 2|$

b) $h(x) = |x + 2|$

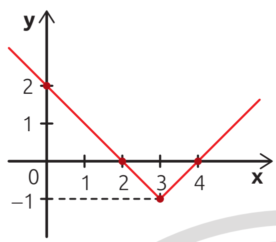
c) $g(x) = |3x| + |x + 1|$

6. Qual das alternativas corresponde à representação gráfica da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = |x + 3| - 1$?

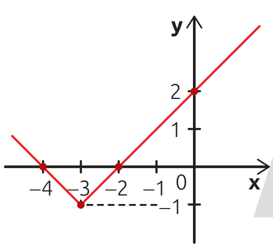
a)



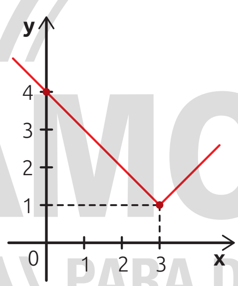
c)



b)

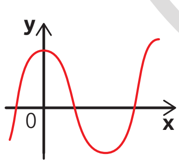


d)



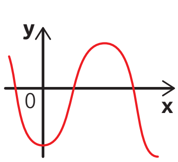
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

7. Observe a representação gráfica de $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

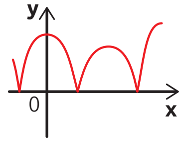


Qual figura melhor representa a função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = |g(x)|$?

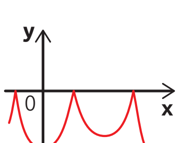
a)



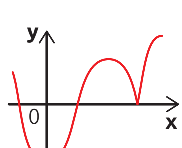
c)



b)



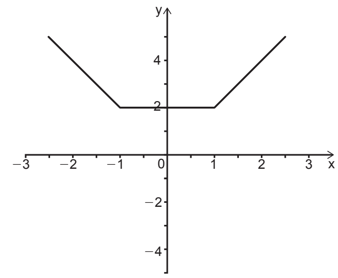
d)



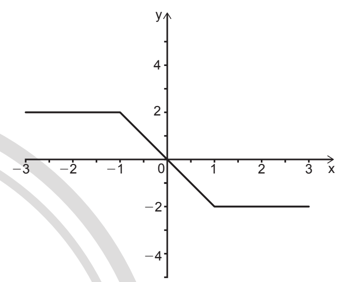
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

8. (PUC-RJ) Considere a função real
$f(x) = |x + 1| + |x - 1|$.
O gráfico que representa a função é:

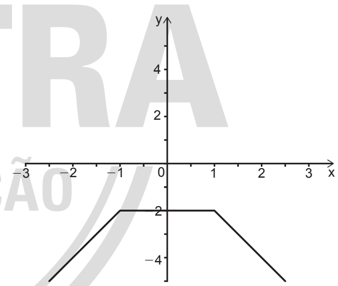
a)



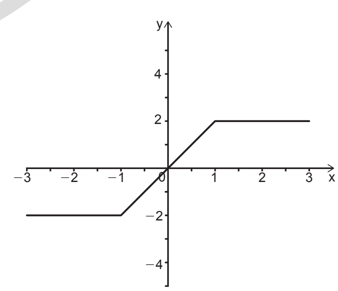
b)



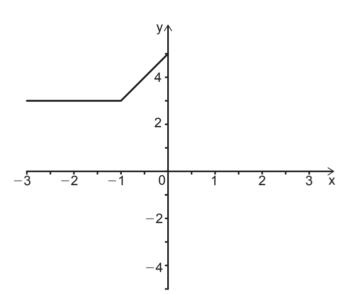
c)



d)



e)



Ilustrações: PUC-RJ/Fac-Símile:ID/BR

Função quadrática

5 capítulo

Definição de função quadrática

A função quadrática tem sua origem na resolução de equações do 2º grau. Há quase quatro mil anos, os babilônicos já formulavam e resolviam problemas que recaíam em equações do 2º grau. Um deles é o de determinar dois números dada sua soma (S) e seu produto (P).

Fonte de pesquisa: LIMA, Elon Lages et al. *A matemática do Ensino Médio*. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática).

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada quadrática quando existem coeficientes reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para $a = 0$, a função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ reduz-se a uma função afim dada por $f(x) = bx + c$. Assim, se $a = 0$, a função f não é quadrática.

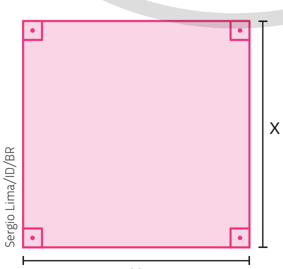
Exemplos

a) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = -t(5t - 8)$ é quadrática, pois para todo $t \in \mathbb{R}$ temos:

$$f(t) = -5t^2 + 8t$$

Seus coeficientes a, b e c são $a = -5$, $b = 8$ e $c = 0$.

b) A área de um quadrado é dada em função da medida de seu lado e pode ser expressa por uma função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.



Sergio Lima/ID/BR

$f(x) = x^2$ expressa a área do quadrado de lado x.

c) As sentenças a seguir não determinam funções quadráticas, pois não possuem coeficientes reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
- $f(x) = \sqrt{x} - 2x$
- $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x - 1$

Zeros de uma função quadrática

Anteriormente, estudamos que um número $x \in D(f)$ é zero da função f se, e somente se, $f(x) = 0$. Assim, no caso de uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, determinamos os zeros de f ao resolver a equação do 2º grau:

$$\underbrace{ax^2 + bx + c}_{f(x)} = 0$$

Os zeros de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, se existirem, correspondem às raízes reais da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$. Logo, se $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$, os zeros de f são dados pela fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ com } a \neq 0.$$

A quantidade de raízes reais distintas de uma equação do 2º grau é dada de acordo com o valor do discriminante (Δ). Portanto, desse número também depende a quantidade de zeros distintos de uma função quadrática.

Exemplos

a) $f(x) = x^2 + x - 30$

Se $f(x) = 0$, então $x^2 + x - 30 = 0$.

Temos:

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 121 > 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 11}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

Portanto, 5 e -6 são os zeros de f.

b) $g(x) = 3x^2 - 6x + 3$

Se $g(x) = 0$, então $3x^2 - 6x + 3 = 0$.

Temos:

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm 0}{6} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Portanto, g possui dois zeros iguais a 1.

Conforme você deve ter estudado no Ensino Fundamental, nem sempre é necessário utilizar a fórmula resolutiva acima, como no caso das equações do 2º grau incompletas.

Exemplos

Vamos determinar os zeros da função quadrática dada por:

a) $f(x) = x^2 - 36$

Se $f(x) = 0$, então:

$x^2 - 36 = 0$

$x^2 = 36$

$$x = \pm\sqrt{36} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

Portanto, 6 e -6 são os zeros de f.

Nesse caso foi determinado $x_1 = 6$ e $x_2 = -6$, pois estamos procurando números reais que elevados ao quadrado resultem em 36.

b) $g(x) = 4x^2 - x$

Se $g(x) = 0$, então:

$4x^2 - x = 0$

$x(4x - 1) = 0$

$x = 0$ ou $4x - 1 = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{1}{4}$

Portanto, 0 e $\frac{1}{4}$ são os zeros de g.

Em alguns casos, a função quadrática não possui zero.

Exemplos

a) $h(x) = -x^2 + 8x - 20$

Se $h(x) = 0$, então $-x^2 + 8x - 20 = 0$.

Temos:

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-20) = -16 < 0$

Assim, a equação do 2º grau não possui raízes reais, portanto h não possui zero.

b) $i(x) = x^2 - 2x + 6$

Se $i(x) = 0$, então $x^2 - 2x + 6 = 0$.

Temos:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -20 < 0$

Assim, a equação do 2º grau não possui raízes reais, portanto i não possui zero.

Uma função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$:

- possui dois zeros distintos se $\Delta > 0$.
- possui dois zeros iguais se $\Delta = 0$.
- não possui zero se $\Delta < 0$.

Se uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui dois zeros, ou seja, se $\Delta \geqslant 0$, então esses zeros são $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. Assim, a soma S e o produto P desses zeros são:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{S = -\frac{b}{a}}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow \boxed{P = \frac{c}{a}}$$

Em particular, se $a = 1$, então $b = -S$ e $c = P$. Logo $f(x) = x^2 - Sx + P$. Isso significa que, se f é dada por $f(x) = x^2 - Sx + P$ e possui zeros x_1 e x_2, então esses zeros possuem soma S e produto P. Reciprocamente, se x_1 e x_2 são números que possuem soma S e produto P, então x_1 e x_2 são zeros da função dada por $f(x) = x^2 - Sx + P$, pois:

- $x_1 \cdot \underbrace{\left(S - x_1\right)}_{x_2} = P \Rightarrow x_1 S - \left(x_1\right)^2 = P \Rightarrow -\left(x_1\right)^2 + Sx_1 - P = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \left(x_1\right)^2 - Sx_1 + P = 0 \Rightarrow f\left(x_1\right) = 0$

- $\underbrace{\left(S - x_2\right)}_{x_1} \cdot x_2 = P \Rightarrow Sx_2 - \left(x_2\right)^2 = P \Rightarrow -\left(x_2\right)^2 + Sx_2 - P = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \left(x_2\right)^2 - Sx_2 + P = 0 \Rightarrow f\left(x_2\right) = 0$

Portanto, o problema de determinar dois números dada sua soma S e seu produto P, citado no início do capítulo, equivale a determinar os zeros da função quadrática dada por $f(x) = x^2 - Sx + P$. Assim, no conjunto dos números reais, esse problema tem solução apenas quando $\Delta \geqslant 0$.

Sejam os números reais S e P. Então existem dois números reais com soma S e produto P se, e somente se:

$$(-S)^2 - 4 \cdot 1 \cdot P \geqslant 0 \Leftrightarrow S^2 - 4P \geqslant 0 \Leftrightarrow S^2 \geqslant 4P$$

Atividades resolvidas

R1. Explique como podemos determinar os zeros da função quadrática dada por $f(x) = x^2 + 3x - 10$.

Resolução

Como nesse caso $a = 1$, podemos utilizar a soma e o produto dos zeros da função. Para isso, são necessárias duas condições: a soma dos zeros da função deve ser igual ao oposto do coeficiente b e o produto deve ser igual ao coeficiente c.

Dessa maneira, identificamos dois números reais cuja soma seja -3.

Algumas possibilidades são:

-6 e 3 $\quad$ -5 e 2 $\quad$ -3 e 0 $\quad$ -2 e -1

Em seguida, verificamos quais dessas possibilidades satisfazem a segunda condição de que o produto seja -10. No caso, constatamos que os números -5 e 2 satisfazem ambas as condições, pois $-5 + 2 = -3$ e $(-5) \cdot 2 = -10$.

Portanto, os zeros da função f são -5 e 2.

> Determinar os zeros de uma função quadrática por meio de soma e produto é prático para funções que possuem zeros inteiros.

R2. Para quais valores reais de m, a função quadrática dada por $g(x) = (m + 1)x^2 + 2mx + m + 1$ possui dois zeros distintos?

Resolução

Sejam os coeficientes da função quadrática g tais que $a = m + 1$, $b = 2m$ e $c = m + 1$. Como $a \neq 0$, então:

$$a = m + 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$$

Uma função quadrática possui dois zeros distintos quando $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, logo:

$$(2m)^2 - 4 \cdot (m + 1) \cdot (m + 1) > 0$$
$$4m^2 - 4(m^2 + 2m + 1) > 0$$
$$4m^2 - 4m^2 - 8m - 4 > 0$$
$$-8m - 4 > 0$$
$$m < -\frac{1}{2}$$

Portanto, para $m \neq -1$ e $m < -\frac{1}{2}$ a função g possui dois zeros distintos.

Atividades

1. Determine se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função quadrática, dado que:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

b) $f(x) = x(4x + 5) - 1$

c) $f(x) = 2^x + 5x + 8$

d) $f(x) = x^2 + 3x$

2. Identifique em cada item os valores dos coeficientes a, b e c da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 8$

b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

c) $f(x) = (x - 3)^2 - 6$

d) $f(x) = -(x - 5)^2$

3. Em cada item, determine no caderno os possíveis valores de k para que a sentença represente a lei de formação de uma função quadrática.

a) $f(x) = kx^2 + 3x + 4$

b) $g(x) = (k - 2)x^2 + 4x$

c) $h(x) = 9x^k + 15x - 1$

d) $j(x) = (5 + k)x^2 + x - 3$

4. Dadas as funções reais definidas por $f(x) = x(3x + 4)$ e $g(x) = x^2 + 2x - 1$, calcule no caderno.

a) $f(4)$

b) $g(5)$

c) $f(7)$

d) $g(10)$

5. Seja $S = 2$ e $P = -15$ a soma e o produto dos zeros de uma função quadrática f, respectivamente. Sabendo que o coeficiente a é 1, expresse a lei de formação da função f e determine no caderno os seus zeros.

6. Observe algumas leis de formação de funções quadráticas.

- $f(x) = x^2 + 5x$
- $p(x) = 3x^2 + 6x + 4$
- $g(x) = x^2 - 2x + 1$
- $q(x) = 8x^2$
- $h(x) = 2x^2 + 5x + 3$
- $t(x) = x^2 + 10$

Quais funções:

a) possuem dois zeros iguais?

b) possuem dois zeros distintos?

c) não possuem zero?

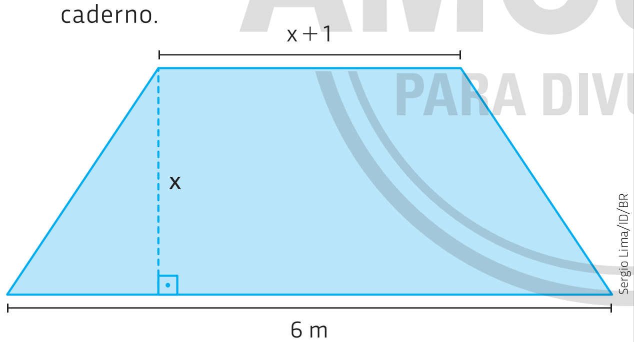
7. Sejam dois números ímpares consecutivos e positivos. Sabendo que o produto desses números é 99, responda no caderno:

a) Quais são esses números? Calcule sua soma.

b) Determine a lei de formação de uma função quadrática que tenha como zeros os números identificados no item **a**.

8. Determine a lei de formação de uma função quadrática f que tenha -21 e 4 como zeros.

9. Observe o trapézio e responda às questões no caderno.



a) Sabendo que a área do trapézio é dada por $A = \dfrac{(B + b)h}{2}$, em que B é a base maior, b a base menor e h a altura, determine a expressão da área do trapézio dado.

b) Determine o valor de x nessa expressão, considerando que o trapézio tenha 15 m² de área.

c) Se x valer o dobro da medida determinada no item b, qual será a área desse trapézio?

10. Determine os zeros das funções quadráticas definidas por:

a) $f(x) = 3x^2 - 12$

b) $g(x) = x^2 - 7x + 18$

c) $h(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 6$

d) $p(x) = 2x^2 - 2x - 40$

11. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x^2 - 10x - 6$. Assinale a alternativa correta que complete a frase: A função f ...

a) admite dois zeros racionais.

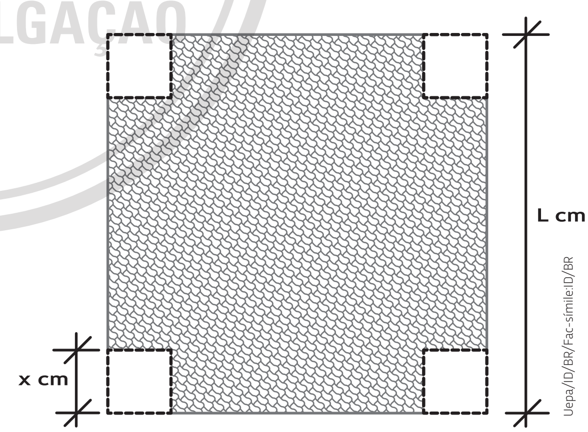
b) admite um zero natural e um inteiro.

c) não admite zeros.

d) admite dois zeros naturais.

e) admite dois zeros negativos.

12. Desafio (Uepa) Otimização é uma área do conhecimento que se nutre das ciências exatas para solucionar problemas práticos e efetivos independentemente do contexto onde surgem. As indústrias buscam sistematicamente otimizar o processo fabril visando minimizar o desperdício de material e, em decorrência disso, reduzir custos e ofertar produtos com qualidade a preços menores. Nesse sentido, uma empresa pretende cortar, nos cantos de uma folha de papelão, quadrados de lado x cm, de modo que o volume da caixa aberta seja máximo, conforme figura abaixo. Nessas condições, e sabendo que a medida do lado do quadrado a ser cortado corresponde a uma das raízes da equação $12x^2 - 8Lx + L^2 = 0$ o volume máximo dessa caixa será obtido quando o lado do quadrado a ser cortado nos cantos da folha de papelão medir:



a) $\dfrac{L}{6}$ cm

b) $\dfrac{L}{5}$ cm

c) $\dfrac{L}{4}$ cm

d) $\dfrac{L}{3}$ cm

e) $\dfrac{L}{2}$ cm

13. Desafio Seja f a função quadrática dada por $f(x) = x^2 - (k + 2)x + (2k + 4)$. Sabendo que os zeros de f são diferentes e que um zero é o dobro do outro, determine o valor de k, com $k \in \mathbb{Z}$, e dos zeros dessa função.

Forma canônica

Duas funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ são iguais se, e somente se, os trinômios do 2º grau a elas associados são iguais, ou seja, $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$. Assim, duas funções quadráticas são iguais quando possuem os mesmos coeficientes, isto é, $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$. Dessa maneira, uma função quadrática é completamente determinada pelos coeficientes a, b e c.

A partir deste momento, indicaremos a função quadrática apenas por sua lei de formação $f(x) = ax^2 + bx + c$, ou seja, utilizando o trinômio do 2º grau a ela associado.

Todo trinômio $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, admite uma forma canônica $a(x - m)^2 + k$ que pode ser determinada por meio do método de completar quadrados, como apresentado a seguir.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\overbrace{b^2 - 4ac}^{\Delta}}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Note que Δ corresponde ao numerador da fração $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Portanto, $ax^2 + bx + c = a(x - m) + k$, com $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Decorre da forma canônica do trinômio do 2º grau a fórmula resolutiva da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Agora, para demonstrar que a forma canônica de cada trinômio $ax^2 + bx + c$ é única, observe os cálculos a seguir.

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + k = a\left(x^2 - 2mx + m^2\right) + k = ax^2 - 2amx + \left(am^2 + k\right)$$

Assim:

$$b = -2am \quad \text{(I)}$$

$$c = am^2 + k \quad \text{(II)}$$

Da relação **I**, obtemos $m = -\dfrac{b}{2a}$ e, substituindo essa expressão na relação **II**, temos:

$$c = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + k \Rightarrow k = c - \frac{b^2}{4a} \Rightarrow k = \frac{\overbrace{4ac - b^2}^{-\Delta}}{4a} \Rightarrow k = -\frac{\Delta}{4a}$$

Assim, se $a(x - m)^2 + k$ é a forma canônica do trinômio $ax^2 + bx + c$, então $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = -\dfrac{\Delta}{4a}$, o que prova a sua unicidade. Portanto, toda função quadrática pode ser expressa de um único modo na forma $f(x) = a(x - m)^2 + k$.

R3. Escreva cada função quadrática f em sua forma canônica.

a) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

b) $f(x) = 3x^2 + 12x + 15$

Resolução

Podemos obter a forma canônica de duas maneiras.

a) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

1ª maneira

Utilizando as relações $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

- $m = -\dfrac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$
- $k = -\dfrac{4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}{4 \cdot (-2)} = 3$

Portanto, $f(x) = -2(x-1)^2 + 3$.

2ª maneira

Utilizando o método de completar quadrados.

$-2x^2 + 4x + 1 = -2\left[x^2 - 2x - \dfrac{1}{2}\right] =$

$= -2\left[\left(x^2 - 2 \cdot 1x + 1^2\right) - 1^2 - \dfrac{1}{2}\right] =$

$= -2\left[(x-1)^2 - \dfrac{3}{2}\right] = -2(x-1)^2 + 3$

Portanto, $f(x) = -2(x-1)^2 + 3$.

b) $f(x) = 3x^2 + 12x + 15$

1ª maneira

Utilizando as relações $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

- $m = -\dfrac{12}{2 \cdot 3} = -2$
- $k = -\dfrac{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15}{4 \cdot 3} = \dfrac{36}{12} = 3$

Assim, $f(x) = 3(x+2)^2 + 3$.

2ª maneira

Utilizando o método de completar quadrados.

$3x^2 + 12x + 15 = 3\left[x^2 + 4x + 5\right] =$

$= 3\left[\left(x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2\right) - 2^2 + 5\right] =$

$= 3\left[(x+2)^2 + 1\right] = 3(x+2)^2 + 3$

Assim, $f(x) = 3(x+2)^2 + 3$.

Atividades resolvidas

Atividades

14. Escreva no caderno cada função quadrática a seguir em sua forma canônica.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$

c) $f(x) = -x^2 - 5x$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{10}{3}x + 5$

15. Dada a forma canônica das funções quadráticas a seguir, obtenha o trinômio do 2º grau correspondente.

a) $f(x) = (x+2)^2 + 39$

b) $f(x) = -5(x-2)^2 + 12$

c) $f(x) = 2(x-7)^2 - 98$

d) $f(x) = 3(x-1)^2 - 4$

16. (UPE) Se escrevermos a função quadrática $f(x) = 2x^2 - x + 3$ na forma $f(x) = a(x-m)^2 + n$, o valor de $a + m + n$ é igual a:

a) $\dfrac{19}{4}$

b) $\dfrac{27}{4}$

c) $\dfrac{41}{8}$

d) $\dfrac{33}{8}$

e) $\dfrac{28}{8}$

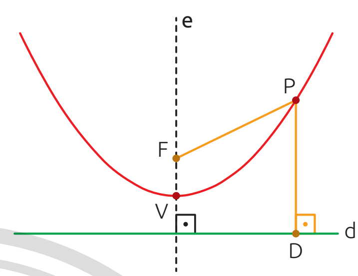
Gráfico da função quadrática

Na página **44**, vimos que o gráfico da função quadrática $g(x) = x^2 - 2x$ é uma curva chamada parábola. Agora, vamos apresentar algumas características importantes dessa curva, mas sem demonstrá-las nesse momento.

Geometricamente, uma parábola é determinada por um ponto *F*, chamado foco, e uma reta *d* que não contém *F*, chamada reta diretriz. O conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de *F* e de *d* é a parábola de foco *F* e diretriz *d*.

A reta *e* que contém *F* e é perpendicular a *d* é o eixo da parábola. O eixo *e*, que é eixo de simetria, intersecta a parábola em um único ponto (V), o qual é chamado **vértice**.

Uma parábola é composta de dois ramos simétricos em relação a seu eixo de simetria.



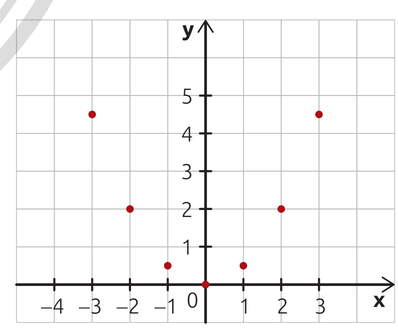
O ponto *P* pertence à parábola porque a distância de *P* à diretriz *d* é igual à distância de *P* ao foco *F*, ou seja, *PD* = *PF*.

O gráfico de qualquer função quadrática é uma parábola cuja diretriz é paralela ao eixo *Ox* e, portanto, com o eixo de simetria paralelo ao eixo *Oy*. É importante dizer, também, que toda parábola cuja diretriz é paralela ao eixo *Ox* é gráfico de uma função quadrática.

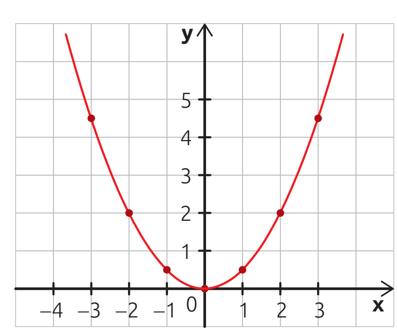
Gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$

Observe as coordenadas de alguns pontos que pertencem ao gráfico da função quadrática $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ e a representação desses pontos no plano cartesiano.

x	*f*(*x*)
−3	4,5
−2	2
−1	0,5
0	0
1	0,5
2	2
3	4,5



A representação gráfica de *f* é uma parábola que contém todos esses pontos. Observe.



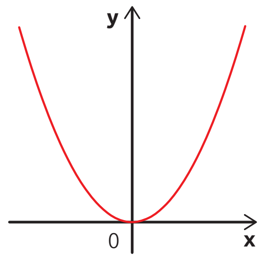
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

O gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2$ possui as seguintes características:

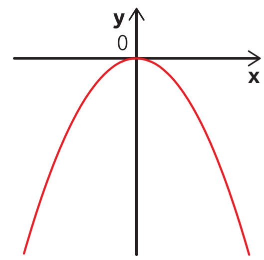
- é simétrico em relação ao eixo *Oy*, pois $f(x) = f(-x)$;
- o vértice da parábola coincide com a origem $(0, 0)$;

- se $a > 0$, a concavidade é voltada para cima; se $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo.

$$f(x) = ax^2$$

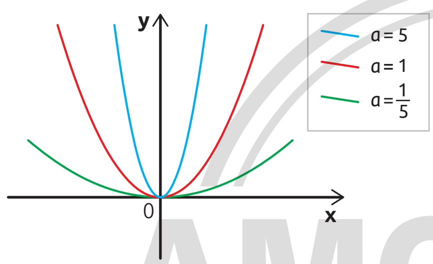


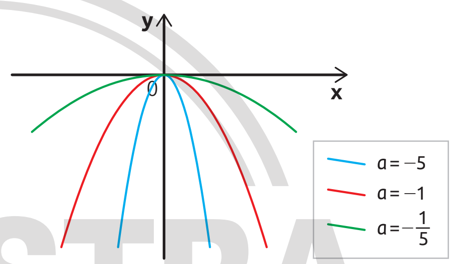
$a > 0$



$a < 0$

- quanto maior o módulo de a, menor a abertura da parábola, e quanto mais próximo de zero for o valor de a, maior a abertura da parábola.





Translação do gráfico de uma função quadrática

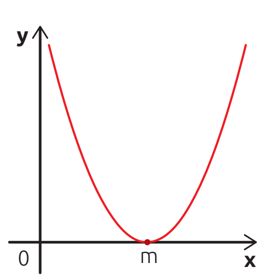
No capítulo **4**, estudamos algumas funções cujos gráficos correspondem a translações em relação ao gráfico da função modular.

Dada uma função qualquer $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e os números $m, k \in \mathbb{R}$, podemos definir a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = g(x - m) + k$, cujo gráfico é uma translação do gráfico de g em determinada direção, de acordo com os valores de m e k, caso não sejam simultaneamente iguais a zero.

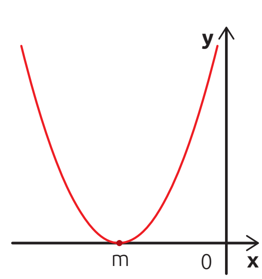
As situações a seguir ilustram o caso em que g é a função quadrática $g(x) = ax^2$.

- Para $k = 0$ e $m \neq 0$, o gráfico é transladado horizontalmente.

$$f(x) = g(x - m) \Rightarrow f(x) = a(x - m)^2$$



$m > 0$

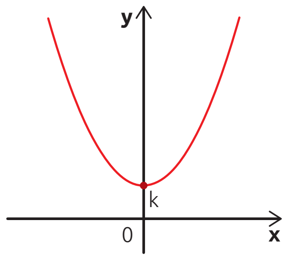


$m < 0$

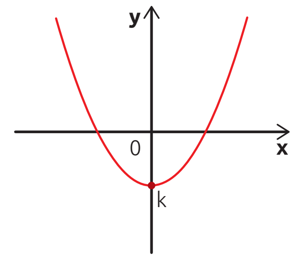
Ilustrações: Sergio Lima/ ID/BR

- Para $k \neq 0$ e $m = 0$, o gráfico é transladado verticalmente.

$$\boxed{f(x) = g(x) + k \Rightarrow f(x) = ax^2 + k}$$



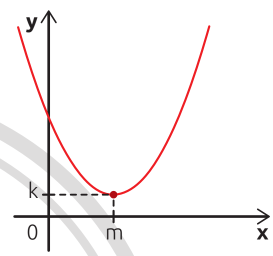
$k > 0$



$k < 0$

- Para $k \neq 0$ e $m \neq 0$, o gráfico é transladado horizontalmente e verticalmente.

$$\boxed{f(x) = g(x - m) + k \Rightarrow f(x) = a(x - m)^2 + k}$$



$k > 0$ e $m > 0$

Como toda função quadrática pode ser expressa na forma canônica $f(x) = a(x - m)^2 + k$, dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é congruente ao gráfico da função dada por $g(x) = ax^2$.

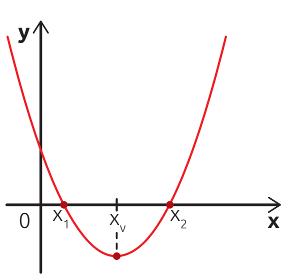
Observe que, em qualquer caso, o vértice da parábola é o ponto (m, k). Conforme vimos anteriormente, se $a(x - m)^2 + k$ é a forma canônica de $ax^2 + bx + c$, então $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = -\dfrac{\Delta}{4a}$, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$. Assim, verificamos o seguinte.

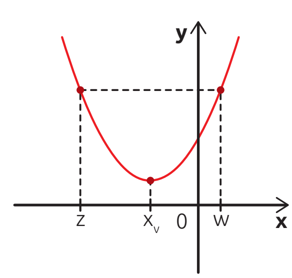
Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O vértice da parábola correspondente ao gráfico de f é o ponto (x_v, y_v) em que:

- $x_v = -\dfrac{b}{2a}$
- $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$

Em algumas situações, podemos determinar o valor de x_v ou de y_v sem recorrer diretamente às fórmulas $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$. Por exemplo:

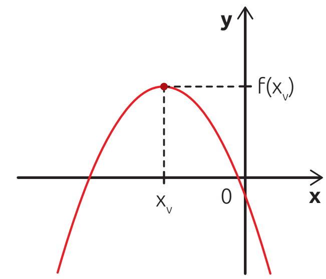
- Se f é uma função quadrática com zeros x_1 e x_2, então, pela simetria da parábola em relação a seu eixo, a coordenada x_v corresponde à média aritmética de x_1 e x_2, ou seja, $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Da mesma maneira, se $f(z) = f(w)$ para $z \neq w$, então $x_v = \dfrac{z + w}{2}$.





Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

- Se a coordenada x_v do vértice for um valor conhecido, podemos obter y_v calculando $f\left(x_v\right)$, pois, como $\left(x_v, y_v\right)$ pertence ao gráfico de f, então $y_v = f\left(x_v\right)$.



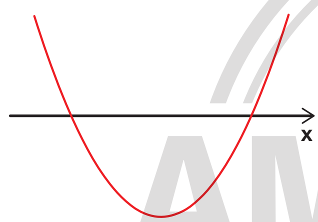
Coeficientes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$

Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

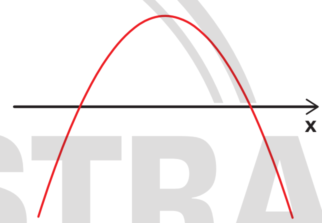
Coeficiente *a*

Como o gráfico de f é uma translação do gráfico da função $g(x) = ax^2$, então os gráficos de f e de g possuem as concavidades voltadas para a mesma direção (para cima ou para baixo) e as parábolas têm a mesma abertura. Assim, se $a > 0$, a concavidade é voltada para cima; se $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo.

$f(x) = ax^2 + bx + c$



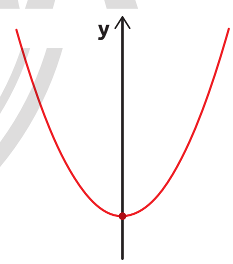
$a > 0$



$a < 0$

Coeficiente *b*

Conforme vimos anteriormente, $x_v = -\dfrac{b}{2a}$, ou seja, $b = -2ax_v$. Assim:



- Se $b = 0$, então $x_v = -\dfrac{0}{2a} = 0$. Portanto, a parábola intersecta o eixo Oy no vértice.

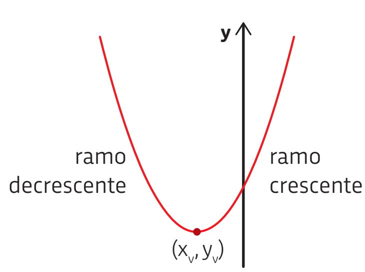
- Se $b > 0$, então:

$$-2ax_v > 0 \Rightarrow 2ax_v < 0 \Rightarrow ax_v < 0$$

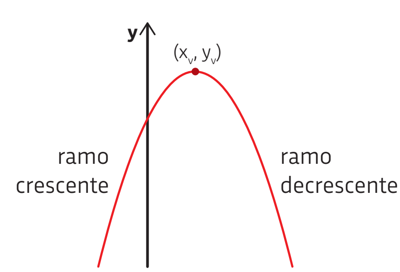
Logo, a e x_v possuem sinais contrários. A concavidade é voltada para cima ou para baixo conforme a seja positivo ou negativo, e o vértice localiza-se à direita ou à esquerda do eixo Oy conforme x_v seja positivo ou negativo.

Observe, a seguir, que a parábola intersecta o eixo Oy no ramo crescente nos dois casos.

$a > 0$ e $x_v < 0$



$a < 0$ e $x_v > 0$



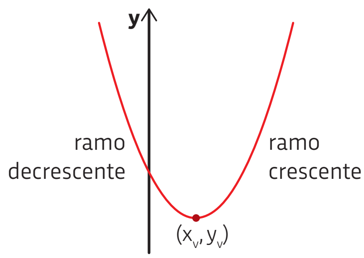
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

- Se $b < 0$, então:

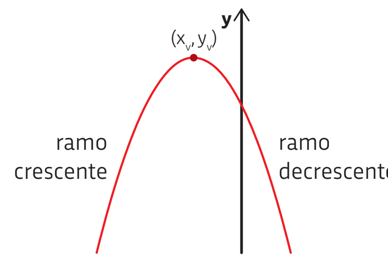
$$-2ax_v < 0 \Rightarrow 2ax_v > 0 \Rightarrow ax_v > 0$$

Logo, a e x_v possuem sinais iguais. Observe, a seguir, que a parábola intersecta o eixo Oy no ramo decrescente nos dois casos.

$a > 0$ e $x_v > 0$



$a < 0$ e $x_v < 0$



Coeficiente *c*

Temos que $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$, logo o gráfico de f intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada igual a c.

Atividades resolvidas

R4. Esboce o gráfico da função quadrática $h(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$.

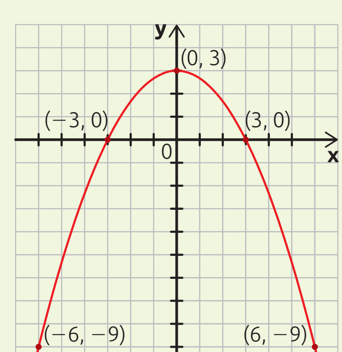
Resolução

Inicialmente obtemos as coordenadas de alguns pontos pertencentes à parábola que representa a função quadrática h.

Geralmente escolhemos pontos notáveis da parábola para esboçar o gráfico, como o vértice, os zeros da função e o ponto em que o gráfico intersecta o eixo Oy.

x	$y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$	(x, y)
-6	$y = -\frac{1}{3} \cdot (-6)^2 + 3 = -9$	$(-6, -9)$
-3	$y = -\frac{1}{3} \cdot (-3)^2 + 3 = 0$	$(-3, 0)$
0	$y = -\frac{1}{3} \cdot 0^2 + 3 = 3$	$(0, 3)$
3	$y = -\frac{1}{3} \cdot 3^2 + 3 = 0$	$(3, 0)$
6	$y = -\frac{1}{3} \cdot 6^2 + 3 = -9$	$(6, -9)$

O gráfico da função h é uma parábola que contém todos os pontos determinados ao lado.

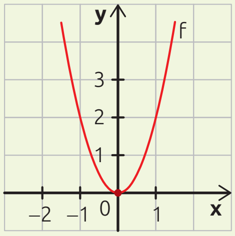


Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Observe que, a parábola correspondente à função $h(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$:

- apresenta maior abertura do que a função $f(x) = x^2$, pois $|a| = \frac{1}{3}$;
- apresenta concavidade voltada para baixo, pois $a = -\frac{1}{3} < 0$;
- é transladada verticalmente 3 unidades para cima e com vértice no eixo y, pois $m = 0$ e $k = 3$.

R5. O gráfico ao lado representa a função quadrática $f(x) = 2x^2$.



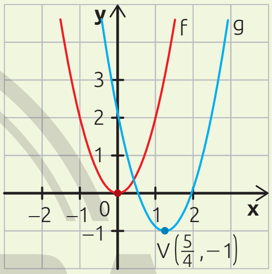
Sabendo que o gráfico da função $g(x) = a(x - m)^2 + k$ é congruente ao gráfico da função f transladado 1 unidade para baixo e $\frac{5}{4}$ unidade para a direita, determine:

a) a lei de formação da função g;

b) as coordenadas do vértice da parábola correspondente à função g.

Resolução

a) A parábola que representa $g(x) = a(x - m)^2 + k$ é congruente ao gráfico de $f(x) = 2x^2$, sendo $a = 2$.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Logo, se f for transladada 1 unidade para baixo e $\frac{5}{4}$ unidade para a direita, g assumirá $m = \frac{5}{4}$ e $k = -1$:

$$g(x) = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + (-1) = 2 \cdot \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - 1 =$$

$$= 2 \cdot \left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) - 1 =$$

$$= 2x^2 - 5x + \frac{25}{8} - 1 = 2x^2 - 5x + \frac{17}{8}$$

Portanto, a lei de formação da função g é dada por $g(x) = 2x^2 - 5x + \frac{17}{8}$.

b) Como o vértice da parábola da função g corresponde ao ponto $V(m, k)$, então $V\left(\frac{5}{4}, -1\right)$.

R6. Determine as coordenadas dos pontos em que o gráfico da função $g(x) = 4x^2 + 5x - \frac{7}{2}$ intersecta os eixos Ox e Oy.

Resolução

O gráfico da função g intersecta o eixo Ox quando $g(x) = 0$, por isso precisamos resolver a equação $4x^2 + 5x - \frac{7}{2} = 0$.

- $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = 81$

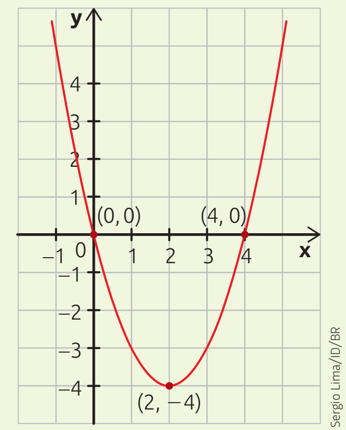
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 4} = \frac{-5 \pm 9}{8} \begin{cases} x_1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-14}{8} = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

Nesse caso, o gráfico da função g intersecta o eixo Ox nos pontos cujas coordenadas são $\left(-\frac{7}{4}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

O gráfico da função g intersecta o eixo Oy no ponto cujas coordenadas são $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$, pois $x = 0 \Rightarrow g(x) = c = -\frac{7}{2}$.

Atividades resolvidas

R7. Determine os coeficientes reais a, b e c da função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ representada no gráfico.



Resolução

Vamos determinar os coeficientes a, b e c da função f de duas maneiras diferentes.

1ª maneira

Pelo gráfico de f, observamos que $c = 0$, pois a parábola intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada igual a 0.

Para determinar os demais coeficientes, fazemos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a \qquad \text{(I)}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -4 \Rightarrow -\frac{\left(b^2 - 4ac\right)}{4a} = -4 \qquad \text{(II)}$$

Substituindo **I** em **II** e utilizando $c = 0$:

$$-\frac{\left(-4a\right)^2 - 4ac}{4a} = -4 \Rightarrow -\frac{16a^2 - 0}{4a} = -4 \Rightarrow -4a = -4 \Rightarrow a = 1$$

Como $a = 1$, então $b = -4 \cdot 1 = -4$.

Portanto, $f(x) = 1 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 0 = x^2 - 4x$.

2ª maneira

Os pontos $(0, 0)$, $(2, -4)$ e $(4, 0)$ pertencem ao gráfico da função f, logo:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2) = -4 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -4 \\ f(4) = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 0 \end{cases}$$

Assim, $c = 0$. Resolvendo o sistema de equações $\begin{cases} 4a + 2b = -4 \\ 16a + 4b = 0 \end{cases}$ obtemos $a = 1$ e $b = -4$.

Portanto, $f(x) = x^2 - 4x$.

Atividades

17. (EPCAr-MG) O gráfico de uma função polinomial do segundo grau $y = f(x)$, que tem como coordenadas do vértice $(5, 2)$ e passa pelo ponto $(4, 3)$, também passará pelo ponto de coordenadas:

a) $(1, 18)$
b) $(0, 26)$
c) $(6, 4)$
d) $(-1, 36)$

18. **Ferramentas** Esboce o gráfico de cada função quadrática localizando o vértice da parábola e o eixo de simetria e.

a) $f(x) = -3x^2$
b) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

19. Determine no caderno se a concavidade das parábolas, que representam as funções quadráticas a seguir, é voltada para baixo ou para cima.

a) $f(x) = -\frac{1}{12}x^2 + 5x - 3$

b) $g(x) = \left(-3x\right)^2 + 4x - 1$

c) $h(x) = \frac{1}{3}x^2 - 5$

d) $p(x) = -x^2 + x + 13$

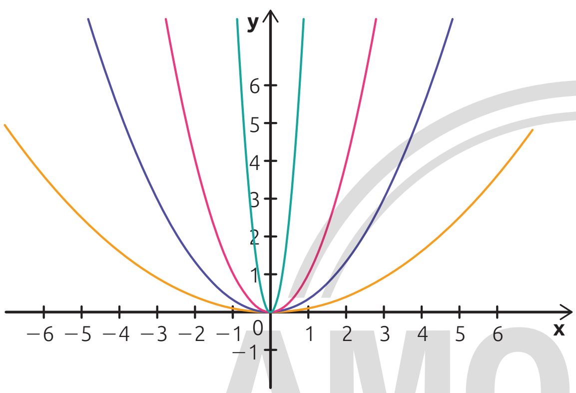
20. Observe as funções quadráticas a seguir.

- $f(x) = 10x^2$
- $h(x) = x^2$
- $g(x) = \frac{1}{3}x^2$
- $p(x) = \frac{1}{10}x^2$

a) Na representação gráfica dessas funções, qual é a característica que define a abertura da parábola? Justifique.

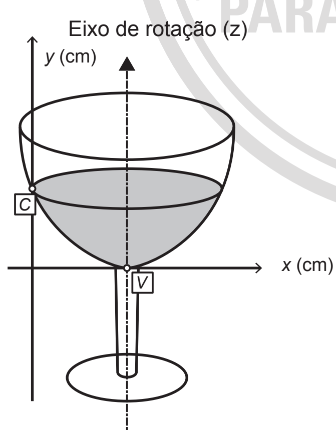
b) De acordo com o item anterior, qual das funções resulta em uma parábola de maior abertura na representação gráfica? E qual resulta em uma parábola de menor abertura?

c) Reproduza a imagem a seguir no caderno e relacione a cada parábola a lei de formação da função correspondente a ela.



Sergio Lima/ID/BR

21. (Enem/Inep) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



Enem/Inep/Fac-símile: ID/BR

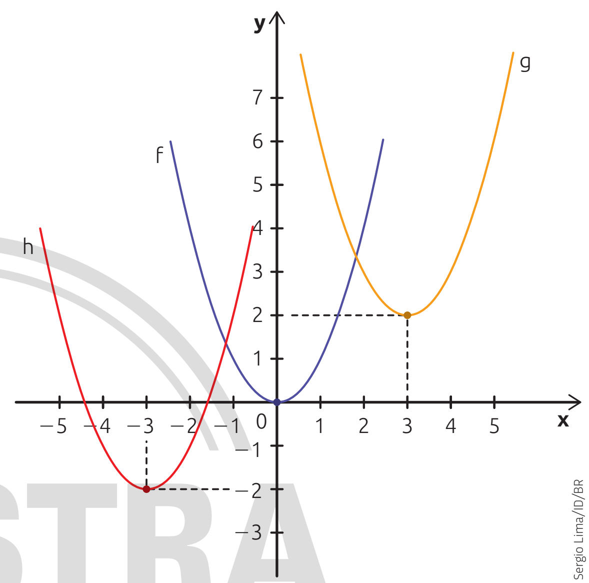
A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 6

22. Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2$. Determine no caderno uma função quadrática cujo gráfico, em relação a f, corresponda a uma parábola com abertura maior e a outra com abertura menor.

23. Determine no caderno a forma canônica das funções quadráticas g e h representadas no plano cartesiano a seguir, sabendo que os gráficos de g e h são translações do gráfico de $f(x) = x^2$.



Sergio Lima/ID/BR

a) Sabendo que a forma canônica do trinômio do 2º grau é dada por $a(x - m)^2 + k$, identifique os valores de m e k dos trinômios correspondentes à lei de formação de f, g e h.

b) Identifique os vértices das parábolas que representam essas funções.

c) Qual relação existe entre os valores de m e k, obtidos anteriormente, e as coordenadas dos vértices da parábola?

24. Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sabendo que $f(-2) = -3$, $f(-1) = -6$ e $f(0) = -5$, calcule $f(-3)$ e $f(2)$.

25. Em cada item, determine no caderno o ponto em que f intersecta o eixo Oy, ou seja, $(0, f(0))$.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 3$

b) $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$

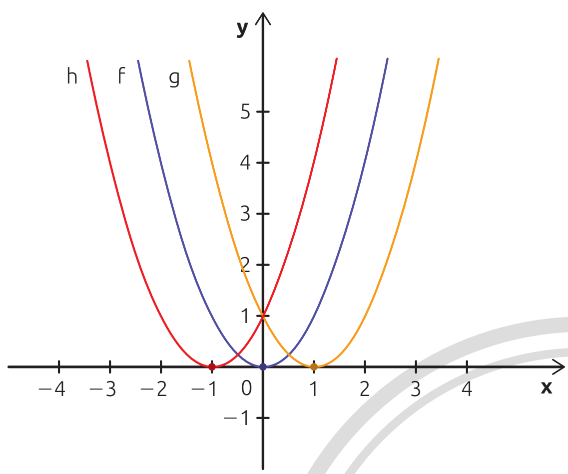
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 16$

d) $f(x) = 5x^2 + x$

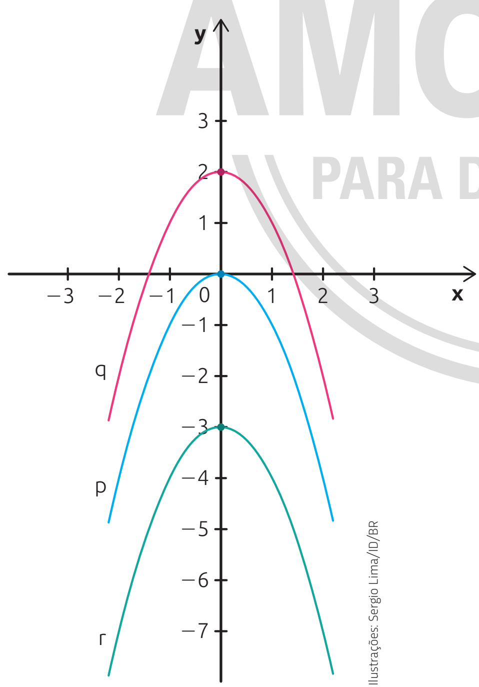
26. Determine no caderno a distância entre os vértices das parábolas que representam as funções quadráticas $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = -x^2 - 4x - 4$, construídas em um mesmo plano cartesiano.

27. Observe os gráficos das funções quadráticas.

I)



II)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

a) Em **I**, qual é a relação dos gráficos de g e h com o gráfico de f?

b) Em **II**, qual é a relação dos gráficos de q e r com o gráfico de p?

c) Sabendo que $f(x) = x^2$ e $p(x) = -x^2$, determine a lei de formação de g, h, q e r.

28. Escreva no caderno uma lei de formação que represente cada translação.

a) A parábola que representa a função quadrática $f(x) = x^2 + 2$ foi transladada horizontalmente quatro unidades para a direita do eixo y.

b) A parábola que representa a função quadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 19$ foi transladada verticalmente cinco unidades para baixo.

c) A parábola que representa a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 12x + 11$ foi transladada verticalmente sete unidades para cima e horizontalmente três unidades para a esquerda.

29. Calcule (x_v, y_v) das parábolas que representam as funções quadráticas a seguir.

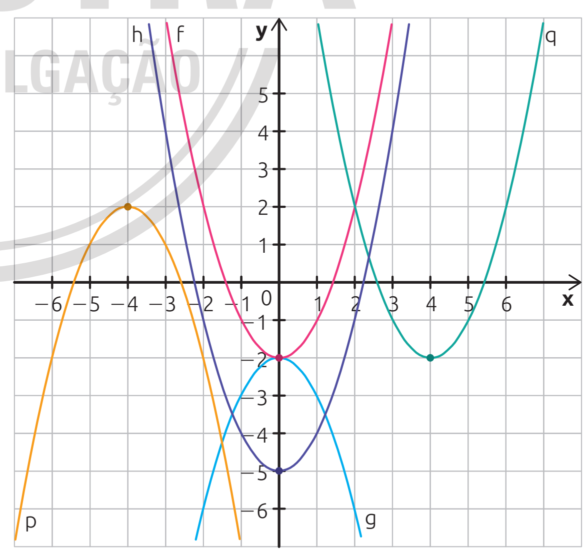
a) $f(x) = 4x^2 - 8x + 2$

b) $g(x) = 2x^2 + 20x + 50$

c) $h(x) = -3x^2 - 6x + 6$

d) $p(x) = x^2 - 6x + 7$

30. Observe o gráfico que representa a função quadrática f e algumas de suas translações no mesmo plano cartesiano.



Sergio Lima/ID/BR

Sabendo que $f(x) = x^2 - 2$, julgue as sentenças a seguir em verdadeira ou falsa, corrigindo as falsas.

a) $g(x) = -f(x)$

b) $h(x) = f(x - 3)$

c) $p(x) = -f(x + 4)$

d) $q(x) = f(x) + 4$

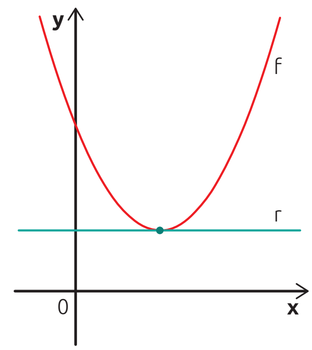
Não escreva no livro.

Conjunto imagem de uma função quadrática

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$. No plano cartesiano estão representados o gráfico de f e a reta r dada por $y = y_v$, sendo y_v a ordenada do vértice da parábola.

Podemos verificar que, para $a > 0$, a reta dada por $y = k$, com $k \in \mathbb{R}$:

- intersecta a parábola em dois pontos distintos se $k > y_v$.
- intersecta a parábola em um único ponto se $k = y_v$.
- não intersecta a parábola se $k < y_v$.



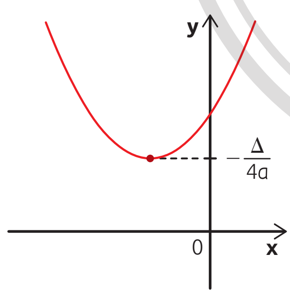
Se fosse $a < 0$, para quais valores de k a reta dada por $y = k$ intersectaria a parábola em:

- dois pontos distintos?
- um único ponto?
- nenhum ponto?

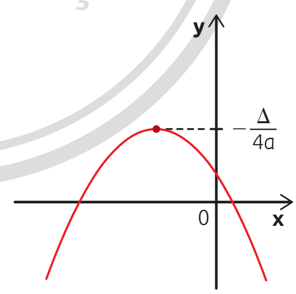
A reta dada por $y = k$ intersecta a parábola se, e somente se, existe $x \in D(f)$ tal que $f(x) = k$. Isso significa que há intersecção quando a equação $ax^2 + bx + c = k$ tem solução real e, nesse caso, $k \in Im(f)$. Lembrando que $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, temos o seguinte resultado:

A imagem da função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o conjunto:

- $Im(f) = \left\{k \in \mathbb{R} \mid k \geqslant -\dfrac{\Delta}{4a}\right\}$ se $a > 0$.



- $Im(f) = \left\{k \in \mathbb{R} \mid k \leqslant -\dfrac{\Delta}{4a}\right\}$ se $a < 0$.

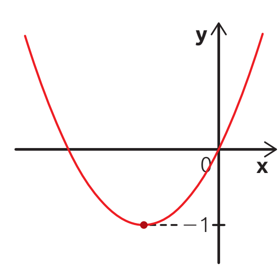


Exemplos

a) Queremos determinar o conjunto imagem da função quadrática $f(x) = x^2 + 2x$.

Utilizando a fórmula $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$, temos:

$$y_v = -\frac{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1} = -\frac{4}{4} = -1$$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

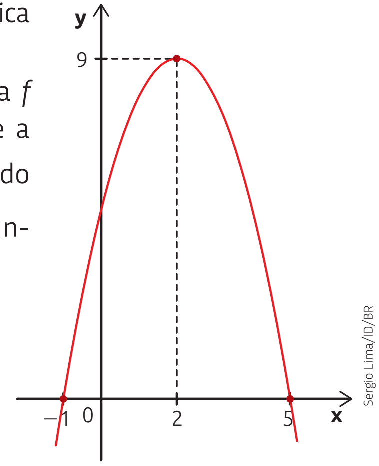
Como $a = 1 > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima. Assim, $Im(f) = \{k \in \mathbb{R} \mid k \geqslant -1\} = [-1, +\infty[$.

b) Vamos determinar o conjunto imagem da função quadrática $f(x) = -(x + 1)(x - 5)$.

Observe que o trinômio $ax^2 + bx + c$ correspondente a f está na forma fatorada. Em geral, $ax^2 + bx + c$ admite a forma fatorada $a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$ apenas quando os números x_1 e x_2 são zeros de f. Assim, os zeros da função dada são $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$.

Segue que:

- $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{(-1) + 5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$
- $y_v = f(x_v) = f(2) = -(2 + 1)(2 - 5) = -3 \cdot (-3) = 9$



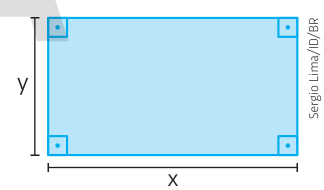
Temos $a = -1 < 0$. Logo, $Im(f) = \{k \in \mathbb{R} \mid k \leq 9\} =]-\infty, 9]$.

Valor máximo e valor mínimo de uma função quadrática

Em determinadas situações, surgem problemas em que a solução é obter o valor máximo ou o valor mínimo que uma função quadrática assume. Observe um problema desse tipo.

Saulo possui uma tela de comprimento p, que ele pretende utilizar para cercar uma região retangular. Qual é a maior área possível que a região cercada terá?

Se representarmos a região por meio de um retângulo cujos lados medem x e y, então o perímetro desse retângulo vai medir $2x + 2y$, que deverá coincidir com o comprimento p da tela. Assim:



$$2x + 2y = p \Rightarrow 2y = p - 2x \Rightarrow y = \frac{p}{2} - x$$

Então, a área do retângulo pode ser expressa por:

$$A(x) = x \cdot \underbrace{\left(\frac{p}{2} - x\right)}_{y} \Rightarrow A(x) = -x^2 + \frac{p}{2}x$$

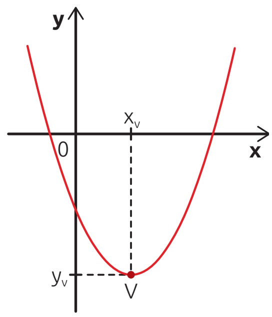
Assim, a área é expressa por uma função cujo gráfico é parte de uma parábola com a concavidade voltada para baixo. A ordenada y_v do vértice é o valor máximo que a função assume, e x_v é a abscissa para a qual esse valor máximo é atingido. Como os zeros dessa função são 0 e $\dfrac{p}{2}$, temos:

- $x_v = \dfrac{0 + \dfrac{p}{2}}{2} = \dfrac{p}{4}$
- $y_v = A(x_v) = A\left(\dfrac{p}{4}\right) = \dfrac{p}{4} \cdot \left(\dfrac{p}{2} - \dfrac{p}{4}\right) = \dfrac{p}{4} \cdot \dfrac{p}{4} = \dfrac{p^2}{16}$

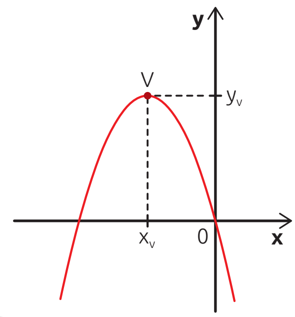
Portanto, a área é máxima quando um dos lados mede $x_v = \dfrac{p}{4}$ e, nesse caso, o outro lado mede $y_v = \dfrac{p}{2} - x_v = \dfrac{p}{2} - \dfrac{p}{4} = \dfrac{p}{4}$, ou seja, o retângulo de perímetro p tem área máxima quando o retângulo é um quadrado de lado $\dfrac{p}{4}$, e a área máxima é igual a $\left(\dfrac{p}{4}\right)^2 = \dfrac{p^2}{16}$.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, e considere $V\left(x_v, y_v\right)$ o vértice da parábola correspondente ao gráfico de f.

- Se $a > 0$, então V é chamado **ponto de mínimo** do gráfico de f e y_v é o **valor mínimo** de f.



- Se $a < 0$, então V é chamado **ponto de máximo** do gráfico de f e y_v é o **valor máximo** de f.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Tem-se $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Estudo do sinal da função quadrática

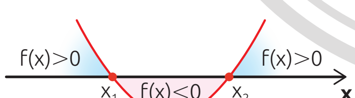
No capítulo **3**, vimos como estudar o sinal de uma função afim f ao determinar os valores de x para os quais $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$.

A representação gráfica da função quadrática auxilia no estudo do sinal. Observe os três possíveis casos, considerando a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1º caso: $\Delta > 0$

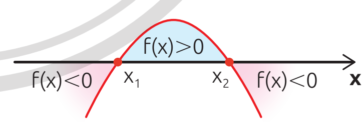
Nesse caso, f possui zeros x_1 e x_2, com $x_1 \neq x_2$.

Se $a > 0$:



- $f(x) > 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$
- $f(x) = 0$ para $x = x_1$ ou $x = x_2$
- $f(x) < 0$ para $x_1 < x < x_2$

Se $a < 0$:

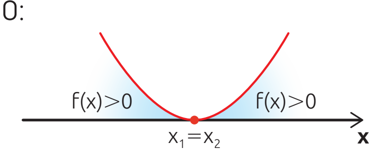


- $f(x) > 0$ para $x_1 < x < x_2$
- $f(x) = 0$ para $x = x_1$ ou $x = x_2$
- $f(x) < 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$

2º caso: $\Delta = 0$

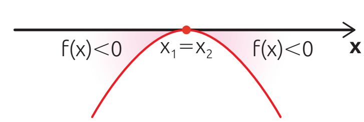
Nesse caso, f possui zeros x_1 e x_2, com $x_1 = x_2$.

Se $a > 0$:



- $f(x) > 0$ para $x \neq x_1$
- $f(x) = 0$ para $x = x_1$
- não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0$

Se $a < 0$:



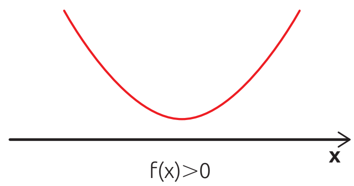
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

- não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$
- $f(x) = 0$ para $x = x_1$
- $f(x) < 0$ para $x \neq x_1$

3º caso: $\Delta < 0$

Nesse caso, f não possui zero.

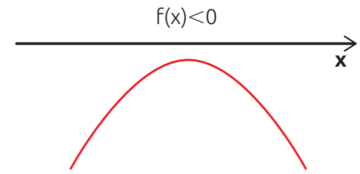
Se $a > 0$:



$f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant 0$

Se $a < 0$:



não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geqslant 0$

$f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

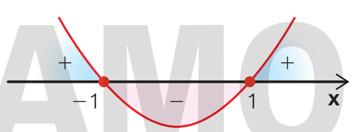
Exemplos

Vamos estudar o sinal da função quadrática dada por:

a) $f(x) = x^2 - 1$

Zeros de f:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$



A concavidade da parábola é voltada para cima, pois $a = 1 > 0$.

Assim:

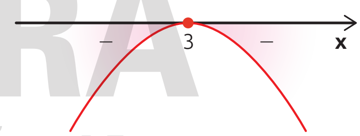
- $f(x) > 0$ para $x < -1$ ou $x > 1$
- $f(x) = 0$ para $x = -1$ ou $x = 1$
- $f(x) < 0$ para $-1 < x < 1$

b) $g(x) = -x^2 + 6x - 9$.

Zeros de g:

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm 0}{-2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$



A concavidade da parábola é voltada para baixo, pois $a = -1 < 0$.

Assim:

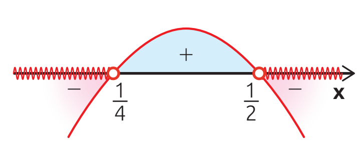
- $g(x) = 0$ para $x = 3$
- $g(x) < 0$ para $x \neq 3$

O estudo de sinal pode ser útil para determinar o conjunto solução de inequações. Veja a seguir como podemos obter o conjunto solução da inequação do 2º grau $-8x^2 + 6x - 1 < 0$ no conjunto dos números reais.

Raízes de $-8x^2 + 6x - 1 = 0$:

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-8) \cdot (-1) = 4 \qquad x = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-8)} = \frac{-6 \pm 2}{-16} \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4} \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Observe no esquema os intervalos nos quais a função quadrática $f(x) = -8x^2 + 6x - 1$ é negativa.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Temos $f(x) < 0$ para $x < \frac{1}{4}$ ou $x > \frac{1}{2}$. Portanto,

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{4} \text{ ou } x > \frac{1}{2}\right\}$.

R8. (UFSM-RS) Um jogador de basquete lança uma bola em direção à cesta e ela descreve um arco de parábola. A lei que descreve essa parábola é $h(t) = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{5}{3}t + 2$, onde t é o tempo decorrido em segundos após o lançamento, e h é a altura em metros. Assim, é correto afirmar:

a) A bola atinge o solo em 5 s.

b) A imagem de $h(t)$ é dada pelo conjunto $\left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{49}{9}\right\}$.

c) O vértice da parábola é o ponto $\left(\frac{5}{2}, \frac{49}{12}\right)$.

d) Para todo $t \in [-6, 1]$, $h(t) \geqslant 0$.

e) A altura máxima atingida pela bola é igual a $\frac{7}{3}$ m.

Resolução

Vamos analisar cada item separadamente.

a) A bola atinge o solo quando $h(t) = 0$. Logo precisamos determinar as raízes da equação de 2º grau $-\frac{1}{3}t^2 + \frac{5}{3}t + 2 = 0$.

$$\Delta = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 2 = \frac{49}{9}$$

$$t = \frac{-\frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9}}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{-\frac{5}{3} \pm \frac{7}{3}}{-\frac{2}{3}} \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 6 \end{cases}$$

Como a grandeza envolvida é o tempo, a raiz $t_1 = -1$ não convém. Assim, a bola chegará ao solo em 6 s.

b) Sabendo que $a = -\frac{1}{3} < 0$, obtemos

$Im(h) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{\Delta}{4a}\right\}$. Além disso:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\frac{49}{9}}{4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{49}{12}$$

Portanto, $Im(h) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{49}{12}\right\}$.

c) O vértice da parábola corresponde a

$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, sendo $y_V = \frac{49}{12}$ e:

$$x_V = -\frac{\frac{5}{3}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{5}{2}$$

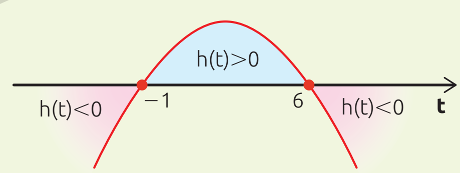
Logo $V\left(\frac{5}{2}, \frac{49}{12}\right)$.

d) Resolvendo a inequação $-\frac{1}{3}t^2 + \frac{5}{3}t + 2 \geqslant 0$, obtemos os valores de t para os quais a função $h(t) \geqslant 0$. Temos pelos itens anteriores que:

$a = -\frac{1}{3} < 0$ $\qquad$ $\Delta = \frac{49}{9} > 0$

$h(t) = 0$ para $t_1 = -1$ ou $t_2 = 6$

Desse modo:



Sergio Lima/ID/BR

Portanto, $h(t) \geqslant 0$ para todo $t \in [-1, 6]$.

e) A altura máxima atingida pela bola corresponde ao valor máximo da função h, ou seja, ao y_V. Conforme o item **c**, temos $y_V = \frac{49}{12}$. Por isso, a altura máxima atingida pela bola é igual a $\frac{49}{12}$ m.

Logo a alternativa correta é **c**.

R9. Determine a solução da inequação simultânea $0 < -x^2 - 2x + 3 \leqslant 3$ no conjunto dos números reais.

Resolução

Resolvemos a inequação simultânea
$0 < -x^2 - 2x + 3 \leqslant 3$
determinando para quais valores de x ambas as inequações $-x^2 - 2x + 3 > 0$ e $-x^2 - 2x + 3 \leqslant 3$ são satisfeitas.

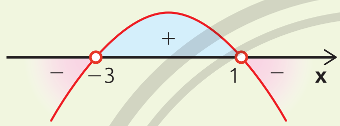
- $-x^2 - 2x + 3 > 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (3) = 16$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm 4}{-2} \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$a = -1 < 0$;

$\Delta = 16 > 0$



A solução da inequação $-x^2 - 2x + 3 > 0$ é $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1\}$.

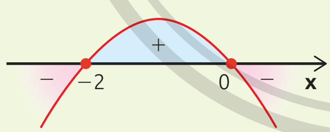
- $-x^2 - 2x + 3 \leqslant 3 \Rightarrow -x^2 - 2x \leqslant 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 4$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm 2}{-2} \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

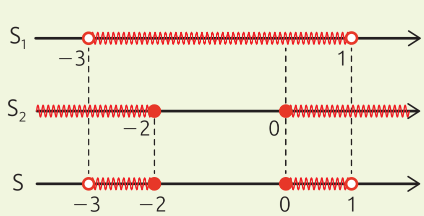
$a = -1 < 0$;

$\Delta = 4 > 0$



A solução da inequação $-x^2 - 2x + 3 \leqslant 3$ é $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 0\}$.

Realizando $S_1 \cap S_2$ obtemos a solução S da inequação $0 < -x^2 - 2x + 3 \leqslant 3$.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant -2 \text{ ou } 0 \leqslant x < 1\}$.

R10. Resolva a inequação quociente $\dfrac{2x^2 + 12x + 10}{-x - 5} < 0$, no conjunto dos reais.

Resolução

Essa inequação está definida no conjunto dos números reais apenas quando o denominador $-x - 5 < 0$, ou seja, quando $x \neq -5$.

Precisamos determinar para quais valores de x o quociente $\dfrac{2x^2 + 12x + 10}{-x - 5}$ é negativo. Nesse caso, vamos analisar os sinais de $f(x) = 2x^2 + 12x + 10$ e $g(x) = -x - 5$ separadamente.

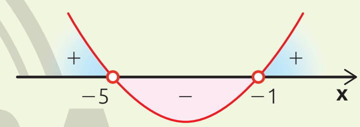
- $f(x) = 2x^2 + 12x + 10$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = 64$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 2} = \frac{-12 \pm 8}{4} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

$a = 2 > 0$;

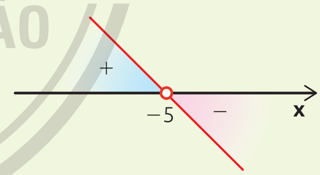
$\Delta = 64 > 0$



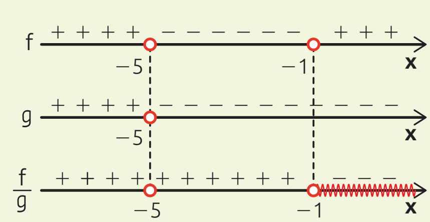
- $g(x) = -x - 5$

$a = -1 < 0$

$-x - 5 = 0 \Rightarrow -x = 5 \Rightarrow x = -5$



Identificando o intervalo em que $\dfrac{f}{g} < 0$ no esquema e combinando os sinais das funções f e g, obtemos a solução da inequação $\dfrac{2x^2 + 12x + 10}{-x - 5} < 0$.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Portanto, a solução da inequação $\dfrac{2x^2 + 12x + 10}{-x - 5} < 0$ é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$.

Atividades

31. Observe as funções quadráticas a seguir e faça no caderno o que se pede.

- $f(x) = (-2x)^2 + 2x + 1$
- $g(x) = -x^2 + 3$
- $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 12$
- $p(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x - 5$

a) Identifique se a concavidade da parábola correspondente a cada função é voltada para baixo ou para cima.

b) Calcule os zeros, se houver, e as coordenadas do vértice de cada uma das parábolas correspondentes a essas funções.

c) Determine as coordenadas dos pontos em que os gráficos dessas funções intersectam o eixo Ox e o eixo Oy.

32. Obtenha o valor x_v para as funções quadráticas a seguir.

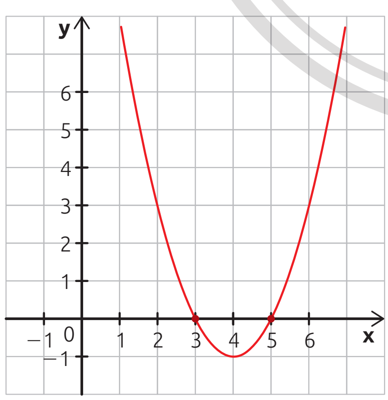
a) $f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$

b) $g(x) = 5(x - 3)(x - 3)$

c) $h(x) = -x(x + 7)$

d) $p(x) = -\frac{1}{4}(x - 4)(x - 28)$

33. Dadas as leis de formação das funções afim, identifique em quantos pontos seus gráficos intersectam a parábola a seguir.



a) $g(x) = -1$

b) $h(x) = 5$

c) $p(x) = -2$

d) $q(x) = x$

34. Sejam as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 - x + 7$ e $g(x) = 3x - 8$.

Determine no caderno se a parábola e a reta referentes às funções possuem pontos comuns e, se possuírem, identifique quais são.

35. Determine no caderno o conjunto imagem das funções quadráticas.

a) $f(x) = -2x^2 - 2x - 3$

b) $g(x) = x^2 - 6x + 6$

c) $h(x) = 4x^2$

d) $p(x) = -x^2 - 8x - 11$

36. Seja a função real definida por $f(x) = -5x^2 + 7x - 6$, o conjunto imagem dessa função são os valores reais de $f(x)$ tal que:

a) $f(x) \geqslant -3{,}55$

b) $f(x) \geqslant 3{,}55$

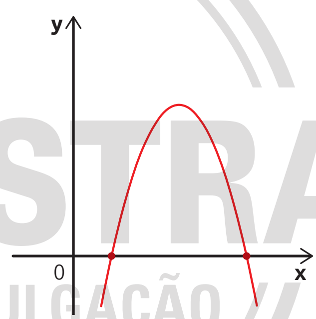
c) $f(x) < -3{,}55$

d) $f(x) \leqslant -3{,}55$

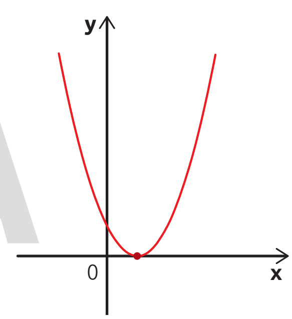
37. Observe as parábolas e identifique:

- se $a < 0$ ou $a > 0$;
- se $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta > 0$.

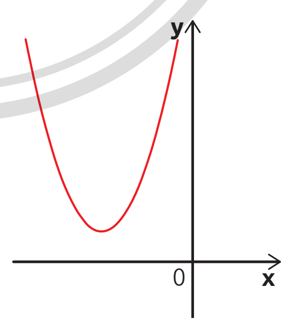
a)



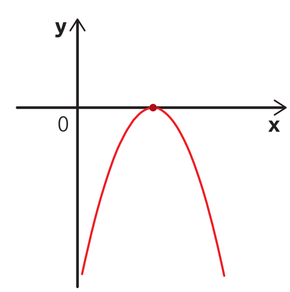
c)



b)



d)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

38. Observe as funções quadráticas.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = (-2x)^2 + 4x + 1$

c) $f(x) = -3x^2 - 12x - 8$

d) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Em quais itens f admite valor máximo? E em quais deles f admite valor mínimo?

39. Seja a função quadrática $f(x) = (3k + 1)x^2 + 5x - 4$, com $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq -\frac{1}{3}$. Para quais valores de k a função assume:

- valor mínimo?
- valor máximo?

40. (Enem/Inep) O apresentador de um programa de auditório propôs aos participantes de uma competição a seguinte tarefa: cada participante teria 10 minutos para recolher moedas douradas colocadas aleatoriamente em um terreno destinado à realização da competição. A pontuação dos competidores seria calculada ao final do tempo destinado a cada um dos participantes, no qual as moedas coletadas por eles seriam contadas e a pontuação de cada um seria calculada, subtraindo do número de moedas coletadas uma porcentagem de valor igual ao número de moedas coletadas. Dessa forma, um participante que coletasse 60 moedas teria sua pontuação calculada da seguinte forma: pontuação = 60 − 36 (60% de 60) = 24. O vencedor da prova seria o participante que alcançasse a maior pontuação.

Qual será o limite máximo de pontos que um competidor pode alcançar nessa prova?

a) 0
b) 25
c) 50
d) 75
e) 100

41. Ferramentas Esboce no caderno o gráfico das funções quadráticas e determine para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ elas são positivas, iguais a zero e negativas.

a) $f(x) = x^2 + 6x + 5$
b) $g(x) = -x^2 + x + 2$
c) $h(x) = 5x^2 + 2x + 1$
d) $p(x) = -3x^2 + 6x - 3$

42. A função $h: [0, 16] \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = -5x^2 + 80x$, descreve a altura em função do tempo de um projétil lançado do solo, com x em segundos e h em metros.

a) A que altura do solo o projétil se encontra:
- 1 s após o lançamento?
- 2 s após o lançamento?

b) Qual deve ser a altura máxima atingida por esse projétil?

c) Esse projétil deve atingir o solo a quanto tempo após o lançamento?

43. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = (k - 2)x^2 - 2x - 3$, com $k \in \mathbb{R}$.

Quais devem ser os valores reais de k para que $f(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$?

44. O custo de um dia de trabalho em uma empresa pode ser descrito pela expressão $C(x) = 2x^2 + 8x$, em que $x \in \mathbb{N}^*$ representa a quantidade de clientes atendidos. O valor recebido em um dia é representado pela expressão $V(x) = 60x$.

Sabendo que o lucro é dado por $L(x) = V(x) - C(x)$ e que a partir de certa quantidade de clientes fica inviável o atendimento, devido ao aumento do custo, resolva os itens no caderno.

a) Para que a empresa tenha lucro máximo em um dia, quantos clientes devem ser atendidos?

b) Qual é a quantidade máxima de clientes que essa empresa pode atender em um dia, sem que tenha prejuízo?

45. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações.

a) $x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$

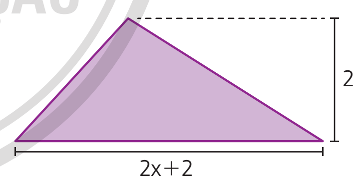
b) $(x^2 - 1)(x + 6) > 0$

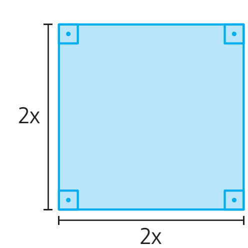
c) $\dfrac{-x^2 + 2}{2x - 6} \leqslant 0$

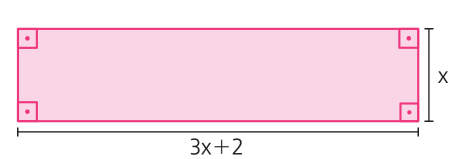
d) $2x^2 + 4x - 10 \leqslant 4x - 2 < 2$

e) $3x - 3 \leqslant -3x^2 - 3 \leqslant 6x - 3$

46. Nas imagens a seguir, sejam T, Q e R as áreas do triângulo, do quadrado e do retângulo, respectivamente.







Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Quais são os valores de x para que $T < Q < R$?

Verificando rota

1. Cite situações do seu dia a dia que podem ser representadas por uma função afim.

2. Ao definir que o gráfico da função afim é uma reta, por que é necessário especificar que ela não deve ser vertical?

3. No capítulo **3**, foram apresentados alguns casos particulares de função afim: função identidade, função constante e função linear. Escreva os valores que os coeficientes a e b devem assumir em cada caso.

4. Toda função afim possui zero? Justifique.

5. Em relação à solução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas especifique quando um sistema é considerado:

- determinado;
- impossível;
- indeterminado.

6. Geometricamente, o que representa o módulo ou o valor absoluto?

7. Defina função modular.

8. A função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ é sobrejetora? Justifique.

9. Justifique por que o coeficiente a de uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ não pode ser igual a zero.

10. A função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ é injetora? Justifique.

11. Cite pelo menos uma maneira de determinar a forma canônica $\left(a(x - m)^2 + k\right)$ de um trinômio do 2º grau.

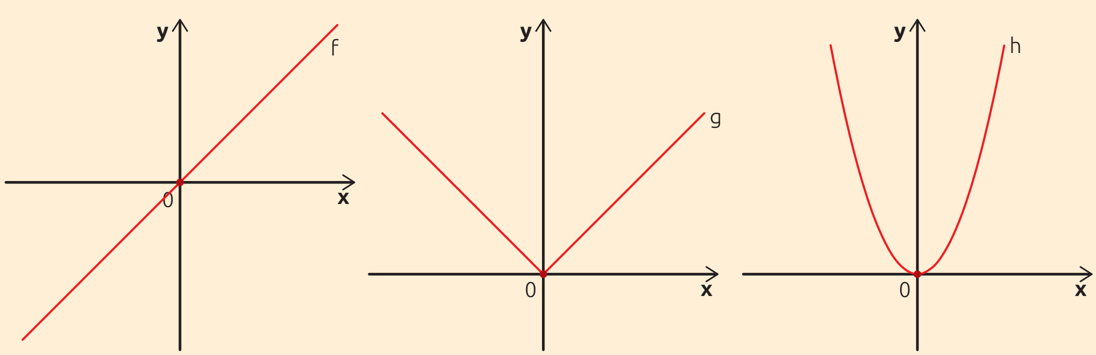
12. Geometricamente o que representa o vértice da parábola?

13. Considerando a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, determine:

a) as coordenadas do ponto em que o gráfico de f intersecta o eixo das ordenadas;

b) quais valores o coeficiente a e o discriminante Δ devem assumir, para que $f(x) > 0$ em todo o intervalo real.

14. Os gráficos a seguir representam as funções $f(x) = x$, $g(x) = |x|$ e $h(x) = x^2$, todas definidas no conjunto dos números reais. Identifique semelhanças e diferenças entre o gráfico das funções f, g e h.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

15. A página de abertura da unidade **2** apresentou a energia eólica como assunto inicial, informando que a quantidade de energia elétrica produzida por uma turbina eólica pode ser determinada a partir de sua potência e do tempo de atividade. Qual dos conteúdos trabalhados durante esta unidade se relaciona com este tema?

Ampliando fronteiras

Queda livre

Ao deixar cair dois objetos com massas diferentes, qual tocará o solo primeiro: o mais leve ou o mais pesado? Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) sugeria que um corpo com o dobro da massa de outro atingiria o chão na metade do tempo que o outro levaria.

Por exemplo, se pensarmos em jogar da mesma altura uma folha de papel e uma borracha escolar poderíamos concluir que, como a folha de papel leva mais tempo para tocar o solo por ser mais leve que a borracha escolar, a massa influencia na queda livre, certo? Errado! Na realidade, o que de fato influencia nessa queda mais demorada da folha de papel é a resistência do ar, pois no vácuo esses objetos atingiriam o solo ao mesmo tempo, ainda que soltos no mesmo instante e à mesma altura.

Esse princípio pode ser mais bem compreendido se pensarmos em repetir a experiência com a folha de papel amassada. Faça o experimento!

Vácuo: absolutamente vazio, oco.

Em algumas biografias de Galileu Galilei (1564-1642), conta-se que ele soltou do alto da Torre de Pisa dois corpos esféricos de volumes e massas diferentes. Esse experimento teria desbancado os cientistas aristotélicos, que acreditavam que o corpo mais pesado tocaria o solo primeiro. O fato não teria sido comprovado na demonstração de Galileu porque os dois atingiram o chão quase ao mesmo instante. Contudo, o historiador Alexandre Koyré (1892-1964) afirma que esse teste não ocorreu, teria sido apenas um experimento mental do matemático.

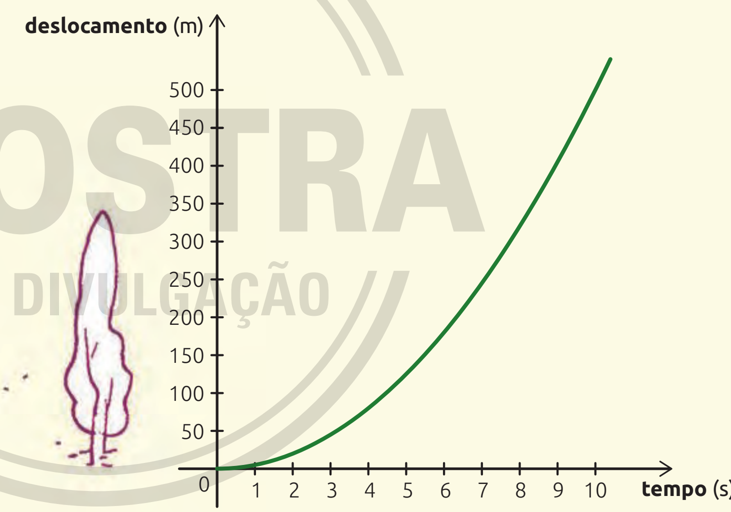
Quando um corpo está em queda livre próximo à superfície da Terra sofre efeitos de seu campo gravitacional, ou seja, ele é acelerado pela gravidade e sua velocidade aumenta (varia). Por isso dizemos que seu movimento é uniformemente variado. Uma equação para determinar o deslocamento do corpo em queda livre (desconsiderando resistência do ar) é dada por $\Delta s = \frac{1}{2}gt^2$, em que Δs é o deslocamento vertical, g a aceleração da gravidade e t o tempo.

A gravidade é uma grandeza vetorial e fica bem definida quando indicamos a direção (vertical), o sentido (de cima para baixo) e o módulo (aproximadamente 10 m/s²). Em queda livre é comum considerar $g = +10$ m/s² (positiva), pois o corpo cai na mesma direção e no mesmo sentido da gravidade. O salto de um paraquedista, antes do paraquedas abrir, é um exemplo de corpo em queda livre.

Izaac Brito/ASC Imagens

Assim, tomando $\Delta s = f(t)$ e considerando o valor de $g = 10$ m/s², temos a função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 5t^2$, que relaciona o deslocamento e o tempo em queda livre.

Deslocamento de determinado corpo em queda livre, em função do tempo



Sergio Lima/ID/BR

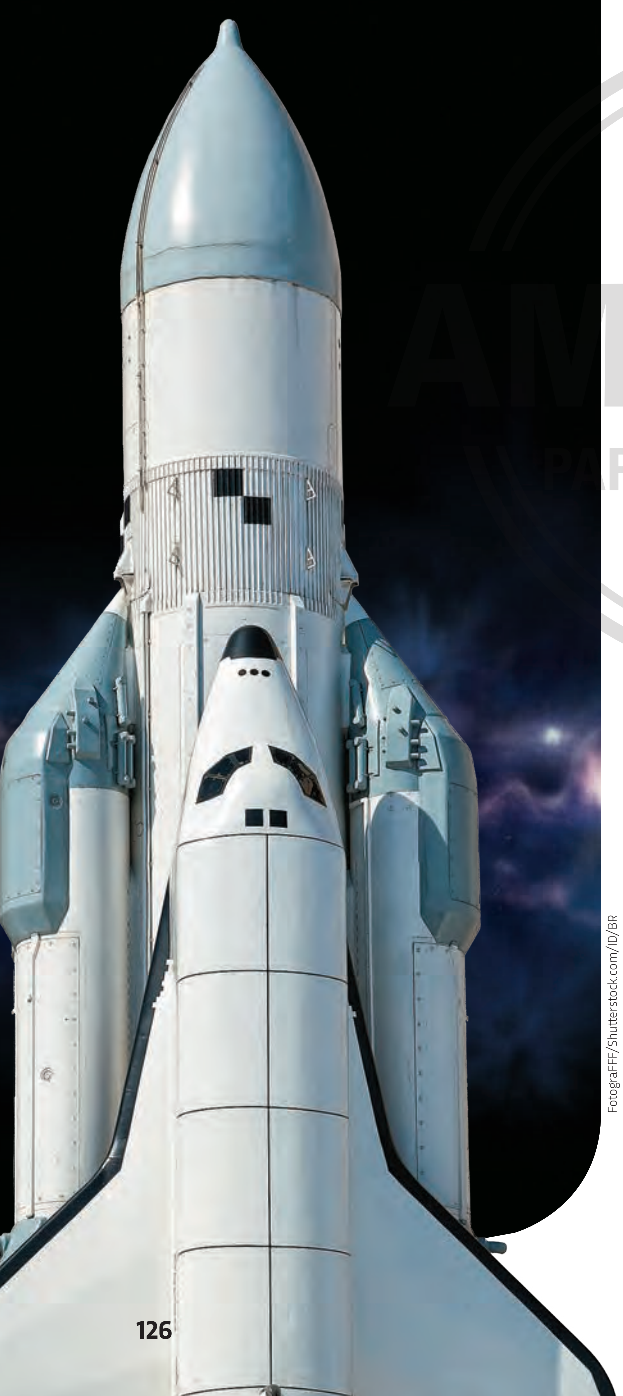
Izaac Brito/ASC Imagens

A Explique com suas palavras o que a teoria de Galileu propõe a respeito de queda livre.

B Na sua opinião, por que o valor numérico atribuído à aceleração é dado em módulo?

C Se um objeto foi solto do topo de uma torre e demorou 4 s para tocar o solo, qual a altura aproximada da torre, em metros? Desconsidere a resistência do ar.

Matemática em ação



FotograFFF/Shutterstock.com/ID/BR

Vamos ao espaço!

Bate-papo inicial

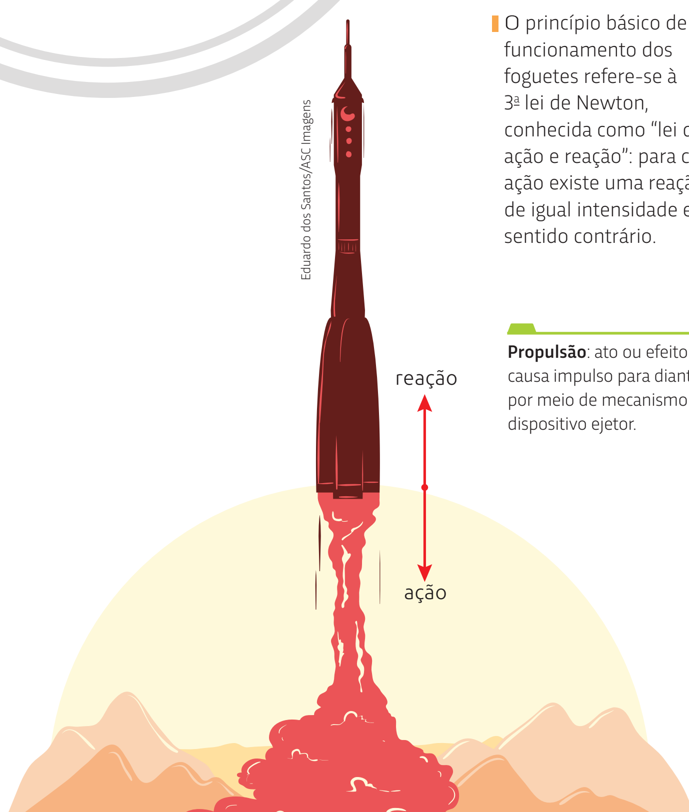
- Você já viu um foguete na televisão, internet ou em outro meio de comunicação? Em caso afirmativo, descreva-o.
- Em sua opinião, por que existem pessoas interessadas em explorar o espaço sideral?
- Converse com seus colegas e o professor a respeito da origem do Universo.

O Universo encanta o ser humano, por isso as questões que envolvem sua origem, magnitude e composição são constantemente discutidas. Especialmente sobre a sua origem, quanto mais desvendamos, mais nos conscientizamos de que sabemos pouco a seu respeito, o que se torna o próprio combustível para novas pesquisas.

Nessa incessante busca, a ciência se ocupa em desenvolver tecnologias cada vez mais sofisticadas para explorar o espaço, que na maioria das vezes exigem investimentos financeiros altíssimos. Contudo, sabemos que as despesas se justificam pelos grandes benefícios que trazem à humanidade.

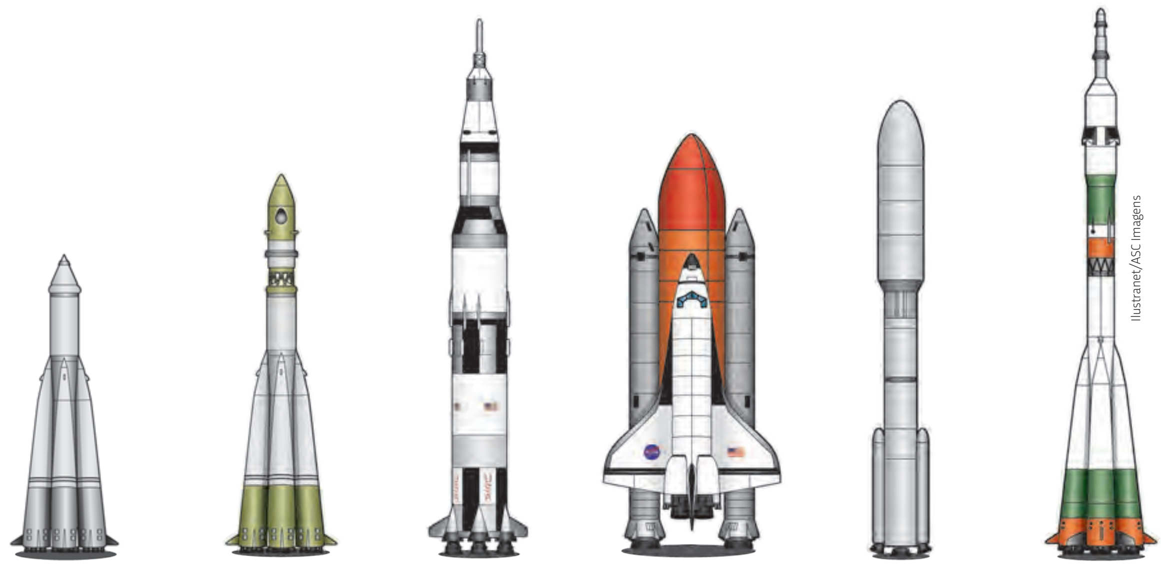
De satélites orbitando a Terra a sondas girando em redor de Marte, as experiências espaciais vão cada vez mais longe. Em geral, os foguetes são os responsáveis por colocar espaçonaves, sondas, ônibus espaciais e satélites em órbita. Neles ficam os combustíveis utilizados para a propulsão que leva esses objetos ao espaço.

Eduardo dos Santos/ASC Imagens



O princípio básico de funcionamento dos foguetes refere-se à 3ª lei de Newton, conhecida como "lei da ação e reação": para cada ação existe uma reação de igual intensidade e sentido contrário.

Propulsão: ato ou efeito que causa impulso para diante, por meio de mecanismo ou dispositivo ejetor.



Ilustranet/ASC Imagens

1957
A União Soviética lança o Sputnik, primeiro satélite artificial da Terra.

1961
A espaçonave soviética Vostok 1 é a primeira a levar o homem ao espaço.

1969
Os Estados Unidos fabricam o maior foguete até o momento: Saturn V. Ele foi responsável por levar a missão Apollo 11 à Lua.

1981
É lançado o primeiro ônibus espacial. Em relação às espaçonaves, os ônibus espaciais são diferentes porque podiam ser reaproveitados em outras missões.

2012
A sonda Curiosity é lançada ao planeta Marte pelo foguete Atlas V.

2015
As naves espaciais russas Soyus eram as únicas capazes de levar tripulação à Estação Espacial Internacional. Em julho de 2015, três astronautas foram enviados para essa estação.

Fonte de pesquisa. NASA. Disponível em: <www.nasa.gov/pdf/153410main_Rockets_History.pdf>. Acesso em: 12 abr. 2016.

Mão na massa

Vimos que os foguetes são estruturas essenciais para o lançamento de objetos no espaço e funcionam basicamente sob o princípio da ação e reação. Deste modo, propomos uma experiência para conhecermos um pouco mais sobre o funcionamento deles. Para isso, construiremos alguns protótipos.

- Inicialmente, o professor vai organizá-los em grupos. Cada grupo deverá providenciar os seguintes materiais para a construção do protótipo de um foguete:
  - tesoura com pontas arredondadas;
  - compasso;
  - duas garrafas PET de 2 L iguais e vazias;
  - 2 rolhas que encaixem bem na boca da garrafa;
  - 2 folhas de papel-cartão;
  - fita adesiva;
  - linha de costura ou de pipa;
  - um pacote de bicarbonato de sódio (cerca de 80 g);
  - cerca de 750 mL de vinagre;
  - 2 filtros de papel de coar café.
- O professor explicará o procedimento para construir o protótipo do foguete. Depois de pronto, ele os levará em um local aberto, do qual seja possível lançá-lo.
- Levem caderno e caneta para anotarem alguns dados do experimento. Será preciso também providenciar dois cronômetros que possam ser utilizados por todos os grupos.
- O professor será responsável por realizar o lançamento de cada um dos foguetes duas vezes. Dois alunos do grupo devem ficar atentos a cada lançamento para iniciarem os cronômetros assim que o foguete sair do solo e pará-los quando tocar o solo. Outros dois alunos anotarão o tempo de voo.
- Com os dados em mãos vocês determinarão valores aproximados para a velocidade inicial e a altura máxima atingida pelo foguete. A discussão de como realizar os cálculos será conduzida pelo professor.

unidade 3

- **capítulo 6** Função exponencial
- **capítulo 7** Função logarítmica

A Lua é o único satélite natural do nosso planeta. Por não ser um corpo luminoso, mas sim iluminado pelo Sol, o modo como a enxergamos varia conforme ela orbita a Terra. Alguns pesquisadores mapeiam sua trajetória e estudam suas características e medidas porque são fatores que interferem diretamente na Terra, como a influência gravitacional e a oscilação das marés, por exemplo.

As representações em notação científica de diversas medidas associadas aos corpos celestes, como os satélites naturais, as estrelas e os planetas, relacionam-se com o conteúdo de potências, assunto que será abordado nesta unidade.

The Asahi Shimbun/Getty Images

"Lua de sangue" observada no céu de Tóquio, Japão, em abril de 2014.

A imagem é uma vista aérea da parte leste da capital japonesa. Nela, destaca-se a torre de radiodifusão Tokyo Skytree, em Sumida. A cor avermelhada, que aparece na fotografia, refere-se a um fenômeno que ocorre durante os eclipses totais da Lua, eventos não muito frequentes.

Nesta unidade, você vai estudar a utilidade da potenciação para formalizar os conceitos de função exponencial e função logarítmica, relacionando essas duas funções como inversas entre si, além de aplicar a função exponencial ao cálculo de juros compostos.

capítulo

6 Função exponencial

Potências de base real positiva e suas propriedades

Até agora estudamos as funções afim, modular, quadrática e suas características. Neste capítulo, veremos a **função exponencial**. Antes, porém, vamos apresentar algumas ideias a respeito das potências de base real positiva e de suas propriedades, que serão úteis ao estudarmos as funções, as equações e as inequações exponenciais, assim como os logaritmos, assunto do próximo capítulo.

Potência com expoente natural não nulo

A potenciação com expoente natural corresponde basicamente a uma multiplicação de fatores iguais, por exemplo:

$$\underbrace{3}_{\text{base}}{}^{\overbrace{4}^{\text{expoente}}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{4 fatores iguais}} = \underbrace{81}_{\text{potência}}$$

Dados um número real positivo a e um número $n \in \mathbb{N}^*$, chama-se potência de base a e expoente n o número a^n definido como o produto de n fatores iguais a a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Para o caso particular em que $n = 1$, definimos $a^1 = a$, pois não há produto de um só fator.

Exemplos

- $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$
- $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
- $\left(\sqrt{6}\right)^1 = \sqrt{6}$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$
- $(2{,}4)^2 = 2{,}4 \cdot 2{,}4 = 5{,}76$

Propriedades das potências com expoente natural

Considere os números reais positivos a e b e os números naturais não nulos m e n.

a) Multiplicação de potências de mesma base (propriedade fundamental):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Essa propriedade é válida, pois em ambos os membros da igualdade temos o produto de $m + n$ fatores iguais a a.

Exemplo

$$4^2 \cdot 4^3 = \underbrace{(4 \cdot 4)}_{4^2}\underbrace{(4 \cdot 4 \cdot 4)}_{4^3} = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 4^{2+3}$$

Essa propriedade continua válida para uma quantidade qualquer de fatores, ou seja, para $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k \in \mathbb{N}^*$ vale:

$$\underbrace{a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot a^{m_3} \cdot \ldots \cdot a^{m_k}}_{k \text{ fatores}} = a^{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_k}$$

Exemplo

$$7^3 \cdot 7^2 \cdot 7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^9 = 7^{3+2+4}$$

Para o caso particular em que $m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = m_k = m$, temos a próxima propriedade.

b Potência de potência:

$$\boxed{(a^m)^k = a^{m\,k}}$$

Exemplo

$$\left(9^2\right)^4 = 9^2 \cdot 9^2 \cdot 9^2 \cdot 9^2 = 9^{2+2+2+2} = 9^8 = 9^{2 \cdot 4}$$

c Divisão de potência de mesma base:

$$\boxed{a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ com } m > n}$$

Exemplo

$$5^6 : 5^2 = \frac{5^6}{5^2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5} = 5^4 = 5^{6-2}$$

d Multiplicação de potência de mesmo expoente:

$$\boxed{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m}$$

Exemplo

$$2^3 \cdot 8^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 2 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 8 = (2 \cdot 8) \cdot (2 \cdot 8) \cdot (2 \cdot 8) = (2 \cdot 8)^3$$

e Divisão de potência de mesmo expoente:

$$\boxed{a^m : b^m = (a : b)^m}$$

Exemplo

$$3^4 : 10^4 = \frac{3^4}{10^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \left(\frac{3}{10}\right)^4 = (3:10)^4$$

Potência com expoente inteiro

Para atribuir significado à potência a^n, com a real positivo e $n \in \mathbb{Z}$, devemos manter válida a propriedade fundamental $\left(a^m \cdot a^n = a^{m+n}\right)$.

Inicialmente vamos verificar qual deve ser o valor de a^0, sendo a um número real positivo. Como a propriedade fundamental deve ser válida, da igualdade $a^0 \cdot a^1 = a^{0+1}$ temos $a^0 \cdot a = a$, logo, a única definição possível é $a^0 = 1$.

Dado qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, devemos ter $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$.

Logo, se $a^{-n} \cdot a^n = 1$, então é preciso definir que $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$.

Desse modo, estendemos o conceito de potência para o número real a positivo com expoentes inteiros quaisquer, mantendo válida a propriedade fundamental.

Exemplos

- $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$
- $\left(\frac{3}{8}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{64}} = \frac{64}{9}$
- $(0{,}7)^{-1} = \left(\frac{7}{10}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{7}{10}\right)^1} = \frac{1}{\frac{7}{10}} = \frac{10}{7}$

O número $\frac{1}{x}$, com $x \neq 0$, é chamado inverso de x. Assim, se $a > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, então a^{-n} é o inverso de a^n.

Potência com expoente racional

Para atribuir significado à potência a^r, com a real positivo e $r = \frac{m}{n}$ um número racional (sendo $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$), devemos manter válida a propriedade fundamental $\left(a^r \cdot a^s = a^{r+s}\right)$. Desta igualdade, resulta:

$$(a^r)^n = \underbrace{a^r \cdot a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r}_{n \text{ fatores}} = a^{\overbrace{r+r+r+\ldots+r}^{n \text{ parcelas}}} = a^{rn}$$

Substituindo r por $\frac{m}{n}$, temos $a^{rn} = a^{\frac{m}{n}n} = a^m$.

Portanto, a^r, com $r = \frac{m}{n}$, é um número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m. Por definição de raiz, esse número é $\sqrt[n]{a^m}$, a raiz n-ésima de a^m. Logo, a única definição possível para a potência a^r, com a real positivo e $r = \frac{m}{n}$ é $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplos

- $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$
- $7^{0,5} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$
- $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}} = \sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5]{64}$
- $81^{-0,25} = 81^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81^{-1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$

Potência com expoente irracional

As potências com expoentes irracionais serão abordadas por meio de aproximações. Por exemplo, para calcular um valor aproximado de $3^{\sqrt{7}}$, utilizamos aproximações racionais do número irracional $\sqrt{7}$:

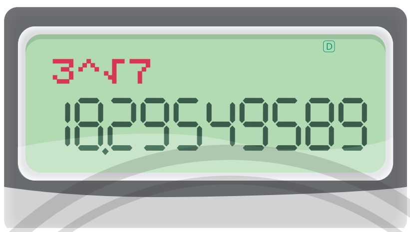
$$2;\ 2{,}6;\ 2{,}64;\ 2{,}645;\ 2{,}6457$$

Definimos as potências de base 3 e expoente racional com as aproximações de $\sqrt{7}$.

$$3^{2},\ 3^{2{,}6},\ 3^{2{,}64},\ 3^{2{,}645},\ 3^{2{,}6457}$$

Com auxílio de uma calculadora podemos calcular essas potências e a aproximação de $3^{\sqrt{7}}$.

- $3^{2} = 9$
- $3^{2{,}6} \simeq 17{,}3986384$
- $3^{2{,}64} \simeq 18{,}18026095$
- $3^{2{,}645} \simeq 18{,}28040102$
- $3^{2{,}6457} \simeq 18{,}29446458$



Eduardo dos Santos/ASC Imagens

O símbolo para calcular potências pode mudar dependendo do modelo da calculadora.

Quanto mais o expoente se aproxima de $\sqrt{7}$, mais a potência se aproxima de $3^{\sqrt{7}}$.

Logo por aproximações de racionais, obtemos o valor aproximado de uma potência a^{m}, com a real positivo e m irracional.

Potência com expoente real

Vimos potências com expoentes racionais e com expoentes irracionais. Como o conjunto dos números reais é dado pela união dos conjuntos dos números racionais e o dos números irracionais, chegamos às potências com expoentes reais mantendo as mesmas propriedades apresentadas anteriormente.

Veja alguns exemplos de potências de base real positiva e expoente real.

- $7^{\frac{1}{8}}$
- $6^{\sqrt{2}}$
- $3^{-0{,}8}$
- $\left(\frac{5}{8}\right)^{-\sqrt{3}}$
- $(6{,}9)^{4}$
- 4^{π}

Atividades resolvidas

R1. Simplifique as expressões.

a) $\dfrac{(1{,}25)^{-2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{5}}{(0{,}8)^{7}}$

b) $8^{0,\bar{6}}\cdot 2\cdot 8^{-0,\bar{3}}$

Resolução

a) $\dfrac{(1{,}25)^{-2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{5}}{(0{,}8)^{7}} = \dfrac{\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{5}}{\left(\frac{4}{5}\right)^{7}} =$

$= \dfrac{\left(\frac{4}{5}\right)^{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{5}}{\left(\frac{4}{5}\right)^{7}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2+5-7} = \left(\frac{4}{5}\right)^{0} = 1$

b) $8^{0,\bar{6}}\cdot 2\cdot 8^{-0,\bar{3}} = \left(2^{3}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot 2\cdot\left(2^{3}\right)^{-\frac{1}{3}} =$

$= 2^{3\cdot\frac{2}{3}}\cdot 2\cdot 2^{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)} = 2^{2+1+(-1)} = 2^{2} = 4$

Atividades resolvidas

R2. A notação científica é uma maneira de apresentar números (em geral números muito grandes ou números muito pequenos) utilizando potências de base 10.

Um número escrito em notação científica consiste no produto de dois números reais em que o primeiro é um número pertencente ao intervalo [1, 10[, e o segundo é uma potência de base 10.

Esse tipo de notação geralmente é muito utilizado em astronomia, que trabalha com números muito grandes. Por exemplo, a massa da Lua é aproximadamente 73 500 000 000 000 000 000 000 kg. Esse número pode ser escrito em notação científica da seguinte maneira: $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg.

Escreva os números apresentados nas situações abaixo em notação científica.

a) A distância entre a Terra e o Sol é cerca de 149 600 000 km.

b) O diâmetro do núcleo de um átomo é aproximadamente 0,00000000000001 m.

Resolução

a) $149\,600\,000 = 1{,}496 \cdot 100\,000\,000 = 1{,}496 \cdot 10^{8}$

Portanto, a distância é cerca de $1{,}496 \cdot 10^{8}$ km.

b) $0{,}00000000000001 =$

$$= \frac{1}{100\,000\,000\,000\,000} = 1 \cdot 10^{-14}$$

Logo, o diâmetro é aproximadamente $1 \cdot 10^{-14}$ m.

R3. (IFSP) A quinoa tem origem nos Andes e é um alimento rico em ferro, fósforo, cálcio, vitaminas B1, B2 e B3 e ainda contém as vitaminas C e E. Admitindo que a quinoa é vendida em sacas de 25 kg, que contêm, cada uma, cerca de 10^{7} grãos, então a massa de um grão de quinoa é, em gramas, aproximadamente:

a) $2{,}5 \cdot 10^{-6}$
b) $2{,}5 \cdot 10^{-3}$
c) $2{,}5 \cdot 10^{0}$
d) $2{,}5 \cdot 10^{1}$
e) $2{,}5 \cdot 10^{2}$

Resolução

$$\frac{25}{10^{7}} = \frac{25}{10 \cdot 10^{-6}} = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$$

$$2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{kg} = 2{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{3}\ \text{g} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{g}$$

Portanto, a alternativa correta é **b**.

R4. Simplifique cada uma das expressões apresentadas a seguir.

a) $\sqrt[3]{32} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$

b) $\dfrac{\sqrt{10} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{5^{-\frac{1}{2}}}$

Resolução

a) $\sqrt[3]{32} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0} = \sqrt[3]{2^{5}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \cdot 1 =$

$$= 2^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^{1} = 2$$

b) $\dfrac{\sqrt{10} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{5^{-\frac{1}{2}}} = \dfrac{10^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}} =$

$$= \left(\frac{10 \cdot 2}{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{20}{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{20 \cdot 5}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = 100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$$

R5. Observe as potências de base 2, a partir de 2^{1}, organizadas em ordem crescente.

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...

Note que o algarismo das unidades das potências formam a sequência:

2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, ...

a) De acordo com essas informações, determine a próxima potência. Qual é o algarismo das unidades dessa potência?

b) Sem calcular a potência, determine o algarismo das unidades da 200ª potência.

Resolução

a) A próxima potência será $2^{10} = 1\,024$. Logo o algarismo das unidades é 4.

b) Observe que o algarismo das unidades das potências se repetem a cada 4 termos. Assim, vamos determinar o algarismo das unidades da 200ª potência analisando o resto da divisão de 200 por 4.

$$\begin{array}{r|l} 200 & 4 \\ \underline{-20} & 50 \\ 000 & \end{array}$$

Como a divisão é exata, ou seja, tem resto zero, o algarismo das unidades da 200ª potência é igual ao 4º termo da sequência dos algarismos das unidades das potências, isto é, 6.

Atividades

1. Utilizando as propriedades de potência com expoente natural, reduza a uma única potência e depois calcule.

a) $\left(3^2\right)^2$
b) $4^{18} : 4^{15}$
c) $5^2 \cdot 5^1$
d) $2^2 \cdot 6^2$
e) $70^3 : 10^3$
f) $\left(10^3\right)^2$

2. Escreva no caderno cada número como uma potência de base 2.

a) 32
b) $\dfrac{1}{128}$
c) $\sqrt{16}$
d) 0,125

3. Simplifique a expressão $\left[\left(3^4\right)^3 : 3^9\right]^{-2}$ no caderno.

4. (Cefet-MG) Sendo $y = \dfrac{4^{10} \cdot 8^{-3} \cdot 16^{-2}}{32}$, a metade do valor de y vale

a) 2^{-3}
b) 2^{-4}
c) 2^{-5}
d) 2^{-6}

5. Escreva no caderno as potências em ordem crescente em cada situação.

a) $3^2, 3^{-1}, \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}, 3^{-2}$
b) $4^{\frac{1}{2}}, 4^{-\frac{1}{2}}, 4^2, 4^{-3}$

6. Calcule as potências.

a) $64^{0,\bar{3}}$
b) $27^{\frac{5}{3}}$
c) $81^{\frac{1}{4}}$
d) 0^3

7. Simplifique as expressões no caderno.

a) $1^{\sqrt{15}} + 1^{\pi}$
b) $\left(3^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$
c) $\left[\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$
d) $1^{\sqrt{6}} - \left(64^{\frac{2}{3}}\right)$

8. Mateus tem uma pequena propriedade onde cultiva, entre outros produtos, feijão. Enquanto estava ensacando feijões para vendê-los, ele fez o seguinte desafio aos seus dois filhos, que gostavam de Matemática.

> "A massa de cada grão de feijão é cerca de $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ g. Eu vou vender estes feijões em sacos de 20 kg. Quantos grãos de feijão, aproximadamente, há, no total, nos 25 sacos que eu vou vender?"

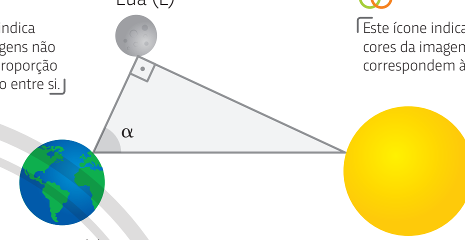
Responda ao desafio feito por Mateus para seus filhos.

9. Simplifique a expressão $(343)^{-\frac{2}{3}}$.

10. **Desafio** (IFSP) Acredita-se que Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.) tenha sido o primeiro cientista a defender a ideia de que a Terra gira em torno do Sol. Com os métodos de aproximação disponíveis na época, Aristarco sabia qual era a distância entre a Terra e a Lua e desejou calcular a distância entre a Terra e o Sol. Ele sabia que, quando a Lua apresentava um quarto iluminado (crescente ou minguante), era possível desenhar um triângulo retângulo formado pela Terra, pela Lua e pelo Sol, como mostra a figura abaixo.

Este ícone indica que as imagens não estão em proporção de tamanho entre si.

Este ícone indica que as cores da imagem não correspondem às reais.



Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

Aristarco, porém, nunca obteve o valor exato dessa distância pela simplicidade de suas medições. Hoje em dia, sabe-se que a distância entre nosso planeta e o Sol é de, aproximadamente, 150 milhões de quilômetros; a distância entre a Terra e a Lua é de, aproximadamente, 400 mil quilômetros. Com base nesses dados, é correto afirmar que o valor da distância entre a Lua e o Sol em quilômetros é, aproximadamente, igual a

a) $150 \cdot 10^6$
b) $187 \cdot 10^5$
c) $251 \cdot 10^8$
d) $280 \cdot 10^7$
e) $300 \cdot 10^9$

11. Que potência de 10 deve multiplicar o número $10^{-2} \cdot 10^3 \cdot 10^{-15} \cdot 10^5$ para que o produto seja igual a 10^2?

12. **Desafio** (UFG) Uma empresa recebeu uma planilha impressa com números inteiros positivos e menores ou iguais a $5^8 \cdot 4^7$. A tarefa de um funcionário consiste em escolher dois números da planilha uma única vez e realizar a operação de multiplicação entre eles. Para que o funcionário tenha precisão absoluta e possa visualizar todos os algarismos do número obtido após a multiplicação, ele deverá utilizar uma calculadora cujo visor tenha capacidade mínima de dígitos igual a:

a) 44
b) 22
c) 20
d) 15
e) 10

13. Escreva os números a seguir em notação científica.

a) 0,0004
b) 5 348
c) 400 000 000
d) 0,0000056

Doenças bacterianas

Elas estão por toda parte, no ar, na água, no solo e também em seu corpo, mas não podemos vê-las a olho nu. As bactérias são seres unicelulares e têm diversas funções ecológicas, podendo se relacionar com outros organismos harmoniosamente ou não.

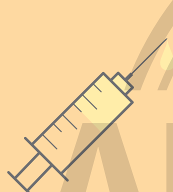
Seres unicelulares > seres formados por apenas uma célula.

As bactérias podem ser benéficas, como os lactobacilos que vivem em nosso intestino e auxiliam no bom funcionamento do sistema digestório. No entanto, algumas são maléficas. Muitas doenças humanas são causadas por elas ao serem inaladas ou ingeridas.

Veja algumas formas de prevenir doenças causadas por bactérias.

Lave regularmente as mãos com sabão, esfregando bem as palmas, entre os dedos, as pontas dos dedos e as costas das mãos.

Evite tocar os olhos, a boca ou o nariz, principalmente se estiver há algum tempo sem lavar as mãos.

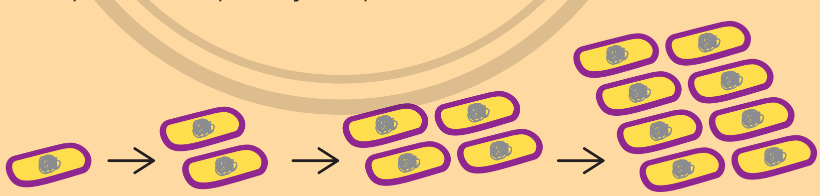


Esteja com todas as vacinas em dia.

Lave bem as frutas, verduras e legumes e, se possível, deixe de molho por 30 min em solução com proporção de 1 L de água para uma colher de sopa de bicarbonato de sódio.

A Em duplas, pesquisem doenças da espécie humana causadas por bactérias. Apresentem aos outros colegas da turma as informações obtidas.

B Observe o esquema de reprodução a partir de uma bactéria.



Ilustrações: Rafael Luís Gaion/ ASC Imagens

Após 8 divisões, quantas novas bactérias existirão? Escreva a lei de formação de uma função que relacione a quantidade de bactérias originadas, a partir de uma, com a quantidade de divisões ocorridas.

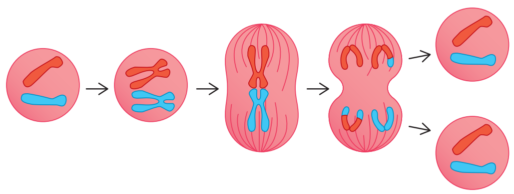
Bactérias *Escherichia coli* encontradas na flora intestinal dos seres humanos e animais de sangue quente. Imagem ampliada cerca de 32 000 vezes e colorizada por micrografia eletrônica.

Dr Gopal Murti/ SPL/Latinstock

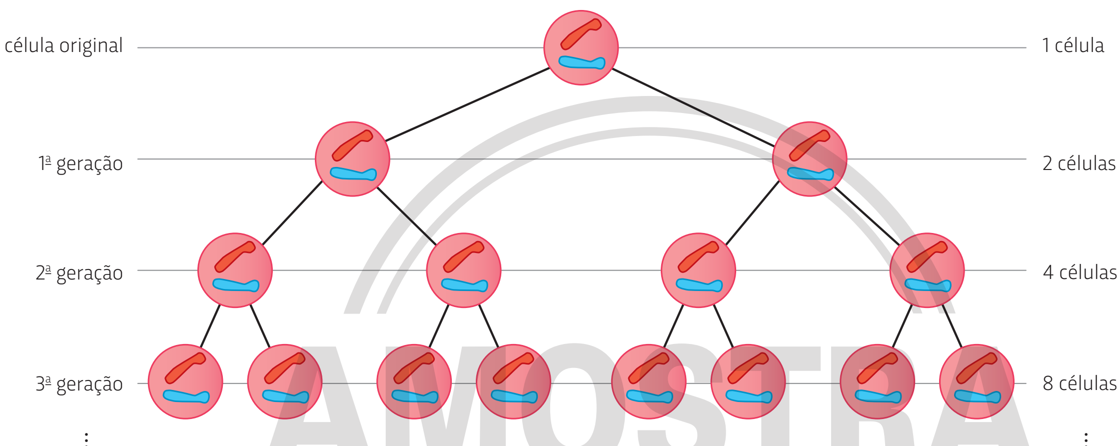
Função exponencial

Em determinadas situações, a relação entre duas variáveis pode ser expressa por uma função, denominada **função exponencial** na qual a variável independente aparece no expoente. Veja uma situação.

Algumas células se reproduzem por mitose, isto é, por meio de uma divisão celular que resulta na formação de duas novas células geneticamente idênticas à original, que nomearemos de células da 1ª geração.



Repetindo esse processo, cada célula da 1ª geração dará origem a duas novas células, nomeadas de células da 2ª geração, e assim sucessivamente, enquanto as condições estiverem favoráveis.



Ilustrações: Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

A quantidade de células pode ser representada com potências de base 2:

- célula original: $1 = 2^0$
- 1ª geração: $2 = 2^1$
- 2ª geração: $4 = 2^2$
- 3ª geração: $8 = 2^3$

⋮

Escreva uma expressão que indique a quantidade de células de uma geração *x*.

Essa situação pode ser representada por uma função que relaciona uma certa geração x com a quantidade de células dessa geração, ou seja, a quantidade $f(x)$ de indivíduos da geração x é dada por:

$$f(x) = 2^x, \text{ com } x \in \mathbb{N}$$

Seja a um número real positivo diferente de 1. A função exponencial de base a, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, é uma função que possui as seguintes propriedades, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

1) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$;
2) $a^1 = a$;
3) $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ quando $a > 1$ e $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_2} < a^{x_1}$ quando $0 < a < 1$.

Uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do tipo exponencial quando $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo a um número real positivo diferente de 1 e b um número real positivo.

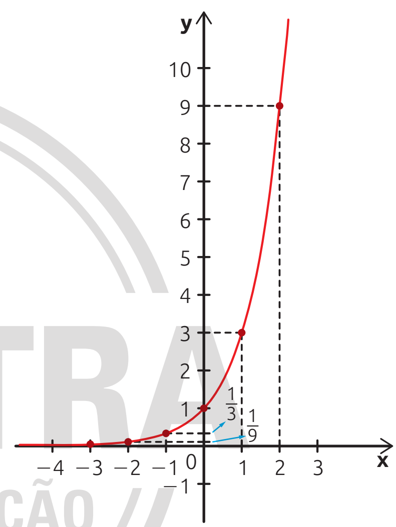
Gráfico de uma função exponencial

Vimos que o gráfico de uma função afim é representado por uma reta, e o gráfico de uma função modular, por uma linha poligonal. Vimos também que o gráfico de uma função quadrática é representado por uma curva denominada parábola. Quanto ao gráfico de uma função exponencial, como podemos representar?

Vamos esboçar o gráfico de duas funções exponenciais na forma $y = a^x$, uma com $a > 1$ e outra com $0 < a < 1$.

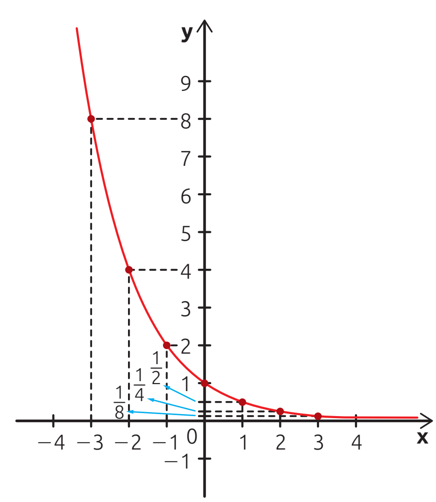
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 3^x$

x	$f(x) = 3^x$	(x, y)
-3	$f(-3) = 3^{-3} = \frac{1}{27}$	$\left(-3, \frac{1}{27}\right)$
-2	$f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$	$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$
-1	$f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$	$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
0	$f(0) = 3^0 = 1$	$(0, 1)$
1	$f(1) = 3^1 = 3$	$(1, 3)$
2	$f(2) = 3^2 = 9$	$(2, 9)$



- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

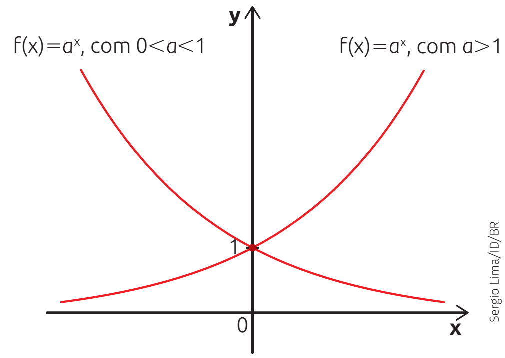
x	$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	(x, y)
-3	$g(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$	$(-3, 8)$
-2	$g(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$	$(-2, 4)$
-1	$g(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	$(-1, 2)$
0	$g(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$	$(0, 1)$
1	$g(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$
2	$g(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$	$\left(2, \frac{1}{4}\right)$
3	$g(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$	$\left(3, \frac{1}{8}\right)$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

O gráfico que representa uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, com a um número real positivo diferente de 1:

- corresponde a uma figura chamada **curva exponencial**;
- intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$;
- não intersecta o eixo Ox, isto é, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$;
- é crescente quando $a > 1$;
- é decrescente quando $0 < a < 1$.



Como a função exponencial é sempre crescente ou decrescente, significa que ela é injetora, ou seja, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$ ou $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$, com a um número real positivo diferente de 1.

Qual é o conjunto imagem das funções exponenciais definidas por $f(x) = a^x$?

R6. Uma função exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é uma função do tipo $f(x) = a^x$ com $a > 0$, $a \neq 1$. Há algumas restrições em relação ao valor de a, para que a função seja exponencial. Desconsiderando essas restrições, descreva o que acontecerá com a função f caso:

a) $a = 1$ b) $a = 0$ c) $a < 0$

Resolução

a) Para $a = 1$ teremos $f(x) = 1^x$. Para qualquer valor atribuído a x o valor de $f(x)$ será igual a 1, ou seja, f será a função constante dada por $f(x) = 1$.

b) Para $a = 0$ teremos $f(x) = 0^x$. Para qualquer valor positivo, diferente de zero, atribuído a x o valor de $f(x)$ será igual a 0, e para $x = 0$ teremos uma indeterminação. No caso em que x é negativo, a potência 0^x não é definida no conjunto dos números reais. Assim, f não estará definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) Para $a < 0$, a função f não estará definida para todos os valores de $x \in \mathbb{R}$. Por exemplo, se $a = -1$ a lei de formação será $f(x) = (-1)^x$. Sendo $x = \frac{1}{2}$, teremos $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ e $\sqrt{-1} \notin CD(f)$.

R7. Certa população de bactérias desenvolve-se, de modo aproximado, de acordo com a função $B\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $B(t) = B_0 \cdot 2{,}7^{0{,}1t}$ com a quantidade inicial B_0 de bactérias da amostra e o tempo t, em dias. Sabendo que, após 20 dias do início do desenvolvimento da população de bactérias, ela contém 500 000 indivíduos, determine a população inicial dessa amostra.

Resolução

De acordo com o enunciado, $B(20) = 500\,000$. Como $B(t) = B_0 \cdot 2{,}7^{0{,}1t}$, temos:

$$B(20) = B_0 \cdot 2{,}7^{0{,}1 \cdot 20}$$

$$500\,000 = B_0 \cdot 2{,}7^2$$

$$B_0 = \frac{500\,000}{7{,}29}$$

$$B_0 \simeq 68\,587$$

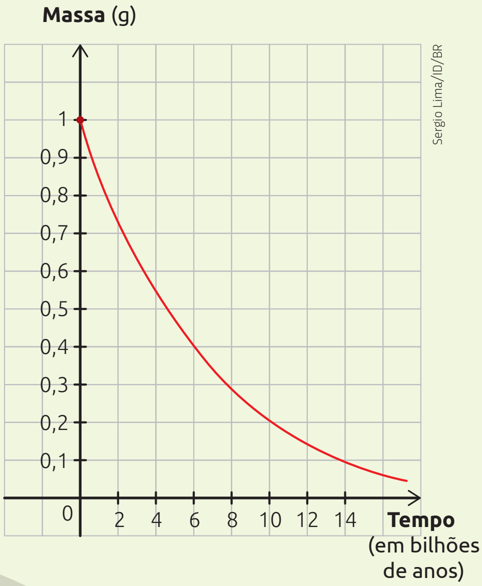
Portanto, a população inicial era de aproximadamente 68 587 bactérias.

Atividades resolvidas

R8. O urânio 238 é um elemento radioativo cuja meia-vida é de 4,5 bilhões de anos, ou seja, são necessários 4,5 bilhões de anos para que a massa de certa amostra de urânio 238 se reduza pela metade.

Meia-vida: tempo necessário para reduzir a metade da quantidade de átomos em uma amostra de um elemento radioativo.

Podemos escrever uma função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(t) = ba^{ct}$, com a um número real positivo diferente de 1 e b, c números reais positivos, que expresse a massa f de uma amostra de urânio 238, em função do tempo t. Observe a seguir o gráfico que indica a redução da massa de uma amostra de 1 g de urânio 238.



a) Qual a quantidade inicial da massa da amostra cujos dados estão representados no gráfico?

b) A função f é crescente ou decrescente? Justifique.

Resolução

a) A massa inicial da amostra é dada em $t = 0$. Observando o gráfico podemos perceber que para $t = 0$, $f(0) = 1$.
Portanto a massa inicial da amostra é 1 g.

b) Observando o gráfico percebemos que, à medida que os valores de t aumentam, os valores de f diminuem. Assim, a função f é decrescente.

Atividades

14. Em quais dos itens há uma lei de formação de função exponencial? Justifique no caderno.

a) $f(x) = 2^{x+1}$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x}$ e) $f(x) = -2^{2x}$

b) $f(x) = 1^x$ d) $f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$ f) $f(x) = 3x^2$

15. Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, dada por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Determine no caderno:

a) $f(0)$ b) $f(4)$ c) $f(1)$ d) $f(2)$ e) $f\left(\frac{1}{4}\right)$

16. Suponha que determinada colônia de bactérias tenha sua população duplicada a cada período de uma hora. Se no início existiam 8 dessas bactérias nessa colônia, ao fim de 10 horas qual será a quantidade de bactérias?

a) 2^{10} b) 2^{11} c) 2^{12} d) 2^{13} e) 2^{14}

17. (UEL-PR) A mitose é uma divisão celular, na qual uma célula duplica o seu conteúdo, dividindo-se em duas, ditas células-filhas. Cada uma destas células-filhas se divide, dando origem a outras duas, totalizando quatro células-filhas e, assim, o processo continua se repetindo sucessivamente. Assinale a alternativa que corresponde, corretamente, à função que representa o processo da mitose.

a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, dada por $f(x) = x^2$

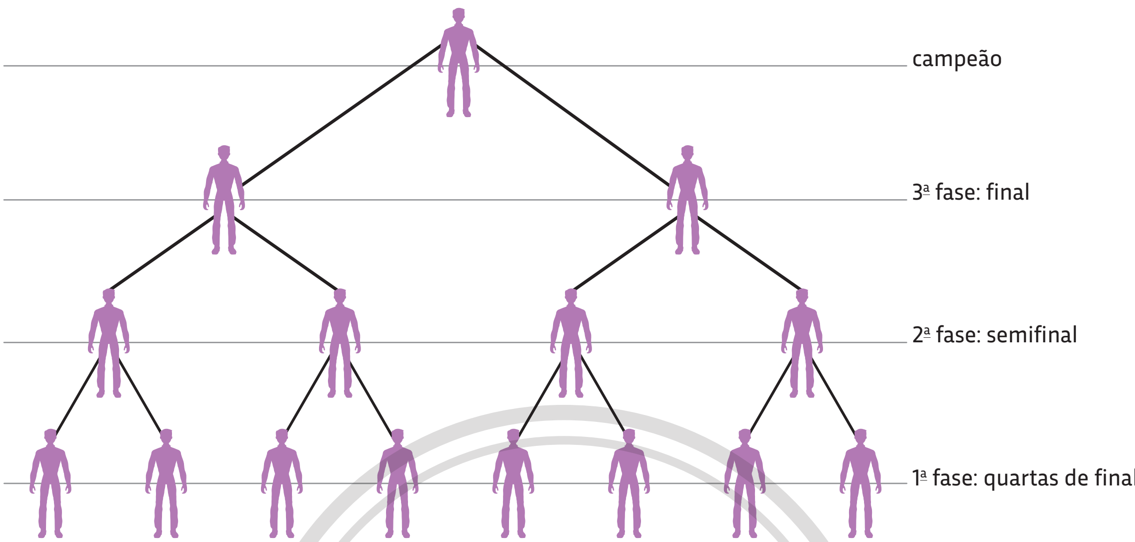
b) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dada por $f(x) = 2^x$

c) $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, dada por $f(x) = 2^x$

d) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = 2^x$

e) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = 2x$

18. Algumas competições esportivas são organizadas de modo que dois atletas se enfrentam. Em cada confronto, o vencedor se classifica para a próxima fase e o perdedor é eliminado da competição. Com esse sistema de disputa, metade dos atletas é eliminada a cada fase da competição, como mostra o esquema a seguir.



Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

Escreva no caderno o domínio, o contradomínio e a lei de formação de uma função bijetora que expresse a quantidade de atletas na fase *x* da competição.

19. Classifique em crescente ou decrescente a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por:

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $f(x) = \left(\sqrt{25}\right)^x$

d) $f(x) = 0{,}5^x$

e) $f(x) = 10^{-x}$

f) $f(x) = 6^{\frac{x}{2}}$

20. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x - 2$ intersecta o eixo Ox no ponto de abscissa:

a) $-\frac{1}{2}$

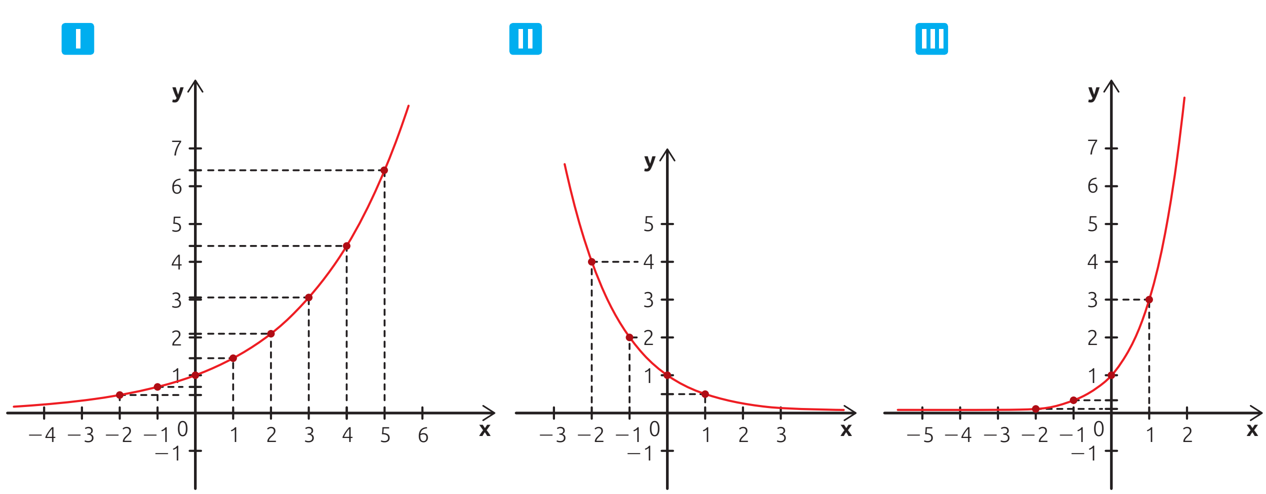
b) $\frac{1}{2}$

c) -2

d) 1

e) -4

21. Sabendo que as figuras a seguir representam gráficos de funções exponenciais, determine quais correspondem a funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ do tipo $f(x) = a^x$, com $a > 1$.



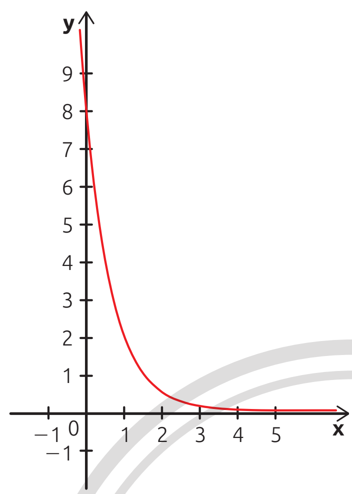
Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

22. Esboce no caderno cada um dos gráficos das funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, cujas leis de formação estão apresentadas a seguir.

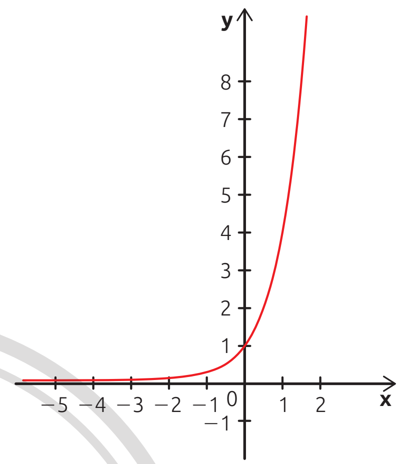
a) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ b) $g(x) = 2^x$ c) $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}$

23. Qual dos gráficos abaixo melhor representa a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$?

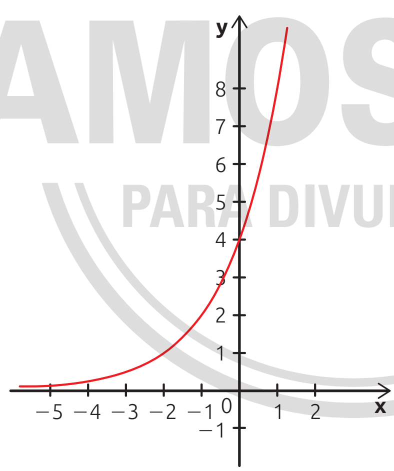
I



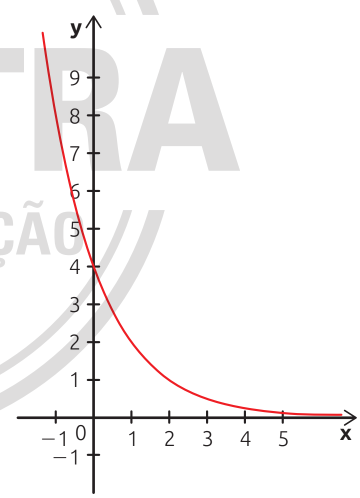
III



II



IV

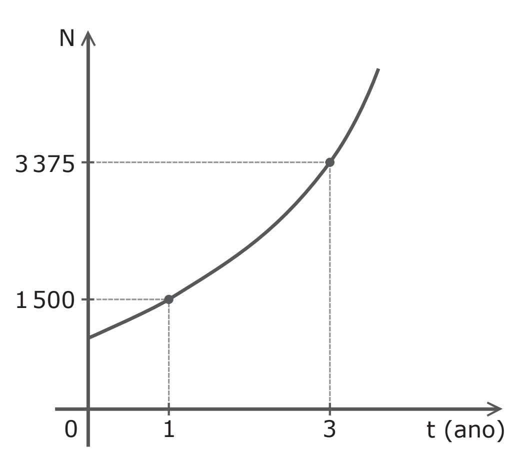


Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

24. (UFSM-RS) As matas ciliares desempenham importante papel na manutenção das nascentes e estabilidade dos solos nas áreas marginais. Com o desenvolvimento do agronegócio e o crescimento das cidades, as matas ciliares vêm sendo destruídas. Um dos métodos usados para sua recuperação é o plantio de mudas.

O gráfico mostra o número de mudas $N(t) = ba^t$ $(0 < a \neq 1 \text{ e } b > 0)$ a serem plantadas no tempo t (em anos), numa determinada região.

De acordo com os dados, o número de mudas a serem plantadas, quando $t = 2$ anos, é igual a:



UFSM/Fac-símile: ID/BR

a) 2 137 b) 2 150 c) 2 250 d) 2 437 e) 2 500

Equação e inequação exponencial

Equação exponencial é toda equação que apresenta a incógnita no expoente de uma ou mais potências.

Veja alguns exemplos de equações exponenciais.

- $6^x = 36$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x} = 32$
- $\sqrt{4^x} = 16^{x+2}$
- $6^{2x} + 6^x = 2$

Para resolver algumas equações exponenciais com base positiva diferente de 1, podemos reduzir ambos os membros da equação a potências de mesma base e utilizar a seguinte propriedade, apoiada no fato de que a função exponencial é injetora.

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ com } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Exemplo

$$2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, o conjunto solução da equação $2^x = 16$ é $S = \{4\}$.

Em algumas equações exponenciais desse tipo, porém, não é possível reduzir ambos os membros da equação a potências de mesma base.

Exemplo

$$7 \cdot 3^x - 3^{2x} = -18$$
$$7 \cdot 3^x - (3^x)^2 = -18$$

Substituindo 3^x por uma incógnita auxiliar y, isto é, fazendo $y = 3^x$, temos:

$$7y - y^2 = -18$$
$$y^2 - 7y - 18 = 0$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $y = 9$ ou $y = -2$.

Para $y = 9$, temos:

$$y = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$$

Para $y = -2$, não há x tal que $y = 3^x$, pois $3^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, o conjunto solução da equação $7 \cdot 3^x - 3^{2x} = -18$ é $S = \{2\}$.

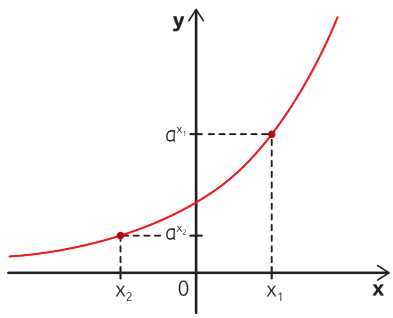
Inequação exponencial é toda inequação que apresenta a incógnita no expoente de uma ou mais potências.

Veja alguns exemplos de inequações exponenciais.

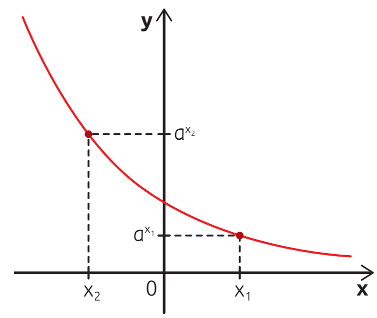
- $81 > 9^x$
- $\left(\frac{1}{27}\right)^x < 3$
- $\sqrt[4]{5} \geqslant 0{,}2^x$
- $3 \cdot 7^{x+1} - 7^x \leqslant 1$

Para resolver algumas inequações exponenciais com base positiva diferente de 1, podemos reduzir ambos os membros da inequação a potências de mesma base. Sabendo que uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ expressa por $f(x) = a^x$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, podemos utilizar as seguintes propriedades:

- $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ se $a > 1$



- $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ se $0 < a < 1$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Exemplo

Veja como resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $5^x > 125$, decompondo o número 125 em fatores primos:

$$5^x > 125 \Rightarrow 5^x > 5 \cdot 5 \cdot 5 \Rightarrow 5^x > 5^3$$

Nesse caso, como a base 5 é maior do que 1, a desigualdade se mantém, logo $5^x > 5^3 \Rightarrow x > 3$.

Portanto, o conjunto solução da inequação $5^x > 125$ é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

Função e juro composto

Grande parte das operações financeiras envolvendo juro utiliza o regime de **juro composto**, em que a partir do primeiro período o juro é calculado sobre o montante do período anterior.

Supondo que uma pessoa invista R$ 5 000,00 em uma instituição financeira, a uma taxa de juro composto de 2% ao mês, podemos determinar o montante obtido após 4 meses da seguinte maneira:

- primeiro mês

$$5\,000 + \underbrace{0{,}02 \cdot 5\,000}_{2\%\text{ de }5\,000} = 5\,100$$

Utilizando C para indicar o capital, i para a taxa de juro e M para o montante, é possível escrever esse cálculo como $M_1 = C + iC = C(1 + i)$.

Portanto, o montante ao final do primeiro mês será R$ 5 100,00.

- segundo mês

$$5\,100 + 0{,}02 \cdot 5\,100 = 5\,202$$

$$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1 + i) = \underbrace{C(1 + i)}_{M_1}(1 + i) = C(1 + i)^2$$

Portanto, o montante ao final do segundo mês será R$ 5 202,00.

- terceiro mês

$$5\,202 + 0{,}02 \cdot 5\,202 = 5\,306{,}04$$

$$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1 + i) = \underbrace{C(1 + i)^2}_{M_2}(1 + i) = C(1 + i)^3$$

Portanto, o montante ao final do terceiro mês será R$ 5 306,04.

- quarto mês

$$5\,306{,}04 + 0{,}02 \cdot 5\,306{,}04 \simeq 5\,412{,}16$$

$$M_4 = M_3 + iM_3 = M_3(1+i) = \overbrace{C(1+i)^3}^{M_3}(1+i) = C(1+i)^4$$

Portanto, o montante obtido após 4 meses de aplicação será aproximadamente R$ 5 412,16.

Ao observar esses cálculos é possível perceber que o montante ao final de um mês t qualquer pode ser obtido por meio da expressão $M_t = C(1+i)^t$. Assim, o cálculo do montante no regime de juro composto pode ser interpretado como uma função $M\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $M(t) = C(1+i)^t$, sendo C um número real positivo diferente de 1, $(1+i)$ e i números reais positivos.

Observe que nesse caso o domínio da função M são os números naturais porque o montante é determinado após um período de tempo positivo, pois não faz sentido calcular o montante de um período negativo.

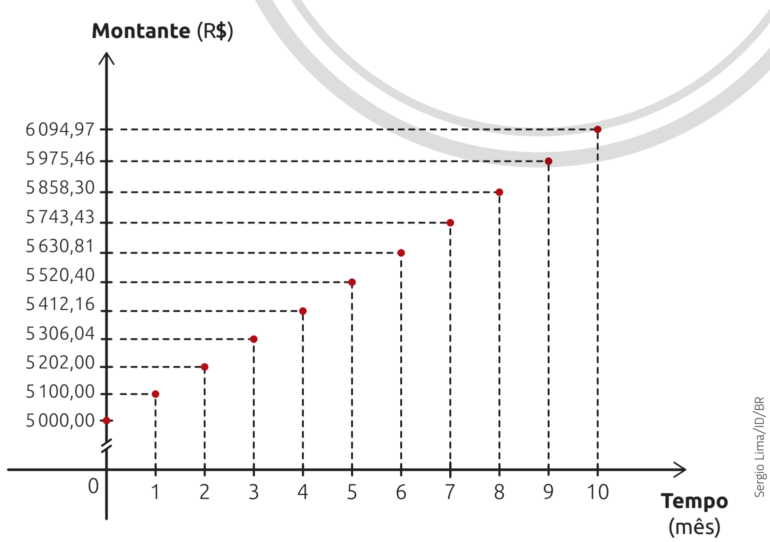
Considerando a mesma situação do investimento de R$ 5 000,00, à taxa de juro composto de 2% ao mês, podemos determinar o montante obtido após 10 meses, por exemplo, utilizando a função $M\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$ expressa por $M(t) = C(1+i)^t$:

$$M(10) = 5\,000(1 + 0{,}02)^{10}$$

$$M(10) \simeq 6\,094{,}97$$

Portanto, o montante obtido após 10 meses será aproximadamente R$ 6 094,97.

Representando graficamente o valor correspondente ao montante dos dez primeiros meses desse investimento, temos:



A distância entre as marcações no eixo vertical é proporcional aos valores correspondentes. O tamanho do gráfico na página e a escala utilizada nos eixos sugerem que os pontos estão alinhados, mas eles pertencem a uma curva exponencial.

O símbolo ⫽ indica que houve uma quebra no eixo, permitindo melhor visualização dos dados.

Como o investimento tem rendimento mensal, o gráfico apresenta apenas os pontos relacionando cada um dos dez meses de investimento ao montante correspondente. Os pontos indicados no gráfico pertencem à curva exponencial da função definida por $M(t) = 5\,000(1{,}02)^t$.

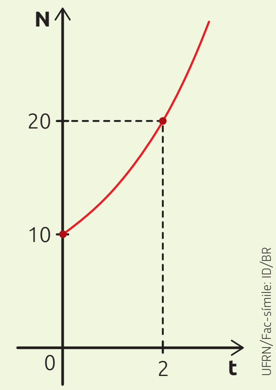
R9. (UFRN) A pedido do seu orientador, um bolsista de um laboratório de biologia construiu o gráfico ao lado a partir dos dados obtidos no monitoramento do crescimento de uma cultura de micro-organismos.

Analisando o gráfico, o bolsista informou ao orientador que a cultura crescia segundo o modelo matemático, $N = k \cdot 2^{at}$, com t em horas e N em milhares de micro-organismos.

Para constatar que o modelo matemático apresentado pelo bolsista estava correto, o orientador coletou novos dados com $t = 4$ horas e $t = 8$ horas.

Para que o modelo construído pelo bolsista esteja correto, nesse período, o orientador deve ter obtido um aumento na quantidade de micro-organismos de:

a) 80 000 b) 160 000 c) 40 000 d) 120 000



Resolução

Do gráfico, vemos que, no momento inicial, ou seja, quando $t = 0$, a quantidade de micro-organismos era 10 000 indivíduos, ou seja, $N(0) = 10$. Substituindo na expressão, temos:

$$10 = k \cdot 2^{a \cdot 0} \Rightarrow 10 = k \cdot 2^{0} \Rightarrow 10 = k$$

Ainda do gráfico, temos $N(2) = 20$, ou seja:

$$20 = 10 \cdot 2^{a \cdot 2} \Rightarrow 2 = 2^{2a} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Portanto, temos $N(t) = 10 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$. Calculando a diferença entre a quantidade de micro-organismos para $t = 4$ e $t = 8$, temos:

$$N(8) - N(4) = 10 \cdot 2^{\frac{8}{2}} - 10 \cdot 2^{\frac{4}{2}} = 10 \cdot 2^{4} - 10 \cdot 2^{2} = 160 - 40 = 120$$

Como os valores são dados em milhares, concluímos que o aumento na quantidade de micro-organismos foi de 120 000 micro-organismos, ou seja, a alternativa correta é **d**.

R10. (EsPCEx-SP) Um jogo pedagógico foi desenvolvido com as seguintes regras:

- Os alunos iniciam a primeira rodada com 256 pontos;
- Faz-se uma pergunta a um aluno. Se acertar, ele ganha a metade dos pontos que tem. Se errar, perde metade dos pontos que tem;
- Ao final de 8 rodadas, cada aluno subtrai dos pontos que tem os 256 iniciais, para ver se "lucrou" ou "ficou devendo".

O desempenho de um aluno que, ao final dessas oito rodadas, ficou devendo 13 pontos foi de:

a) 6 acertos e 2 erros c) 4 acertos e 4 erros e) 2 acertos e 6 erros

b) 5 acertos e 3 erros d) 3 acertos e 5 erros

Resolução

A cada acerto, o aluno ganha metade dos pontos que possui, ou seja, multiplicamos a quantidade de pontos que possui por $\frac{3}{2}$. E a cada erro ele perde metade dos pontos que possui, ou seja, multiplicamos essa quantidade de pontos por $\frac{1}{2}$. Sendo a a quantidade de acertos após as 8 rodadas, escrevemos:

$$256 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{a} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-a} = 256 - 13 \Rightarrow 2^{8} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{a} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{8}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{a}} = 243 \Rightarrow \left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^{a} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^{8} = 3^{5} \Rightarrow 3^{a} \cdot 1^{8} = 3^{5} \Rightarrow a = 5$$

Portanto, a alternativa correta é **b**.

R11. Uma determinada substância perde 40% de sua massa a cada mês. Considere 1 250 g dessa substância em um recipiente.

a) Escreva no caderno uma função m: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ que expresse a massa dessa quantidade da substância com o passar do tempo.

b) Após quantos meses a massa da substância será menor do que 162 g?

Resolução

a) Como a substância perde 40% de sua massa a cada mês, no fim desse mês ela ficaria com 60% de sua massa, assim, a lei de formação da função m é $m(t) = 1\,250 \cdot 0{,}6^t$.

b) Fazendo $m(t) < 162$, temos:

$$m(t) < 162 \Rightarrow 1250 \cdot 0{,}6^t < 162 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^t < \frac{162}{1\,250} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^t < \frac{81}{625} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^t < \left(\frac{3}{5}\right)^4$$

Como as potências têm mesma base e $0 < \frac{3}{5} < 1$, devemos inverter o sentido da desigualdade dos expoentes. Assim:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^t < \left(\frac{3}{5}\right)^4 \Rightarrow t > 4$$

Logo a massa da substância será menor do que 162 g após 4 meses.

R12. Em certo mês, Rafael utilizou R$ 800,00 do seu cheque especial para pagar algumas contas. Por motivos pessoais, ele não pagou esse valor nem movimentou mais essa conta. Sabendo que o banco cobra, sobre o valor devido no cheque especial, juro composto de 10% ao mês:

a) escreva a lei de formação de uma função $M: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$ que expresse o valor da dívida de Rafael de acordo com o tempo, em meses.

b) calcule quanto será a dívida de Rafael:

- após 2 meses.
- após 5 meses.

Resolução

a) Sendo a dívida inicial R$ 800,00 e a taxa de juros 10%, aplicamos a fórmula do juro composto:

$$M(t) = 800(1 + 0{,}1)^t \Rightarrow M(t) = 800 \cdot 1{,}1^t$$

b) Para calcularmos os valores da dívida, utilizamos a fórmula indicada no item **a**.

- 2 meses:

$M(2) = 800 \cdot 1{,}1^2 = 968$

Portanto, a dívida será R$ 968,00.

- 5 meses:

$M(5) = 800 \cdot 1{,}1^5 \simeq 1\,288{,}41$

Portanto, a dívida será R$ 1 288,41.

Atividades

25. Determine o valor de x para que a igualdade seja verdadeira.

a) $16 = 256^x$

b) $16^{3x+2} = 4 \cdot 16^{-2x+3}$

c) $10^{-3x+21} = 1\,000\,000\,000^{x-3}$

d) $\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{3x}} = 0{,}\overline{3}$

26. Resolva no caderno os sistemas.

a) $\begin{cases} 9^{2x} \cdot 3^y = 1 \\ 3^{x-y} = 81 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 64^x \cdot 4^y = 1024 \\ \dfrac{81}{3^{x+y}} = 3 \end{cases}$

27. (Cefet-MG) O produto das raízes da equação exponencial $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$ é igual a

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

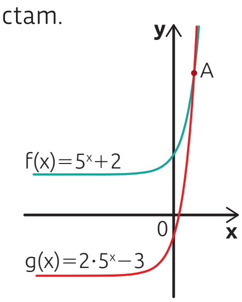
28. Resolva no caderno cada equação exponencial.

a) $5^{2x} + 2 \cdot 5^{2x} = 15$

b) $4 \cdot 7^{x+3} - 3 \cdot 7^{x+3} + 5 \cdot 7^{x+3} = 42$

c) $\left(\frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} \cdot 6 - 4 \cdot \left(3^{-2}\right)^{x+1} =$
$= 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{2x^2}$

29. Determine no caderno as coordenadas do ponto A, ou seja, o ponto em que os gráficos das funções f e g se intersectam.



Sergio Lima/ID/BR

30. Considere a equação exponencial $4 \cdot 0{,}5^{-2} = 2^{3x^2-5}$. Quantas soluções reais essa equação apresenta?

31. (UFPR) Uma *pizza* a 185 °C foi retirada de um forno quente. Entretanto, somente quando a temperatura atingir 65 °C será possível segurar um de seus pedaços com as mãos nuas, sem se queimar. Suponha que a temperatura T da *pizza*, em graus Celsius, possa ser descrita em função do tempo t, em minutos, pela expressão $T = 160 \cdot 2^{-0{,}8t} + 25$. Qual o tempo necessário para que se possa segurar um pedaço dessa *pizza* com as mãos nuas, sem se queimar?

a) 0,25 minuto
b) 0,68 minuto
c) 2,5 minutos
d) 6,63 minutos
e) 10,0 minutos

32. Resolva no caderno as inequações exponenciais em $\mathbb{R}$.

a) $2^x < 64$
b) $\frac{1}{16^x} \leqslant 64$
c) $0{,}25^{x+5} > 0{,}5$
d) $5^{x(3x+2)} \leqslant 125^{x^2+4}$

33. Represente no caderno a solução de cada inequação por meio de um intervalo na reta real.

a) $16^x < 256$
b) $125^x \geqslant 5^3$
c) $\sqrt{36^x} > 6^{3x+2}$
d) $\left(\frac{1}{49}\right)^{x+3} \leqslant 7^{3x+5}$

34. (EsPCEx-SP) A inequação

$10^x + 10^{x+1} + 10^{x+2} + 10^{x+3} + 10^{x+4} < 11\,111,$

em que x é um número real:

a) não tem solução.
b) tem apenas uma solução.
c) tem apenas soluções positivas.
d) tem apenas soluções negativas.
e) tem soluções positivas e negativas.

35. (Unifor) Após um estudo em uma colmeia de abelha, verificou-se que no instante $t = 0$ o número de abelhas era 1 000 e que o crescimento populacional da colmeia é dada pela função f, onde f é definida por $f(t) = 1000(2)^{\frac{2t}{3}}$ em que t é o tempo decorrido em dias. Supondo que não haja mortes na colmeia, em quantos dias no mínimo essa colmeia atingirá uma população de 64 000 abelhas?

a) 9
b) 10
c) 12
d) 13
e) 14

36. (UEL-PR) João publicou na Internet um vídeo muito engraçado que fez com sua filha caçula. Ele observou e registrou a quantidade de visualizações do vídeo em cada dia, de acordo com o seguinte quadro.

Dias	Quantidade de visualizações do vídeo em cada dia
1	$7x$
2	$21x$
3	$63x$
...	...

Na tentativa de testar os conhecimentos matemáticos de seu filho mais velho, João o desafiou a descobrir qual era a quantidade x, expressa no quadro, para que a quantidade total de visualizações ao final dos 5 primeiros dias fosse 12 705.

a) Sabendo que o filho de João resolveu corretamente o desafio, qual resposta ele deve fornecer ao pai para informar a quantidade exata de visualizações representada pela incógnita x?

b) Nos demais dias, a quantidade de visualizações continuou aumentando, seguindo o mesmo padrão dos primeiros dias. Em um único dia houve exatamente 2 066 715 visualizações registradas desse vídeo. Que dia foi este?

37. Relacione cada inequação exponencial seu conjunto solução, escrevendo no caderno a letra e o número correspondente.

a) $6^{x-1} \cdot 6^x \leqslant 216$
b) $144^{-2x} \geqslant 12^x$
c) $64^{x+1} : 4^{x+1} \leqslant 4$
d) $74 \leqslant 9^x - 7$

I) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$
II) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$
III) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$
IV) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{2}\right\}$

38. Certa máquina agrícola deprecia-se com o passar do tempo de tal forma que seu valor pode ser modelado por meio da função $V(t) = V_0 \cdot 2^{-0{,}1t}$, com t em anos, na qual V_0 é o valor em que a máquina foi comprada. Sabendo que 10 anos após de ter sido comprada o valor da máquina será igual a R$ 55 000,00, responda:

Depreciar: reduzir o valor comercial.

a) Qual o valor de compra dessa máquina?

b) Após 20 anos da compra dessa máquina, qual será o seu valor?

39. Taís fará um investimento de R$ 4 000,00 a uma taxa de juro composto de 1,3% ao mês, com intenção de retirar esse dinheiro depois de 8 meses.

a) Qual será o montante do investimento de Taís ao final do 3º mês?

b) Quando Taís for retirar o dinheiro, ao final do 8º mês, qual será o montante de sua aplicação?

c) Esboce no caderno o gráfico que representa o montante em cada mês nesse investimento.

40. Otávio realizou um investimento de R$ 1 000,00. No começo de cada mês, a partir do segundo, ele realiza um depósito de R$ 100,00. Sabendo que a taxa de juro composto é 0,5% ao mês, responda.

a) Qual será o montante do investimento ao final do:

- primeiro mês?
- segundo mês?
- terceiro mês?

b) Se Otávio tivesse investido todos os depósitos de R$ 100,00, que foram realizados ao final do terceiro mês, junto com os R$ 1 000,00 investidos inicialmente, qual seria o montante do investimento após esse período?

41. O PIB de certo país em 2017 foi 900 bilhões de dólares. O governo desse país estima um crescimento, a partir de 2018, de 3% em relação ao PIB do ano anterior. Considerando que esse crescimento se concretize, resolva no caderno os itens a seguir.

a) Escreva a lei de formação de uma função que apresente o PIB *p*, desse país, *t* anos após 2017.

b) Qual será o PIB desse país em:

- 2020?
- 2035?

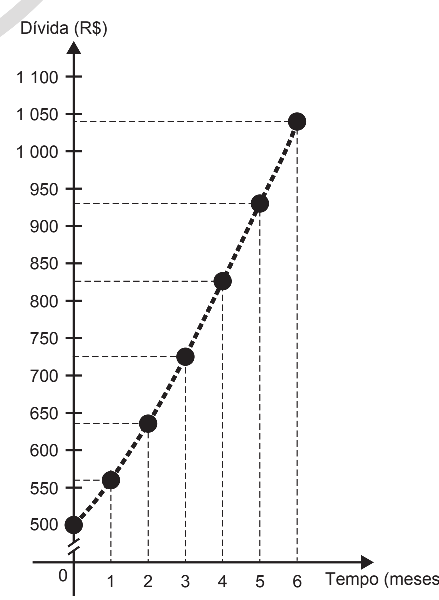
42. Um investidor que aplicará R$ 3 500,00 em um ano tem 3 possibilidades para a aplicação. Observe.

Aplicação	A	B	C
Juro composto	1% ao mês	6% ao semestre	12% ao ano

a) Observando o quadro e sem fazer cálculos, em qual aplicação você considera que o investidor teria um maior montante?

b) Agora realizando os cálculos, em qual das aplicações o investidor teria o montante maior?

43. (Enem/Inep) Um trabalhador possui um cartão de crédito que, em determinado mês, apresenta o saldo devedor a pagar no vencimento do cartão, mas não contém parcelamentos a acrescentar em futuras faturas. Nesse mesmo mês, o trabalhador é demitido. Durante o período de desemprego, o trabalhador deixa de utilizar o cartão de crédito e também não tem como pagar as faturas, nem a atual nem as próximas, mesmo sabendo que, a cada mês, incidirão taxas de juros e encargos por conta do não pagamento da dívida. Ao conseguir um novo emprego, já completados 6 meses de não pagamento das faturas, o trabalhador procura renegociar sua dívida. O gráfico mostra a evolução do saldo devedor.



Enem/Inep/ID/BR/Fac-símile: ID/BR

Com base no gráfico, podemos constatar que o saldo devedor inicial, a parcela mensal de juros e a taxa de juros são

a) R$ 500,00; constante e inferior a 10% ao mês.

b) R$ 560,00; variável e inferior a 10% ao mês.

c) R$ 500,00; variável e superior a 10% ao mês.

d) R$ 560,00; constante e superior a 10% ao mês.

e) R$ 500,00; variável e inferior a 10% ao mês.

capítulo 7

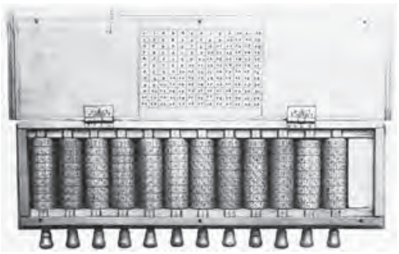
Função logarítmica

Logaritmo

O inventor dos logaritmos John Napier (1550-1617), não era matemático profissional, trabalhou cerca de vinte anos com os logaritmos até publicar em 1614 sua obra intitulada *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos). Napier também inventou um dispositivo conhecido como ossos de Napier, utilizado basicamente para efetuar multiplicações, divisões e extrair raízes quadradas de números.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.



Bettmann/Corbis/Latinstock

Dispositivo de cálculo criado por John Napier, conhecido como as varas ou ossos de Napier. Uma publicação de Napier datada de 1617 apresenta a descrição desse dispositivo.

Antes da popularização das calculadoras eletrônicas, as tábuas de logaritmos agilizavam os cálculos, pois convertiam multiplicações em adições e divisões em subtrações. Atualmente, não utilizamos mais essas tábuas, mas o estudo dos logaritmos se justifica por sua relação com as potências e a função exponencial, conforme veremos adiante.

Definição de logaritmo

Qual é o expoente x ao qual se deve elevar a base 3 para obter o resultado 10?

Como $3^2 = 9$ e $3^3 = 27$, temos que $3^2 < 3^x < 3^3$, logo, $2 < x < 3$.

Para resolver esta e outras situações, estudaremos o conceito de **logaritmo**.

Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, chamamos logaritmo de b na base a, denotado por $\log_a b$, o expoente ao qual se deve elevar a base a para que o resultado seja b. Note que, dados $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$, existe um único logaritmo x tal que:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Voltando ao problema inicial e utilizando a definição, temos $\log_3 10 = x \Leftrightarrow 3^x = 10$.

No logaritmo podemos destacar os seguintes elementos:

$$\log_{\underbrace{2}_{\text{base}}} \overbrace{8}^{\text{logaritmando}} = \underbrace{3}_{\text{logaritmo}}$$

Observe alguns exemplos de logaritmos.

a) $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

b) $\log_6 6 = 1 \Leftrightarrow 6^1 = 6$

c) $\log_9 1 = 0 \Leftrightarrow 9^0 = 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

e) $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

Na notação do chamado **logaritmo decimal**, ou seja, no logaritmo cuja base é 10, podemos escrever $\log_{10}100$ apenas como $\log 100$. De modo geral, indicamos $\log_{10} b$ apenas por $\log b$, com $b > 0$.

As restrições impostas na definição de logaritmo fazem com que alguns logaritmos não sejam definidos, de modo que as equivalências abaixo não sejam válidas:

a) $\log_1 9 = x \Leftrightarrow 1^x = 9$

b) $\log_4(-16) = x \Leftrightarrow 4^x = -16$

c) $\log_0 7 = x \Leftrightarrow 0^x = 7$

d) $\log_{(-1)} 2 = x \Leftrightarrow (-1)^x = 2$

Reúna-se em grupo e apresente uma maneira de corrigir cada um dos logaritmos apresentados acima.

Consequências da definição

São consequências da definição de logaritmo os seguintes casos, com os números a e b reais positivos e $a \neq 1$:

1º **caso**:

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

Exemplos

$$\log_8 1 = 0 \Leftrightarrow 8^0 = 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

2º **caso**:

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Exemplos

$$\log_{14} 14 = 1 \Leftrightarrow 14^1 = 14$$

$$\log_2 2 = 1 \Leftrightarrow 2^1 = 2$$

3º **caso**:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Exemplos

$$5^{\log_5 25} = 25$$

$$3^{\log_3 81} = 81$$

4º **caso** (com n real):

$$\boxed{\log_a a^n = n}$$

Exemplos

$$\log_6 6^5 = 5$$

$$\log_2 2^{-3} = -3$$

5º **caso** (com c real positivo):

$$\boxed{\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c}$$

Pela definição de logaritmo, temos $\log_a b = \log_a c \Rightarrow a^{\log_a c} = b$. Utilizando a consequência da definição apresentada no 3º caso, vemos que $b = c$.

Para demonstrar a recíproca, ou seja, $b = c \Rightarrow \log_a b = \log_a c$, tomamos $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$ e $\log_a c = y \Rightarrow a^y = c$. Pela hipótese de que $b = c$, vemos que $a^x = a^y \Rightarrow x = y$, ou seja, $\log_a b = \log_a c$.

Atividades resolvidas

R1. Calcule o valor de cada logaritmo indicado nos itens a seguir.

a) $\log_{\sqrt{8}} 256$ b) $\log_{\frac{1}{49}} 7\sqrt[3]{7}$

Resolução

Seja x o valor procurado. Temos:

a) $\log_{\sqrt{8}} 256 = x \Rightarrow \left(\sqrt{8}\right)^x = 256 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(8^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^8 \Rightarrow \left(2^3\right)^{\frac{1}{2}\cdot x} = 2^8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{3\cdot\frac{x}{2}} = 2^8 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 8 \Rightarrow x = \frac{16}{3}$

b) $\log_{\frac{1}{49}} 7\sqrt[3]{7} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{49}\right)^x = 7\sqrt[3]{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow 49^{-x} = 7 \cdot 7^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \left(7^2\right)^{-x} = 7^{1+\frac{1}{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 7^{-2x} = 7^{\frac{4}{3}} \Rightarrow -2x = \frac{4}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

R2. Nos itens a seguir determine os valores reais x para os quais o logaritmo indicado exista.

a) $\log(8x - 4)$ b) $\log_{x-5}\left(x^2 - 3x - 10\right)$

Resolução

a) Para o logaritmo existir, devemos ter a base maior do que 0 e diferente de 1 e o logaritmando maior do que zero. Como a base é igual a 10, temos:

$$8x - 4 > 0 \Rightarrow 8x > 4 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

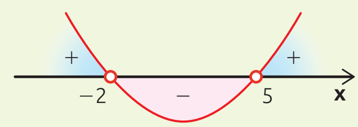
Portanto, para existir o logaritmo indicado, é necessário ter $x > \frac{1}{2}$.

b) Para o logaritmo existir, devemos ter a base maior do que 0 e diferente de 1 e o logaritmando maior do que zero. Assim, temos:

- $x^2 - 3x - 10 > 0$

Resolvendo a equação $x^2 - 3x - 10 = 0$, temos:

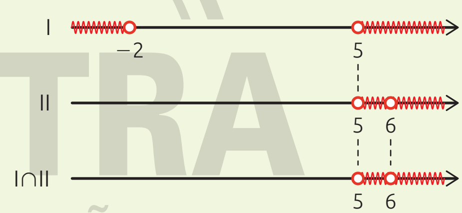
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{49}}{2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{49}}{2} = -2 \end{cases}$$



$x < -2$ ou $x > 5$ (I)

- $\begin{cases} x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5 \\ x - 5 \neq 1 \Rightarrow x \neq 6 \end{cases}$ (II)

Satisfazendo as condições **I** e **II** temos:



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Portanto, para existir o logaritmo indicado, é necessário ter $x > 5$ e $x \neq 6$.

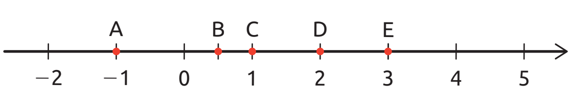
Atividades

1. Calcule no caderno os logaritmos.

a) $\log_{27} 9$ c) $\log_{0,2} 125$

b) $\log_{36} \sqrt{6}$ d) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{81}$

2. Relacione no caderno cada ponto indicado por uma letra na reta real a seguir ao valor de um dos logaritmos apresentados nas fichas.



Sergio Lima/ID/BR

$\log_{16} 4$ $\log_4 64$ $\log_7 49$

$\log_{\frac{1}{3}} 3$ $\log 10$

3. Simplifique no caderno as expressões.

a) $\log_{0,25} 16 + 3^{\log 10} - \log_3 \frac{1}{3}$

b) $\left(2\log\sqrt{0,1} - \log_4 4^4\right) \cdot \log_4 8$

c) $10^{\log 5} + \dfrac{\log 100 - \log 1}{\log_9 9}$

4. Em cada item, para quais valores de x o logaritmo está definido?

a) $\log_6 \frac{1}{x+1}$ c) $\log_{8x}(x + 8)$

b) $\log\left(-x^2 - 2x + 3\right)$ d) $\log_{x+3}\left(x^2 - 9\right)$

5. (PUC-RJ) Se $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$, então $\sqrt[3]{x} + x^2$ vale:

a) $\frac{3}{4}$ b) 6 c) 28 d) 50 e) 66

Propriedades dos logaritmos

Vejamos agora algumas propriedades operatórias dos logaritmos. Esses procedimentos podem ser úteis para simplificar expressões e resolver equações que envolvem logaritmos. Para estudar essas propriedades, considere os números reais positivos a, b e c, com $a \neq 1$.

1ª **propriedade**: Logaritmo do produto

$$\boxed{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$$

Considerando $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a (b \cdot c) = z$, vamos demonstrar que $z = x + y$.

Como $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$, $\log_a c = y \Rightarrow a^y = c$ e $\log_a (b \cdot c) = z \Rightarrow a^z = b \cdot c$, temos que:

$$a^z = b \cdot c \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y \Rightarrow a^z = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$$

Portanto, $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Exemplos

- $\log_4 6 = \log_4 (2 \cdot 3) = \log_4 2 + \log_4 3$
- $\log 30 = \log (3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10$

2ª **propriedade**: Logaritmo do quociente

$$\boxed{\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c}$$

Considerando $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z$, vamos demonstrar que $z = x - y$.

Como $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$, $\log_a c = y \Rightarrow a^y = c$ e $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z \Rightarrow a^z = \frac{b}{c}$, temos que:

$$a^z = \frac{b}{c} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^z = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$$

Portanto, $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

Exemplos

- $\log_5 16 = \log_5 \left(\frac{32}{2}\right) = \log_5 32 - \log_5 2$
- $\log 7 = \log \left(\frac{14}{2}\right) = \log 14 - \log 2$

3ª **propriedade**: Logaritmo da potência (com n real)

$$\boxed{\log_a b^n = n \cdot \log_a b}$$

Considerando $\log_a b = x$ e $\log_a b^n = y$, vamos demonstrar que $y = n \cdot x$.

Como $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$ e $\log_a b^n = y \Rightarrow a^y = b^n$, temos que:

$$a^y = b^n \Rightarrow a^y = (a^x)^n \Rightarrow a^y = a^{n \cdot x} \Rightarrow y = n \cdot x$$

Portanto, $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$.

Exemplos

- $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \cdot \log_5 5$
- $\log 100 = \log 10^2 = 2 \cdot \log 10$

Um caso particular do logaritmo da potência, com m natural não nulo, é dado por:

$$\log_a \sqrt[m]{b} = \log_a b^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$$

Exemplos

- $\log_6 \sqrt{6} = \log_6 6^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_6 6$
- $\log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 9^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_3 9$

Mudança de base

Em determinadas situações é preciso operar com logaritmos de bases diferentes. Nos casos em que se aplica as propriedades operatórias, é necessário convertê-los para logaritmos de bases iguais. É possível obter o valor de $\log_a b$ em termos de logaritmos em apenas uma base c fixada utilizando a propriedade de **mudança de base**.

Considere os números reais positivos a, b e c, com $a \neq 1$ e $c \neq 1$, temos:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

A definição apresentada nos garante que $z \neq 0$, pois na expressão $\boldsymbol{\log_c a = z}$, vemos que $a \neq 1$, logo z não pode ser zero.

Para demonstrar essa propriedade, considerando $\log_a b = x$, $\log_c b = y$ e $\log_c a = z$, vamos mostrar que $x = \frac{y}{z}$, com $z \neq 0$.

Como $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$, $\log_c b = y \Rightarrow c^y = b$ e $\log_c a = z \Rightarrow c^z = a$, temos:

$$a^x = b \Rightarrow (c^z)^x = c^y \Rightarrow c^{x \cdot z} = c^y \Rightarrow x \cdot z = y \Rightarrow x = \frac{y}{z}, \text{ com } z \neq 0$$

Portanto, $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Exemplos

- $\log_3 6 = \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 3} = \frac{\log 6}{\log 3}$
- $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$

Sem utilizar a propriedade de mudança de base, calcule o valor de $\log_4 8$ e de $\frac{\log_2 8}{\log_2 4}$ e analise os resultados obtidos.

Uma consequência da propriedade de mudança de base, dados os números reais positivos a e b, ambos diferentes de 1, é:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Para demonstrar, mudamos o $\log_a b$ para a base b. Assim, temos:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

Exemplos

- $\log_2 10 = \frac{1}{\log_{10} 2} = \frac{1}{\log 2}$
- $\log_9 3 = \frac{1}{\log_3 9}$

R3. Simplifique as expressões.

a) $\log 10 - 5\log 2 + \frac{1}{2}\log 8$ b) $\log_{\pi} 5 \cdot \log \pi - \frac{1}{3}\log 5$ c) $1 + \log_2 9 - \frac{3\log 5}{\log 2} + 2\log_2 10$

Resolução

a) $\log 10 - 5\log 2 + \frac{1}{2}\log 8 = \log 10 - \log 2^5 + \log 8^{\frac{1}{2}} = \log\frac{10}{2^5} + \log\sqrt{8} = \log\frac{10\sqrt{2^3}}{32} =$

$= \log\frac{5\sqrt{2}}{8}$

b) $\log_{\pi} 5 \cdot \log\pi - \frac{1}{3}\log 5 = \frac{\log 5}{\log\pi} \cdot \log\pi - \log 5^{\frac{1}{3}} = \log 5 - \log 5^{\frac{1}{3}} = \log\frac{5}{5^{\frac{1}{3}}} = \log 5^{\frac{2}{3}}$

c) $1 + \log_2 9 - \frac{3\log 5}{\log 2} + 2\log_2 10 = \log_2 2 + \log_2 9 - \frac{\log 5^3}{\log 2} + \log_2 10^2 =$

$= \log_2\left(2 \cdot 9 \cdot 10^2\right) - \log_2 5^3 = \log_2\left(\frac{1800}{125}\right) = \log_2\left(\frac{72}{5}\right)$

R4. Calcule os logaritmos a seguir. Para isso, considere $\log 2 \simeq 0{,}301$ e $\log 3 \simeq 0{,}477$.

a) $\log_8 27$ b) $\log_9 \sqrt{12}$

Resolução

a) $\log_8 27 = \frac{\log 27}{\log 8} = \frac{\log 3^3}{\log 2^3} = \frac{3\log 3}{3\log 2} \simeq \frac{0{,}477}{0{,}301} \simeq 1{,}585$

b) $\log_9\sqrt{12} = \frac{\log\sqrt{12}}{\log 9} = \frac{\log 12^{\frac{1}{2}}}{\log 3^2} = \frac{\frac{1}{2}\log 12}{2\log 3} = \frac{\log(2 \cdot 2 \cdot 3)}{2 \cdot 2\log 3} = \frac{\log 2 + \log 2 + \log 3}{4\log 3} \simeq$

$\simeq \frac{0{,}301 + 0{,}301 + 0{,}477}{4 \cdot 0{,}477} = \frac{1{,}079}{1{,}908} \simeq 0{,}566$

Atividades

6. Simplifique as expressões no caderno.

a) $\log_6 8 + \log_6 5$ c) $2\log_{\sqrt{2}} 7 - 5\log_{\sqrt{2}} 9$

b) $\log_2 3 - \log_2 4$ d) $\log 45 + 3\log 9$

7. No caderno, calcule os valores dos logaritmos a seguir, considerando $\log 2 \simeq 0{,}301$ e $\log 3 \simeq 0{,}477$.

a) $\log 24$ c) $\log 15$

b) $\log 45$ d) $\log 6$

8. Considerando $\log a \simeq 0{,}602$ e $\log b \simeq 0{,}845$, calcule no caderno $\log\sqrt[4]{\frac{a^4}{b}}$.

9. Escreva no caderno cada um dos logaritmos como uma razão de logaritmos de base 10.

a) $\log_5 9$ b) $\log_3 7$ c) $\log_2 3$

10. Sabendo que $\log 3 \simeq 0{,}477$ e $\log 5 \simeq 0{,}699$, calcule no caderno os logaritmos a seguir.

a) $\log_2 15$ c) $\log_3 8$

b) $\log_2 9$ d) $\log_5 27$

11. Quais das igualdades são verdadeiras, com $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ e $a \neq 1$?

a) $\log_a(b \cdot c) = \log_a b - \log_a c$

b) $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

c) $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b + \log_a c$

d) $\log_a \sqrt[m]{b} = \log_a b^{\frac{1}{m}} = m \cdot \log_a b$

e) $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

12. (UEL-PR) A poluição sonora em grandes cidades é um problema de saúde pública. A classificação do som como forte ou fraco está relacionada ao nível de intensidade sonora I, medido em watt/m². A menor intensidade audível, ou limiar de audibilidade, possui intensidade $I_0 = 10^{-12}$ watt/m², para a frequência de 1000 Hz. A relação entre as intensidades sonoras permite calcular o nível sonoro, NS, do ambiente, em decibéis (dB), dado pela fórmula $NS = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$.

O quadro a seguir mostra a relação do nível sonoro com o tempo máximo de exposição a ruídos.

Nível sonoro (dB)	Tempo máximo de exposição (em horas) de modo a evitar lesões auditivas irreversíveis
80	16
85	8
90	4
95	2
100	1

Com base nesse quadro, no texto e supondo que o ruído em uma avenida com trânsito congestionado tenha intensidade de 10^{-3} watt/m², considere as afirmativas a seguir.

I. O nível sonoro para um ruído dessa intensidade é de 90 dB.

II. O tempo máximo em horas de exposição a esse ruído, a fim de evitar lesões auditivas irreversíveis, é de 4 horas.

III. Se a intensidade sonora considerada for igual ao limiar de audibilidade, então o nível sonoro é de 1 dB.

IV. Sons de intensidade de 1 watt/m² correspondem ao nível sonoro de 100 dB.

Identifique a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas **I** e **II** são corretas.

b) Somente as afirmativas **I** e **IV** são corretas.

c) Somente as afirmativas **III** e **IV** são corretas.

d) Somente as afirmativas **I**, **II** e **III** são corretas.

e) Somente as afirmativas **II**, **III** e **IV** são corretas.

13. **Ferramentas** Apesar da escala Richter ser bastante conhecida e historicamente importante, alguns cientistas preferem utilizar a escala de magnitude de momento, um sistema mais exato de medição. Considerando essa escala, a magnitude M_w de um terremoto pode ser calculada pela fórmula a seguir, em que M_0 é o momento sísmico, cuja unidade de medida é o dyn · cm (dina centímetro).

Momento sísmico: quantidade usada para medir a intensidade de um sismo (tremor de terra).

$$M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log\left(M_0\right)$$

Observe a tabela.

Momento sísmico referente a alguns terremotos	
País	Momento sísmico (M_0 em dyn · cm)
Chile (22/05/1960)	$2 \cdot 10^{30}$
Estados Unidos (28/03/1964)	$7{,}1 \cdot 10^{29}$
Haiti (12/01/2010)	$3{,}5 \cdot 10^{26}$
Indonésia (26/12/2004)	$5 \cdot 10^{29}$

Fonte de pesquisa: *Guinness World Records 2014*. Trad. Aline Frederico et al. Rio de Janeiro: Agir, 2013. p. 16-17.

Joe Raedle/Getty Images

Pessoas reunidas à procura de sobreviventes, ao redor dos destroços de uma igreja de Porto Príncipe, capital do Haiti, após um dos mais trágicos terremotos dos últimos cem anos. O abalo deixou aproximadamente 316 mil vítimas fatais. Foto de janeiro de 2010.

a) Calcule a magnitude M_w de cada terremoto.

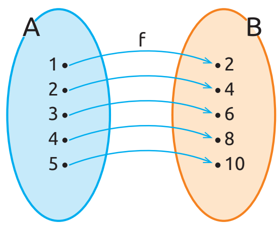
b) Os abalos com magnitude maior do que ou igual a 8,0 são classificados como muito fortes e causam destruição quase total. Quais dos países citados na tabela foram afetados por esse tipo de abalo?

Não escreva no livro.

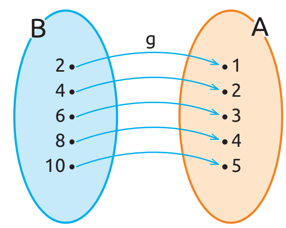
Função inversa

Observe as informações a seguir.

$$f\colon A \to B$$
$$f(x) = 2x$$
$$D(f) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$CD(f) = Im(f) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

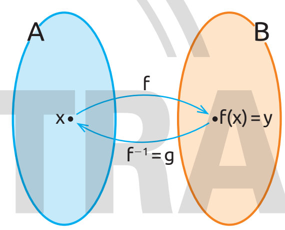


$$g\colon B \to A$$
$$g(x) = \frac{x}{2}$$
$$D(g) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$
$$CD(g) = Im(g) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



De modo informal, podemos dizer que a função g "desfaz" o que a função f "realiza". Essa relação é expressa dizendo que g é a **inversa** da função f e vice-versa. Nesse sentido, uma função possui uma inversa se, e somente se, ela for bijetora.

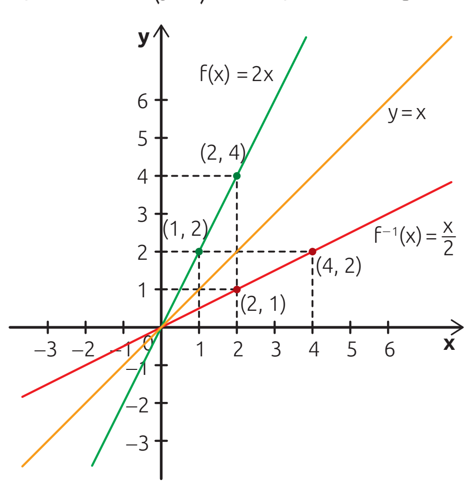
Dizemos que a função $g\colon B \to A$ é a inversa da função $f\colon A \to B$ quando a igualdade $y = f(x)$ ocorre se, e somente se, $x = g(y)$, com $x \in A$ e $y \in B$. Representamos a inversa de uma função f por f^{-1}.



As funções f e g definidas no início deste tópico são inversas, pois:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2} \Leftrightarrow x = g(y)$$

Representando no plano cartesiano as funções inversas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$ e $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$, vemos que seus gráficos são simétricos em relação à reta dada por $y = x$, bissetriz do 1º e do 3º quadrantes. Isso ocorre porque se (x, y) é um ponto do gráfico de f, ou seja, $y = f(x)$, então (y, x) é um ponto do gráfico de f^{-1}, ou seja, $x = f^{-1}(y)$.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Os pontos (x, y) e (y, x) são sempre simétricos em relação à reta $y = x$. Assim, os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação a essa reta.

Função logarítmica

Utilizando a definição de logaritmo, podemos definir a chamada **função logarítmica**. Veremos adiante que essa função é a inversa de uma função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, que estudamos no capítulo **6**.

A função logarítmica de base a é a função $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \log_a x$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$.

Para provar que as funções dadas por $f(x) = a^x$ (função exponencial de base a) e $g(x) = \log_a x$ (função logarítmica de base a) são inversas, note que, pela definição de logaritmo, temos:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Mas essa equivalência significa que:

$$g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

Portanto, as funções f e g são inversas, ou seja, $g = f^{-1}$. Dessa forma, os seus gráficos são simétricos em relação à reta dada por $y = x$.

Observe os gráficos que representam as funções exponencial dada por $f(x) = 2^x$ e logarítmica dada por $g(x) = \log_2 x$.

Veja agora os gráficos que representam as funções exponencial, dada por $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, e logarítmica, dada por $p(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Figura **1**

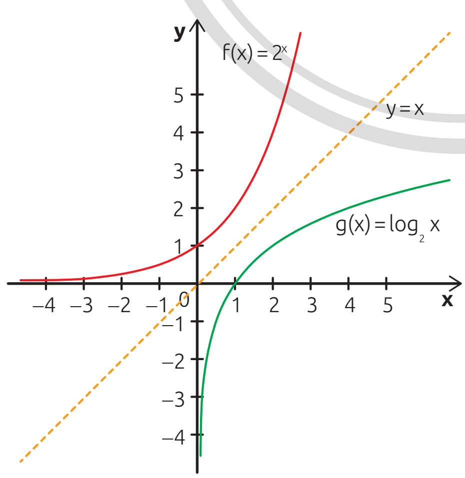
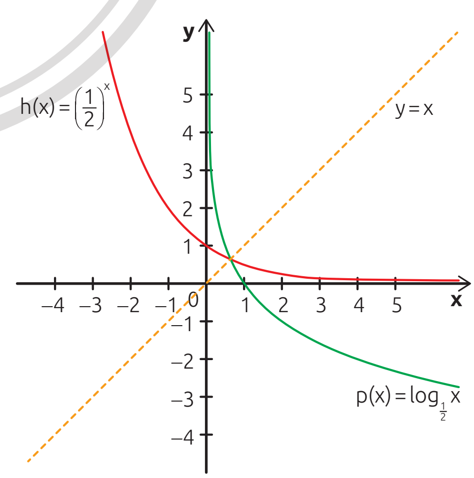


Figura **2**



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

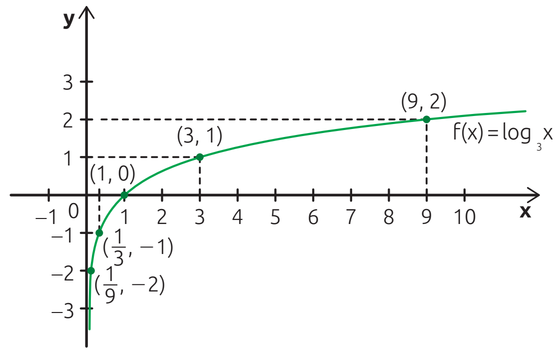
Na figura **1**, analisando os dois gráficos representados, vemos que a função exponencial dada por $f(x) = 2^x$ cresce mais rapidamente para $x > 1$ se comparada à função logarítmica dada por $g(x) = \log_2 x$. Nesses gráficos, da esquerda para a direita, as curvas são ascendentes.

Nos gráficos representados na figura **2**, considerando da esquerda para a direita, as curvas são descendentes.

Gráfico da função logarítmica

Observe a representação gráfica da função logarítmica dada por $f(x) = \log_3 x$.

x	$f(x) = \log_3 x$	(x, y)
$\frac{1}{9}$	$f\left(\frac{1}{9}\right) = \log_3 \frac{1}{9} = -2$	$\left(\frac{1}{9}, -2\right)$
$\frac{1}{3}$	$f\left(\frac{1}{3}\right) = \log_3 \frac{1}{3} = -1$	$\left(\frac{1}{3}, -1\right)$
1	$f(1) = \log_3 1 = 0$	$(1, 0)$
3	$f(3) = \log_3 3 = 1$	$(3, 1)$
9	$f(9) = \log_3 9 = 2$	$(9, 2)$

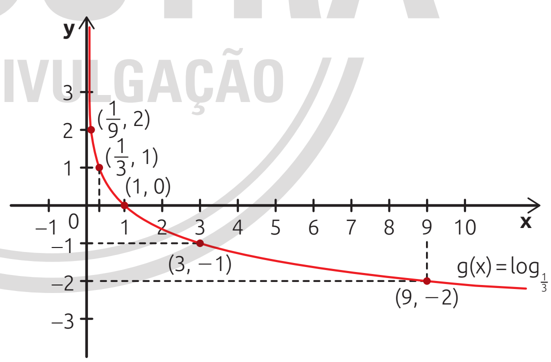


Uma função logarítmica é crescente quando $a > 1$. Em uma função logarítmica f crescente, dados $x_1 \neq x_2$, vemos que $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Analisando o gráfico, vemos que para $0 < x < 1$, $f(x)$ é negativo e para $x > 1$, $f(x)$ é positivo.

Agora, veja a representação gráfica da função logarítmica dada por $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

x	$g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$	(x, y)
$\frac{1}{9}$	$g\left(\frac{1}{9}\right) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$	$\left(\frac{1}{9}, 2\right)$
$\frac{1}{3}$	$g\left(\frac{1}{3}\right) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
1	$g(1) = \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$	$(1, 0)$
3	$g(3) = \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$	$(3, -1)$
9	$g(9) = \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$	$(9, -2)$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Uma função logarítmica é decrescente quando $0 < a < 1$. Em uma função logarítmica g decrescente, dados $x_1 \neq x_2$, vemos que $x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$.

Analisando o gráfico, vemos que para $0 < x < 1$, $g(x)$ é positivo e para $x > 1$, $g(x)$ é negativo.

Nos dois exemplos, o gráfico intersecta o eixo Ox no ponto de coordenadas $(1, 0)$. Isso ocorre porque $\log_a 1 = 0$ para qualquer a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, ou seja, $x = 1$ é zero da função logarítmica.

Como o domínio da função logarítmica é $\mathbb{R}_+^*$, o gráfico está sempre à direita do eixo Oy. Outro fato que ajuda a entender essa característica é que, pela definição de logaritmo, o logaritmando deve ser um número real positivo, portanto só podemos atribuir valores reais positivos na variável independente da função logarítmica.

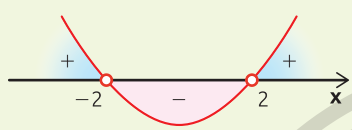
R5. Determine o maior subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ para que a fórmula $f(x) = \log\left(x^2 - 4\right)$ defina uma função $f\colon A \to \mathbb{R}$.

Resolução

Das condições de existência do logaritmo vemos que a base e o logaritmando devem ser maiores do que zero e a base deve ser diferente de 1. Como a base é 10, vamos verificar a condição do logaritmando.

$x^2 - 4 > 0$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{4} = 2 \\ x_2 = -\sqrt{4} = -2 \end{cases}$$

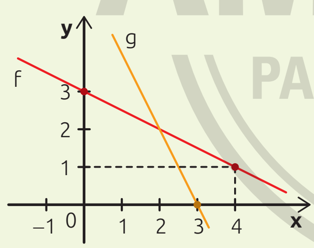


Sergio Lima/ID/BR

Assim, temos $x < -2$ ou $x > 2$.

Portanto, $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\right\}$.

R6. Observe a seguir a representação gráfica das funções afins f e g. Sabendo que essas funções são inversas, escreva a lei de formação de f e g.



Sergio Lima/ID/BR

Resolução

Seja $f(x) = ax + b$ a lei de formação da função f, e os pontos $(0, 3)$ e $(4, 1)$ pertencentes ao seu gráfico. Assim:

- $3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$ (I)
- $1 = a \cdot 4 + b \Rightarrow 4a + b = 1$ (II)

Substituindo em **II** o valor de b encontrado em **I**, segue que:

$$4a + 3 = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Assim, a lei de formação da função f é $f(x) = -\frac{x}{2} + 3$.

Como a função f é inversa da função g, podemos determinar a lei de formação da função g a partir da lei de formação de f de maneira prática.

Trocamos na lei de formação de f, $f(x)$ por x e x por $g(x)$ e isolamos $g(x)$.

$$x = -\frac{g(x)}{2} + 3 \Rightarrow -\frac{g(x)}{2} = x - 3 \Rightarrow g(x) = -2x + 6$$

Portanto, $f(x) = -\frac{x}{2} + 3$ e $g(x) = -2x + 6$.

R7. Sabendo que a função $f\colon \left]3, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log\left(2x - 6\right)$ é bijetora, determine a lei de formação de sua inversa.

Resolução

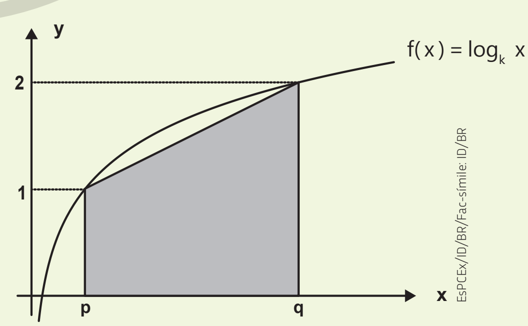
Trocamos $f(x)$ por x e x por $g(x)$ na lei de formação de f, e isolamos $g(x)$.

$$x = \log\left(2 \cdot g(x) - 6\right) \Rightarrow 10^x = 2 \cdot g(x) - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot g(x) = 10^x + 6 \Rightarrow g(x) = \frac{10^x + 6}{2}$$

Portanto, a lei de formação da inversa de f é $g(x) = \frac{10^x + 6}{2}$.

R8. (EsPCEx-SP) Na figura abaixo, dois vértices do trapézio sombreado estão no eixo x e os outros dois vértices estão sobre o gráfico da função real $f(x) = \log_k x$, com $k > 0$ e $k \neq 1$. Sabe-se que o trapézio sombreado tem 30 unidades de área; assim, o valor de $k + p - q$ é:



EsPCEx/ID/BR/Fac-símile: ID/BR

a) −20
b) −15
c) 10
d) 15
e) 20

Resolução

Como o gráfico de f passa pelos pontos $(p, 1)$ e $(q, 2)$, temos $f(p) = 1$ e $f(q) = 2$. Assim:

- $f(p) = 1 \Rightarrow \log_k p = 1 \Rightarrow k = p$ (I)
- $f(q) = 2 \Rightarrow \log_k q = 2 \Rightarrow k^2 = q$ (II)

Sabemos que a área do trapézio sombreado é igual a 30 u.a. Então:

$$\frac{(1+2)(q-p)}{2} = 30 \Rightarrow q - p = 20 \quad \text{(III)}$$

Substituindo **I** e **II** em **III**, temos:

$$k^2 - k = 20 \Rightarrow k^2 - k - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1}$$

Assim:

$$k = \frac{1 + \sqrt{81}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

ou

$$k = \frac{1 - \sqrt{81}}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Como k é positivo, temos $k = 5$. Assim:

- $p = k \Rightarrow p = 5$
- $q = k^2 \Rightarrow q = 5^2 \Rightarrow q = 25$

Logo, $k + p - q = 5 + 5 - 25 = -15$.

Portanto, a alternativa correta é **b**.

Atividades

14. Sabendo que as funções definidas abaixo são bijetoras, determine no caderno a lei de formação da inversa de cada uma.

a) $f(x) = 3x + 2$, $D(f) = CD(f) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x-4}$, $D(f) = CD(f) = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{7}{-x+8}$, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 8\}$ e $CD(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

d) $f(x) = 4x^3 + 5$, $D(f) = CD(f) = \mathbb{R}$

e) $f(x) = 2x^2 + 3^2$, $D(f) = [0, +\infty[$ e $CD(f) = [9, +\infty[$

f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{5}{x-6}}$, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$ e $CD(f) = \mathbb{R}_+^*$

15. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pela função $f(x) = 2x - 1$. No caderno, represente, em um mesmo plano cartesiano, essa função e sua inversa.

16. Associe no caderno cada lei de formação da função à sua respectiva inversa indicando a letra e o símbolo romano correspondente.

a) $f(x) = \log_2(x + 13)$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

c) $f(x) = \log_2(2x - 3)$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(5x - 1)$

I) $f^{-1}(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1}{5}$

II) $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

III) $f^{-1}(x) = 2^x - 13$

IV) $f^{-1}(x) = \dfrac{2^x + 3}{2}$

17. Em cada item, determine no caderno o maior subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ para que a fórmula dada defina uma função de A em $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \log_2(2x - 3)$

b) $f(x) = \log(15 - 3x)$

c) $f(x) = \log_{x-4}\left(\sqrt{x+2}\right)$

d) $f(x) = \log_{2x-2}\left(4x^2 - x - 3\right)$

18. A partir das funções de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \log_2 2x$, $g(x) = \log_3(x + 3)$ e $h(x) = \log_5 \dfrac{5}{x}$, calcule no caderno.

a) $f(16)$

b) $f\left(\sqrt[3]{8}\right)$

c) $g(24)$

d) $g^{-1}(2)$

e) $h(25)$

f) $h\left(5^{-3}\right)$

19. (ESPM-SP) Em 1997 iniciou-se a ocupação de uma fazenda improdutiva no interior do país, dando origem a uma pequena cidade. Estima-se que a população dessa cidade tenha crescido segundo a função $P = 0{,}1 + \log_2(x - 1996)$, na qual P é a população no ano x, em milhares de habitantes. Considerando $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$, podemos concluir que a população dessa cidade atingiu a marca dos 3 600 habitantes em meados do ano:

a) 2005

b) 2002

c) 2011

d) 2007

e) 2004

20. (Uece) A função $f(x) = \log_2 x$, denominada de função logaritmo na base 2, é definida para todo número real positivo x. São bem conhecidas, dentre outras, as seguintes propriedades da função f: para cada número real positivo a e para todo número inteiro n, verificam-se as igualdades $2^{f(a)} = a$ e $f(a^n) = n \cdot f(a)$. Com base nestes fatos e em outros conhecimentos básicos de matemática, é possível concluir-se corretamente que $f(0{,}03125)$ é igual a

a) -5. b) -2. c) 2. d) 5.

21. Dada sua lei de formação, classifique cada função logarítmica em crescente ou decrescente.

a) $f(x) = \log_{17} x$

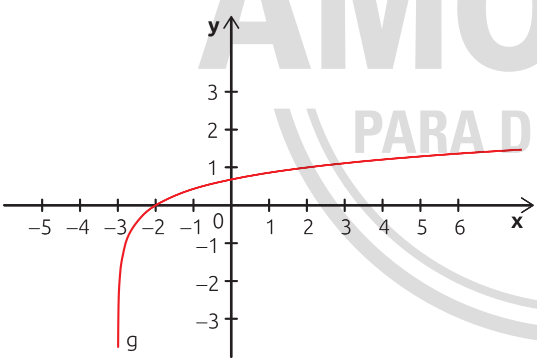
b) $f(x) = \log_{\frac{3}{5}} x$

c) $f(x) = \log_{\frac{5}{6}} x$

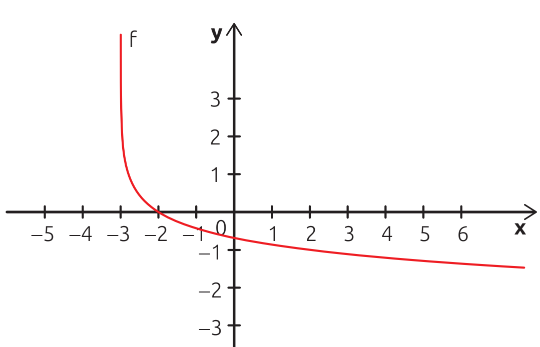
d) $f(x) = \ \log x$

22. Os gráficos a seguir são translações de gráficos de funções logarítmicas. Identifique se a função representada em cada item é crescente ou decrescente. Justifique.

a)



b)

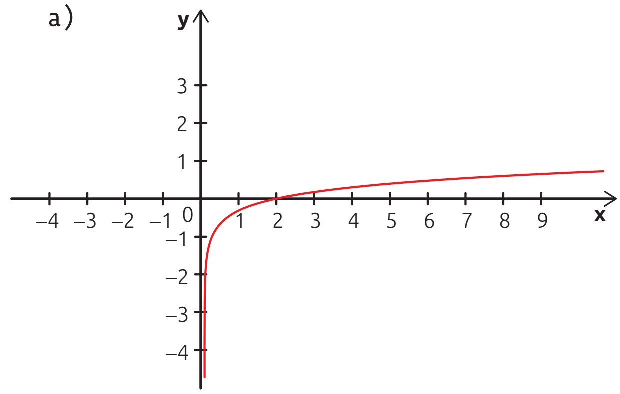


Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

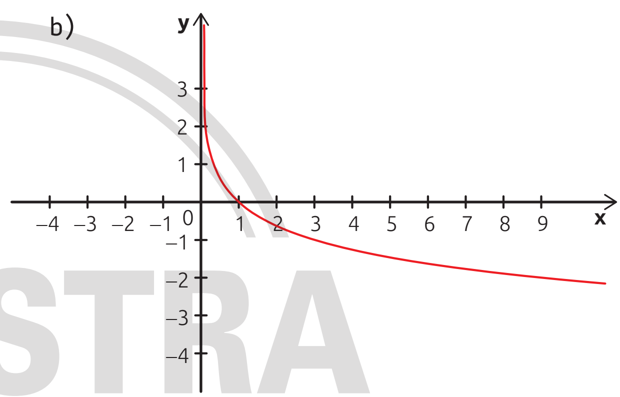
23. No caderno, esboce em um mesmo plano cartesiano o gráfico da função logarítmica dada por $f(x) = \log_2 x$ e sua inversa.

24. Os gráficos a seguir são translações de gráficos de funções logarítmicas. Qual dos gráficos abaixo melhor representa a função $f:]-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log(x + 2)$?

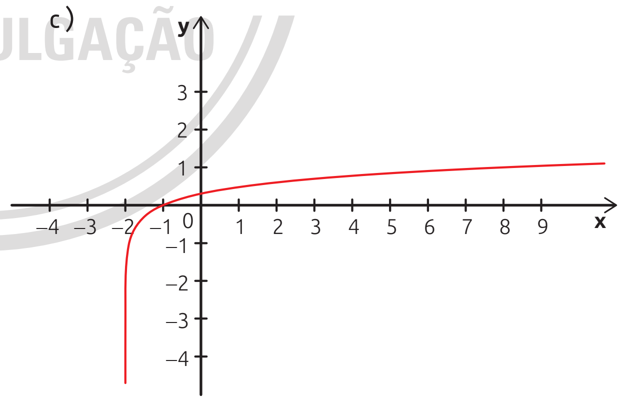
a)



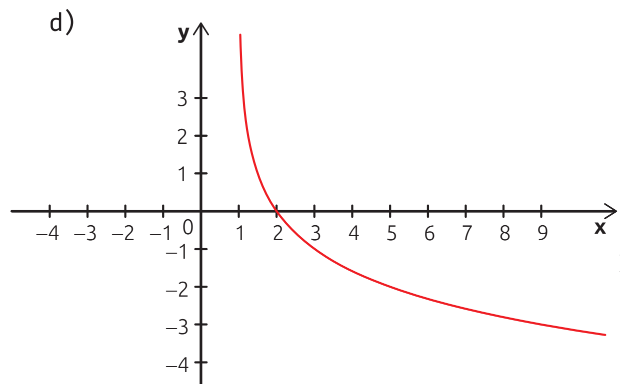
b)



c)



d)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Equação logarítmica

> Equação logarítmica é toda equação que apresenta incógnita na base do logaritmo, no logaritmando ou em ambos.

Veja alguns exemplos de equações logarítmicas.

- $\log_2(x+2) = \log_2(2x-4)$
- $2 \cdot \log x + 3 = (\log x)^2$
- $\log_{(x-2)} 9 = 2$

Observe como é possível resolver a equação dada por $\log_2(x+2) = \log_2(2x-4)$.

Quando os logaritmos que aparecem na equação possuem bases iguais, podemos utilizar a propriedade $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$. Deste modo, $\log_2(x+2) = \log_2(2x-4) \Leftrightarrow x+2 = 2x-4$.

Resolvendo a equação da direita, temos:

$$x + 2 = 2x - 4 \Rightarrow x = 6$$

Antes de afirmar qual é o conjunto solução de uma equação logarítmica, devemos ficar atentos às condições de existência do logaritmo, ou seja, $\log_a b$ com a e b reais positivos e $a \neq 1$.

Agora, verificamos se o valor $x = 6$ cumpre a condição de existência do logaritmo.

$$x + 2 = 6 + 2 = 8 > 0 \qquad 2x - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0$$

Portanto, o conjunto solução da equação dada por $\log_2(x+2) = \log_2(2x-4)$ é $S = \{6\}$.

Para resolver algumas equações logarítmicas, é necessário utilizar o recurso de uma incógnita auxiliar. Observe uma maneira de resolver a equação $2 \cdot \log x + 3 = (\log x)^2$.

Atribuindo a incógnita auxiliar $y = \log x$, temos:

$$2 \cdot \log x + 3 = (\log x)^2 \Rightarrow 2 \cdot y + 3 = y^2 \Rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, temos:

$$y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

- Para $y = 3$:

$$y = 3 \Rightarrow \log x = 3 \Rightarrow x = 10^3 = 1\,000$$

- Para $y = -1$:

$$y = -1 \Rightarrow \log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

Portanto, o conjunto solução da equação dada por $2 \cdot \log x + 3 = (\log x)^2$ é $S = \left\{1\,000, \frac{1}{10}\right\}$.

Também podemos aplicar a própria definição de logaritmo para resolver uma equação logarítmica. Observe como resolver a equação dada por $\log_{(x-2)} 9 = 2$.

Pela definição de logaritmo, temos:

$$\log_{(x-2)} 9 = 2 \Rightarrow (x-2)^2 = 9$$

Resolvendo a equação do 2º grau, temos:

$$(x-2)^2 = 9$$

$$x^2 - 4x + 4 = 9$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x = 5 \text{ ou } x = -1$$

Pela condição de existência do logaritmo, a base deve ser um número real positivo e diferente de 1, ou seja, $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ e $x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$. Logo, $5 \in S$ e $-1 \notin S$.

Portanto, o conjunto solução da equação dada por $\log_{(x-2)} 9 = 2$ é $S = \{5\}$.

Inequação logarítmica

Inequação logarítmica é toda inequação que apresenta incógnita na base do logaritmo, no logaritmando ou em ambos.

Veja alguns exemplos de inequações logarítmicas.

- $\log_7 (x-3) < \log_7 8$
- $\log_{\frac{1}{2}} (x-10) > -2$

Para resolver uma inequação logarítmica, devemos recordar as seguintes propriedades:

- para $a > 1$: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$
- para $0 < a < 1$: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

Lembre-se de que o logaritmando é sempre um número real positivo.

Para resolver, por exemplo, a inequação logarítmica $\log_7 (x-3) < \log_7 8$ em $\mathbb{R}$, procedemos da seguinte maneira:

Como $a = 7 > 1$, então temos:

$$\log_7 (x-3) < \log_7 8 \Rightarrow x - 3 < 8 \Rightarrow x < 8 + 3 \Rightarrow x < 11$$

Pela condição de existência de logaritmo, temos $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$.

Logo, x é um número real maior do que 3 e menor do que 11.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 11\}$$

Veja agora como resolver a inequação logarítmica $\log_{\frac{1}{2}} (x-10) > -2$ em $\mathbb{R}$.

Escolhendo convenientemente a base $\frac{1}{2}$, podemos escrever no segundo membro da inequação $-2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$.

Logo, a inequação ficará da seguinte maneira:

$$\log_{\frac{1}{2}} (x-10) > -2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (x-10) > -2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (x-10) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

Como $a = \frac{1}{2}$ e $0 < \frac{1}{2} < 1$, podemos escrever:

$$\log_{\frac{1}{2}} (x-10) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Rightarrow x - 10 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

Resolvendo a inequação da direita, temos:

$$x - 10 < 2^2 \Rightarrow x < 14$$

Pela condição de existência do logaritmo, temos $x - 10 > 0$. Logo, $x > 10$.

Portanto, x é um número real maior do que 10 e menor do que 14.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 10 < x < 14\right\}$$

R9. Calcule os valores reais de x de maneira que a igualdade $\log\left(x^2 - 4\right) = \log(3x)$ seja verdadeira.

Resolução

Pela condição de existência do logaritmo:

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 & \text{(I)} \\ 3x > 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Vamos determinar os possíveis valores de x para que a igualdade seja verdadeira.

$$\log\left(x^2 - 4\right) = \log(3x) \Rightarrow x^2 - 4 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \dfrac{3-5}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Substituindo esses valores em **I** e **II**, temos:

- para $x = 4$:

$$\begin{cases} 4^2 - 4 > 0 \\ 3 \cdot 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 > 0 \\ 12 > 0 \end{cases}$$

(sentenças verdadeiras)

- para $x = -1$:

$$\begin{cases} (-1)^2 - 4 > 0 \\ 3 \cdot (-1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 > 0 \\ -3 > 0 \end{cases}$$

(sentenças falsas)

Portanto, $x = 4$ é o único valor que torna a igualdade $\log\left(x^2 - 4\right) = \log(3x)$ verdadeira.

R10. (UPF-RS) As populações de duas cidades, **M** e **N**, são dadas em milhares de habitantes pelas funções:

$M(t) = \log_8 (1 + t)^6$ $\qquad$ $N(t) = \log_2 (4t + 4)$

Onde a variável t representa o tempo em anos. Após certo instante t, a população de uma dessas cidades é sempre maior do que a da outra. O valor mínimo desse instante t é:

a) -1 $\qquad$ b) 0 $\qquad$ c) 2 $\qquad$ d) 3 $\qquad$ e) 4

Resolução

A função que determina as populações da cidade **M** é dada por:

$$M(t) = \log_8 (1 + t)^6 = \frac{\log_2 (1 + t)^6}{\log_2 8} = \frac{\log_2 (1 + t)^6}{3} = \frac{1}{3}\log_2 (1 + t)^6$$

A função M é dada pelo logaritmo de base 2 de uma função polinomial e a função N é dada pelo logaritmo de base 2 de uma função afim. Como a função polinomial em questão tende a ficar maior mais rapidamente que a função afim a partir de determinado valor, vamos supor que a função M fique maior do que N. Assim:

$$M(t) > N(t) \Rightarrow \frac{1}{3}\log_2 (1 + t)^6 > \log_2 (4t + 4) \Rightarrow \frac{6}{3}\log_2 (t + 1) > \log_2 4 + \log_2 (t + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\log_2 (t + 1) - \log_2 (t + 1) > \log_2 4 \Rightarrow \log_2 (t + 1) > \log_2 4 \Rightarrow t + 1 > 4 \Rightarrow t > 3$$

Portanto, a população da cidade **M** será maior do que a população da cidade **N** após 3 anos. Assim, a alternativa correta é **d**.

Atividades resolvidas

R11. Um determinado plano de investimento a longo prazo oferecido por um banco tem juros compostos de 15% ao ano. Bruno pretende investir um capital C nesse plano, a fim de retirar o montante quando conseguir o equivalente a 4 vezes o capital investido. Quantos anos Bruno deve deixar o dinheiro investido para conseguir o valor que deseja?

Considere $\log_{1,15} 2 \simeq 4{,}959$.

Resolução

Sabemos que o montante é dado por $M = C(1 + i)^t$, em que C é o capital inicial, i a taxa de juros e t o tempo de investimento. Assim:

$$4C = C(1 + 0{,}15)^t \Rightarrow 4 = 1{,}15^t \Rightarrow \log_{1,15} 4 = \log_{1,15} 1{,}15^t \Rightarrow 2\log_{1,15} 2 = t\log_{1,15} 1{,}15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \simeq 2 \cdot 4{,}959 \Rightarrow t \simeq 9{,}918$$

Portanto, para quadruplicar o seu capital, Bruno deve deixar seu dinheiro investido por 10 anos.

Atividades

25. Resolva as seguintes equações.

a) $\log_4(x + 4) = 3$

b) $\log_6(2x + 16) = 2$

c) $\log_5(x^2 - 6x + 8) = \log_5(2x + 1)$

d) $\log_3(x - 2) = \log_3(-x + 8)$

26. Resolva, da maneira que preferir, as seguintes equações.

a) $6\log x - \log 5^5 = \log x$

b) $\log_3(\log_2 x) = 3$

c) $(\log_2 x)^2 - \log_2 x = 2$

27. Resolva as seguintes inequações em $\mathbb{R}$.

a) $\log_{\sqrt{2}}(x - 1) < \log_{\sqrt{2}} 2$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(2x + 1) \leqslant \log_{\frac{1}{2}}(x + 3)$

c) $\log_2(5x - 2) < \log_2 4$

d) $\log_{0,5}(4x - 3) < \log_{0,5} 5$

28. Determine o conjunto solução das inequações a seguir em $\mathbb{R}$.

a) $\log_{\frac{1}{2}}(4x - 2) < 2$

b) $\log_{\frac{1}{4}}(x - 8) > -2$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(3x - 5) < -3$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \geqslant 3$

29. Qual das alternativas a seguir apresenta o conjunto solução da inequação $\log_{\frac{1}{2}}(3x + 1) > -2$ em $\mathbb{R}$?

a) $S = \varnothing$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \frac{1}{3}\right\}$

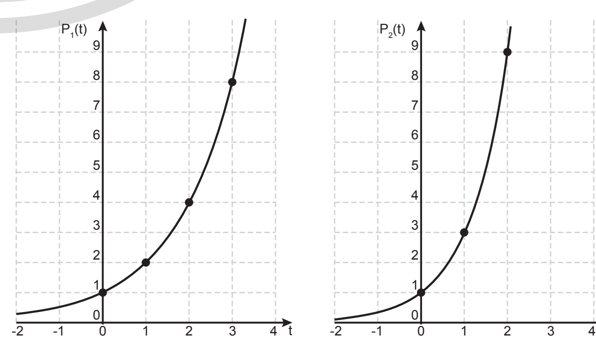
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{3} < x < 1\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < -\frac{1}{3}\right\}$

30. **Ferramentas** (UEL-PR) Sejam

$$P_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \quad \text{e} \quad P_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$
$$t \to P_1(t) \qquad\qquad t \to P_2(t)$$

funções, cujas representações gráficas são mostradas nas figuras a seguir.



Ilustrações: UEL/Fac-Símile: ID/BR

Considere que para $t \geqslant 0$ a cada uma dessas funções está associada a população de uma colônia de bactéria no instante t (medido em horas) e que a quantidade inicial de bactérias é a mesma para as duas colônias. Em que instante a população associada à função P_2 é igual ao dobro da população associada à função P_1?

Não escreva no livro.

Verificando rota

1. Cite possíveis maneiras de calcular potências com expoente irracional.

2. A função exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$, possui algumas propriedades para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^1 = a$
- $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$

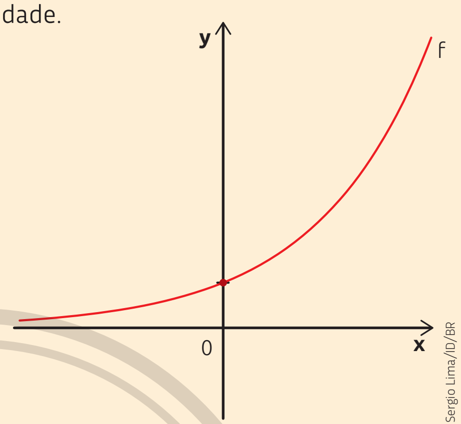
Apresente um exemplo numérico para cada propriedade.

3. Observe ao lado o gráfico da função exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $a > 1$.

a) A função f é crescente ou decrescente?

b) Qual a ordenada do ponto em que o gráfico de f intersecta o eixo Oy? Justifique.

c) Justifique por que o gráfico de f não intersecta o eixo Ox.



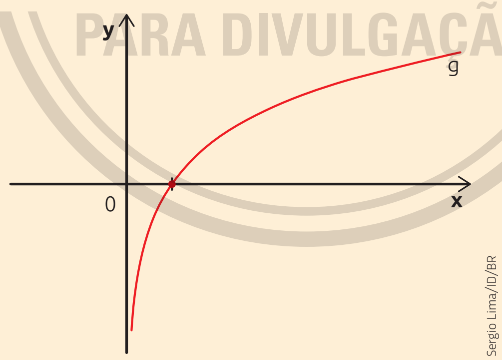
4. Defina logaritmo.

5. O que é um logaritmo decimal?

6. Quando a função $g\colon B \to A$ é inversa da função $f\colon A \to B$?

7. Os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação a qual reta?

8. Observe abaixo o gráfico da função logarítmica $g\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \log_a x$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $a > 1$.



a) A função g é crescente ou decrescente?

b) Qual a abscissa do ponto em que o gráfico de g intersecta o eixo Ox? Justifique.

9. Seja a função logarítmica $g\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \log_a x$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $0 < a < 1$. Determine para quais valores de x:

- $g(x) < 0$
- $g(x) = 0$
- $g(x) > 0$

10. O que é equação logarítmica?

11. A página de abertura da unidade **3** apresentou a Lua como assunto inicial, com informações a respeito da influência desse satélite natural na Terra e do interesse de alguns estudiosos. Qual dos conteúdos trabalhados durante esta unidade se relaciona com este tema?

Ampliando fronteiras

Lei de Benford e suas aplicações

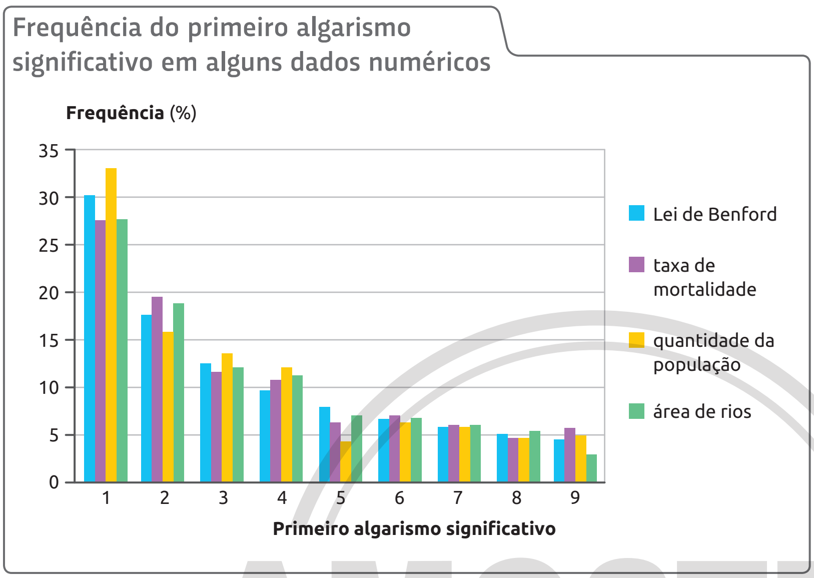
Simon Newcomb

Antes das calculadoras, os livros com tabelas logarítmicas eram utilizados para facilitar os cálculos com números grandes, ou seja, números com muitos algarismos. Em 1881, o astrônomo Simon Newcomb percebeu que as primeiras páginas desses livros – que continham logaritmos de números iniciados com os algarismos 1, 2 e 3 – estavam bem mais desgastadas que as demais. Para ele, isso foi indício de que os cálculos com números grandes começados com 1, 2 e 3 são muito mais frequentes do que com os iniciados com 7, 8 e 9, por exemplo. Conforme seu interesse, Newcomb escreveu um artigo sobre a frequência dos primeiros dígitos significativos de um número, que segue uma determinada distribuição de probabilidade. No entanto, não houve mais estudos a respeito dessa descoberta, restando apenas as suas contribuições.

O primeiro algarismo significativo de um número positivo é o dígito não nulo, mais à esquerda em sua representação decimal. Por exemplo, o primeiro algarismo significativo de 6,384 é o 6, o de 0,091 é o 9 e o de π é o 3.

Frank Benford

Em 1938, o físico Frank Benford, sem ter conhecimento do artigo de Newcomb, após analisar mais de 20 000 números (taxa de mortalidade, quantidade da população, área de rios, entre outros dados), verificou que a distribuição dos primeiros dígitos significativos seguia certa regularidade e demonstrou uma fórmula para determinar tal padrão de probabilidade, a **Lei de Benford**. Observe, no gráfico, uma simulação desse padrão com dados fictícios.



Sergio Lima/ID/BR

Dados fictícios.

Essa Lei é aplicável em conjuntos numéricos sem prévia manipulação, ordenamento ou aleatoriedade. Isto é, devem ser gerados de forma natural, como em cálculos de: populações de países, áreas e comprimentos de rios. Além disso, a Lei de Benford não varia por mudança de escala. Independentemente de a medição ser em quilômetros ou em milhas, a probabilidade se mantém constante.

Um conjunto de dados numéricos satisfaz a Lei de Benford se o primeiro algarismo significativo (d) ocorrer com a seguinte probabilidade:

$$P(d) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right), \text{ com } d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Essa Lei pode ser utilizada na detecção de fraudes, erros e manipulações de demonstrações contábeis, sonegações de impostos, eleições, entre outras ocorrências, porque é fácil de aplicá-las e fornece resultados confiáveis. Por isso, muitas empresas de auditoria utilizam programas baseados na Lei de Benford.

A Em um conjunto de dados numéricos que satisfaz a Lei de Benford, a probabilidade de ocorrer 1 no primeiro algarismo significativo de um número é menor, igual ou maior do que a probabilidade de ocorrer 9?

B Com o auxílio de uma calculadora e utilizando a fórmula acima, realize os cálculos e represente em um quadro a probabilidade dos primeiros algarismos significativos de acordo com a Lei de Benford.

Izaac Brito/ASC Imagens

unidade 4

- **capítulo 8**
  Sequências e progressões
- **capítulo 9**
  Estatística
- **capítulo 10**
  Trigonometria

Quase todos consideram que é bom ouvir música, mas talvez poucos saibam que ela também é benéfica para a saúde. Ela auxilia tanto na recuperação de pessoas com deficiência visual e auditiva quanto no desenvolvimento de deficientes mentais. De acordo com alguns estudiosos, a música ativa o centro de prazer do cérebro, aliviando dores, melhorando a memória e estimulando a prática de atividades físicas. Por esse motivo, as canções têm sido muito utilizadas na reabilitação física e mental, e rendem ótimos resultados.

Nesta unidade serão apresentadas sequências e progressões, assuntos que estão relacionados aos padrões das notas musicais.

Nicolas Asfouri/AFP/Getty Images

Ensaio da orquestra Thai, composta por deficientes visuais, antes de um concerto no parque nacional de Khao Yai, a nordeste de Bangkok, capital tailandesa, em janeiro de 2015. Habilmente capacitados, esses jovens músicos memorizam as sequências de notas após a leitura das pautas em braille, desafiando assim as próprias limitações físicas.

Nesta unidade, você vai estudar características e particularidades entre sequências e progressões aritméticas e geométricas, distinguir e aplicar algumas medidas de tendência central na análise de informações e explorar as relações métricas e trigonométricas nos triângulos.

capítulo 8

Sequências e progressões

Sequências

Sequência é o modelo matemático de situações em que determinados tipos de elementos são postos em sucessão, de modo ordenado. Observe a seguir um exemplo prático em que o conceito de sequência pode ser utilizado.

Mirela aplicou R$ 10 000,00 em um investimento cuja rentabilidade é dada por um juro composto de 1% ao mês. Observe o montante, em reais, mês a mês, a partir do início da aplicação.

1º mês: $a_1 = 10\,000$

2º mês: $a_2 = 10\,000 \cdot 1{,}01 = 10\,100$

3º mês: $a_2 = 10\,000 \cdot 1{,}01^2 = 10\,201$

4º mês: $a_3 = 10\,000 \cdot 1{,}01^3 = 10\,303{,}01$

$\vdots$

n-ésimo mês: $a_n = 10\,000 \cdot 1{,}01^{n-1}$

$\vdots$

> Lembre-se de que, no regime de juro composto, o juro é sempre calculado sobre o montante do período anterior a partir do segundo período considerado na situação. No primeiro período, que é o período inicial, o capital é igual ao montante.

Se fosse possível para Mirela manter esse dinheiro investido por uma quantidade infinita de meses, os valores $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ formariam uma sequência de números reais, que pode ser denotada por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ ou, de maneira abreviada, por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou (a_n). Cada número a_n, com $n \in \mathbb{N}^*$, é um **termo** da sequência, e o índice n indica a posição ou a ordem desse termo na sequência.

Uma sequência de números reais é uma função em que o domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$. Denotamos por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou (a_n) a sequência $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ em que:

- $f(1) = a_1$ é o 1º termo da sequência;
- $f(2) = a_2$ é o 2º termo da sequência;
- $f(3) = a_3$ é o 3º termo da sequência;

  $\vdots$
- $f(n) = a_n$ é o n-ésimo termo da sequência;

  $\vdots$

A sequência possui uma quantidade infinita de termos e, por isso, também pode ser denominada **sequência infinita**. Por outro lado, se o domínio é o conjunto $\{1, 2, 3, ..., k\}$, a função corresponde a uma **sequência finita com *k* termos**, e é denotada por $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$.

> Na prática, a sequência dos montantes obtidos na aplicação de Mirela deverá ser finita, pois em determinado mês *n*, ela retirará o montante.

Em vez de serem números reais, os termos de uma sequência poderiam ser elementos de um conjunto não vazio qualquer *U*. Nesse caso, o contradomínio da função é o conjunto *U*, e dizemos que (a_n) é uma sequência em *U*.

Exemplos

a) A sequência $(1, 1, 1, 1, ...)$ em que todos os termos são iguais a 1 é um exemplo de **sequência constante**. Em geral, dado $c \in \mathbb{R}$, a sequência (a_n) em que $a_n = c$ é uma sequência constante.

b) A sequência dada por $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, ..., $a_n = 2n$, ... é a sequência dos números pares positivos. Tem-se $a_n = 2n = (2, 4, 6, 8, 10, 12, ...)$.

c) Se definirmos $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, obteremos a sequência (a_n) em que os dez primeiros termos são:

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 1$
- $a_3 = 1 + 1 = 2$
- $a_4 = 1 + 2 = 3$
- $a_5 = 2 + 3 = 5$
- $a_6 = 3 + 5 = 8$
- $a_7 = 5 + 8 = 13$
- $a_8 = 8 + 13 = 21$
- $a_9 = 13 + 21 = 34$
- $a_{10} = 21 + 34 = 55$

Nessa sequência, cada termo, a partir do terceiro, é obtido com a adição dos valores dos dois termos anteriores. Essa sequência é conhecida como **Sequência de Fibonacci**.

Para algumas sequências há o chamado **termo geral**, ou seja, uma expressão que permite calcular o valor de qualquer termo conhecendo-se apenas a sua posição *n*. O termo geral de uma sequência constante em $\mathbb{R}$ é $a_n = c$, em que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. A sequência do exemplo **b** possui o termo geral $a_n = 2n$. Já a sequência de Fibonacci, no exemplo **c**, foi definida por **recorrência**, pois foram dados os primeiros termos e uma regra que permite calcular cada um dos outros conhecendo-se o valor de termos anteriores.

É possível definir uma sequência constante por recorrência? Em caso afirmativo, defina por recorrência a sequência do termo geral $a_n = 2$.

Atividades resolvidas

R1. Determine os seis primeiros termos da sequência definida por $a_{n+1} = -5 \cdot a_n$, cujo primeiro termo é $a_1 = -1$.

Resolução

Queremos determinar a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6. Sabendo que $a_{n+1} = -5 \cdot a_n$, e que $a_1 = -1$, temos:

- $a_2 = -5 \cdot a_1 = (-5) \cdot (-1) = 5$
- $a_3 = -5 \cdot a_2 = (-5) \cdot 5 = -25$
- $a_4 = -5 \cdot a_3 = (-5) \cdot (-25) = 125$
- $a_5 = -5 \cdot a_4 = (-5) \cdot 125 = -625$
- $a_6 = -5 \cdot a_5 = (-5) \cdot (-625) = 3\,125$

Portanto, os seis primeiros termos dessa sequência são −1, 5, −25, 125, −625 e 3 125.

R2. Seja a sequência infinita $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$. Determine:

a) o termo geral da sequência;

b) o centésimo termo.

Resolução

a) Dados os primeiros termos da sequência, podemos estabelecer a seguinte relação:

n	a_n
1	1
2	$1 + 2 = 3$
3	$1 + \underbrace{2 + 2}_{2 \cdot 2} = 1 + 2 \cdot 2 = 5$
4	$1 + \underbrace{2 + 2 + 2}_{3 \cdot 2} = 1 + 3 \cdot 2 = 7$
5	$1 + \underbrace{2 + 2 + 2 + 2}_{4 \cdot 2} = 1 + 4 \cdot 2 = 9$
$\vdots$	$\vdots$
n	$1 + (n-1) \cdot 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$

Portanto, o termo geral dessa sequência é dado por $a_n = 2n - 1$.

b) Pelo item anterior, $a_n = 2n - 1$. Logo:

$$a_{100} = 2 \cdot 100 - 1 = 199$$

Portanto, o centésimo termo dessa sequência é 199.

Atividades

1. Escreva no caderno os cinco primeiros termos de cada sequência, cujos termos gerais são:

a) $a_n = n + 2$

b) $a_n = 2n + 1$

c) $a_n = 2^{n+2}$

d) $a_n = \dfrac{1}{n}$

2. Determine o termo geral de cada sequência a seguir.

a) $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$

b) $(4, 8, 12, 16, 20, \ldots)$

c) $(0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$

3. Na sequência dos múltiplos naturais de 3, qual número ocupa a 15ª posição?

4. Determine o 5º termo de cada uma das sequências representadas pelos seus respectivos termos gerais.

a) $a_n = n + 5$

b) $a_n = 2^{n-2}$

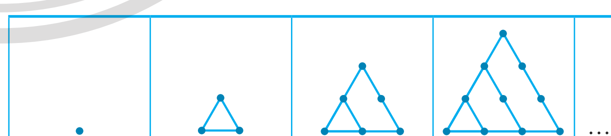
c) $a_n = \dfrac{1}{n+1}$

d) $a_n = 3 \cdot 2^n$

e) $a_n = 2^n$

f) $a_n = n - 1$

5. Os números triangulares podem ser representados, a partir da segunda figura, na forma de um triângulo. Observe a sequência abaixo.



1	3	6	10	...

Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Com base na quantidade de pontos dessas imagens, podemos formar a sequência $(1, 3, 6, 10, \ldots)$.

a) Qual termo geral permite calcular os termos dessa sequência de números triangulares?

- $a_n = n(n+1)$
- $a_n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$
- $a_n = \dfrac{(n+1)}{2}$
- $a_n = (n+1)^2$

b) Qual é a quantidade de pontos do 8º termo dessa sequência?

c) Escreva os oito primeiros termos dessa sequência.

6. Fractais, do latim *fractus*, significa fração, quebrado, e referem-se a figuras geométricas que têm como uma das principais características a autossimilaridade, ou seja, um padrão repetido tanto na parte quanto no todo. Um dos primeiros matemáticos a estudar os fractais foi o polonês Benoit Maldelbrot (1924-2010), e os estudos nessa área avançaram muito com os recursos computacionais atuais. Na natureza são encontrados exemplos de fractais em estruturas vegetais e animais. Eles também são artificialmente criados, como na imagem computadorizada abaixo, na qual cada parte do fractal é exatamente uma cópia do original.

Vlad_Nikon/Shutterstock.com/ID/BR

Representação colorida de fractal na forma de sucessivos caracóis, compondo um padrão de espiral em duas partes.

Outro matemático com grande influência no desenvolvimento da Geometria Fractal foi o polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969), que tornou conhecido o Triângulo de Sierpinski no início do século XX, uma das formas elementares da geometria fractal. Observe.

Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

			...
1ª $1 = 3^0$	2ª $3 = 3^1$	3ª $9 = 3^2$	...

Baseando-se nas informações acima, resolva:

a) Quantos triângulos pretos terá a 4ª figura?

b) Qual das sentenças a seguir pode expressar a quantidade de triângulos pretos da figura, que ocupam a n-ésima posição?

- $a_n = 3n$
- $a_n = n^3$
- $a_n = 3^{n-1}$
- $a_n = 3 + n$

7. (Enem/Inep) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500, em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

a) 38 000
b) 40 500
c) 41 000
d) 42 000
e) 48 000

8. A Torre de Hanói é um jogo cujo objetivo é transferir todos os discos de uma haste para outra, movendo-os um a um de maneira que, durante esse processo ou ao final dele, os discos com raios maiores não fiquem posicionados sobre discos com raios menores. Observe na imagem a representação de uma Torre de Hanói.

dmitryelagin/iStock/Getty Images

Torre de Hanói com sete discos em posição inicial de jogo.

A quantidade mínima de movimentos para transferir os discos de uma haste para outra varia conforme a quantidade de discos, formando uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, em que 1, 2, 3, ..., *n* representam as quantidades de discos da torre. Observe no quadro a quantidade mínima de movimentos necessários de acordo com a quantidade de discos.

Quantidade de discos	Quantidade mínima de movimentos
1	$2^1 - 1 = 1$
2	$2^2 - 1 = 3$
3	$2^3 - 1 = 7$
⋮	⋮

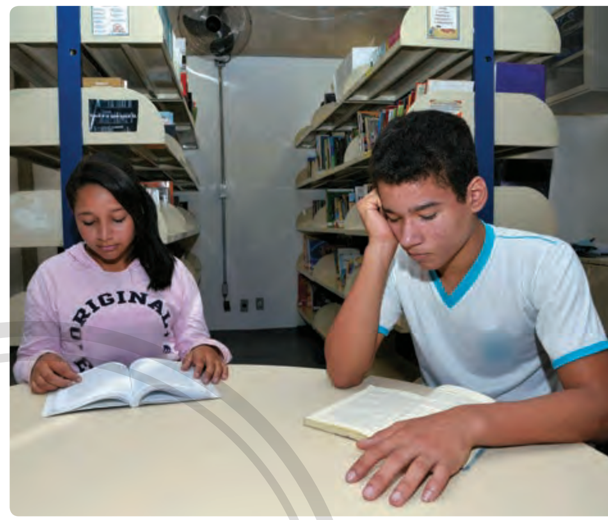
a) Qual é a quantidade mínima de movimentos necessária para transferir os discos de uma haste para a outra em uma torre com quatro discos? E em uma torre com cinco discos?

b) Qual é a expressão que permite calcular cada um dos termos dessa sequência de movimentos?

Progressão aritmética (PA)

Carlos tornou a leitura um hábito pessoal. Ele havia lido, até o início de janeiro de 2018, 20 livros e se dispôs a ler 2 livros por mês, sem repeti-los. Caso consiga cumprir sua meta, observe a quantidade total de livros que Carlos terá lido, mês a mês, a partir do início de janeiro.

Mês	Quantidade total de livros lidos
1º	20
2º	22
3º	24
4º	26
5º	28



João Prudente/Pulsar Imagens

Estudantes da Escola Estadual Professora Leila Mara Avelino, em Sumaré (SP), lendo na biblioteca, em dezembro de 2014. O hábito de ler expande nossa visão de mundo, aumenta nosso vocabulário e torna-se um momento de lazer quando a história é agradável para nós.

A sequência formada pela quantidade total de livros lidos, mês a mês, a partir do início de janeiro, é um exemplo de **progressão aritmética**, abreviadamente conhecida como **PA**. Observe que um termo qualquer dessa sequência, a partir do segundo, é obtido por meio da adição do termo anterior com 2, ou seja:

- $a_2 = \underbrace{20}_{a_1} + 2 = 22$
- $a_3 = \underbrace{22}_{a_2} + 2 = 24$
- $a_4 = \underbrace{24}_{a_3} + 2 = 26$
- $a_5 = \underbrace{26}_{a_4} + 2 = 28$

Nesse caso, tem-se $a_{n+1} = a_n + 2$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

Uma progressão aritmética é uma sequência de números reais em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior adicionado com um número constante r, chamado **razão** da PA. Se (a_n) é uma PA de razão r, então:

$$a_{n+1} = a_n + r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*$$

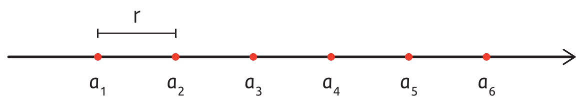
Uma PA pode ser finita ou infinita, dependendo se a sequência é finita ou infinita.

No exemplo anterior, temos uma PA de razão $r = 2$.

Representação de uma PA na reta real

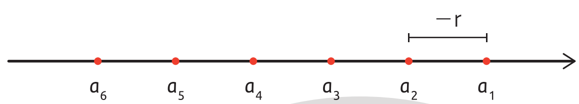
A razão r de uma PA pode ser positiva, negativa ou igual a zero. Observe a representação dos termos da PA na reta real em cada caso, considerando a direita o sentido positivo.

- Se $r > 0$, os termos são dispostos da esquerda para a direita, sendo a distância entre um termo e o seguinte igual a r. Nesse caso, observe que a PA é **crescente**.



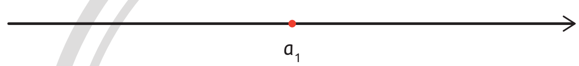
$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < \ldots$$

- Se $r < 0$, os termos são dispostos da direita para a esquerda, sendo a distância entre um termo e o seguinte igual a $-r$. Nesse caso, observe que a PA é **decrescente**.



$$\ldots < a_6 < a_5 < a_4 < a_3 < a_2 < a_1$$

- Se $r = 0$, todos os termos são coincidentes. Nesse caso, observe que a PA é **constante**.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = \ldots$$

Uma PA de razão r é:

- **crescente** quando $r > 0$;
- **decrescente** quando $r < 0$;
- **constante** quando $r = 0$.

Exemplos

a) A sequência $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$, em que $a_n = n$, é uma PA crescente de razão $r = 1$.

b) A PA com 4 termos em que $a_1 = 5$ e $r = -2$ é uma PA decrescente $(5, 3, 1, -1)$.

Termo geral de uma PA

Dados os números reais a e r, a PA cujo primeiro termo é a e cuja razão é r pode ser definida por recorrência da seguinte maneira:

$$a_1 = a \text{ e } a_{n+1} = a_n + r$$

Porém, muitas vezes é conveniente expressar o n-ésimo termo da PA utilizando os valores do primeiro termo a_1 e da razão r. Observe.

- $a_1 = a_1$
- $a_2 = a_1 + r$
- $a_3 = \underbrace{a_2}_{a_1 + r} + r = a_1 + 2r$
- $a_4 = \underbrace{a_3}_{a_1 + 2r} + r = a_1 + 3r$

$\vdots$

- $a_n = a_1 + (n - 1)r$

$\vdots$

Nesse caso, supõe-se que o primeiro termo a_1 seja conhecido.

Caso se conheça um termo a_k qualquer, também podemos utilizar a expressão $a_n = a_k + (n - k)r$. Para demonstrá-la, observe que, de acordo com $a_n = a_1 + (n - 1)r$:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n - 1)r & \text{(I)} \\ a_k = a_1 + (k - 1)r & \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraindo **II** de **I** membro a membro, temos:

$$a_n - a_k = (n - 1)r - (k - 1)r \Rightarrow a_n - a_k = nr - r - kr + r \Rightarrow a_n = a_k + (n - k)r$$

Exemplos

a) Se $(4, 7, 10, 13, \ldots)$ é uma PA em que $a_1 = 4$ e $r = 7 - 4 = 3$, então seu termo geral é:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = 3n + 1$$

b) Sabendo que a sequência $(26, 33, 40, 47, \ldots)$ é uma PA, vamos determinar o termo a_{10}. Observe que $a_1 = 26$ e $r = 33 - 26 = 7$. Utilizando $a_n = a_1 + (n - 1)r$ com $n = 10$, temos:

$$a_{10} = a_1 + 9r = 26 + 9 \cdot 7 = 89$$

A expressão $(n - 1)$ corresponde à quantidade de vezes que a razão r deve ser adicionada a a_1 para obter a_n. Nesse exemplo, obtemos a_{10} quando adicionamos 9 vezes a razão $r = 7$ a $a_1 = 26$.

c) Sabendo que, em uma PA de razão $r = 12$, tem-se $a_5 = 27$, vamos determinar a_8 e a_2. Utilizando $a_n = a_k + (n - k)r$ com $k = 5$, temos:

- para $n = 8$ temos: $a_8 = a_5 + 3r = 27 + 3 \cdot 12 = 63$
- para $n = 2$ temos: $a_2 = a_5 - 3r = 27 - 3 \cdot 12 = -9$

A expressão $(n - k)$ indica a quantidade de vezes que a razão r deve ser adicionada ou subtraída de a_k para obter a_n. Nesse exemplo, adicionamos ou subtraímos, de $a_5 = 27$, três vezes a razão $r = 12$ para obter a_8 ou a_2, respectivamente.

O termo geral de uma PA de primeiro termo a_1 e razão r é:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Se a_k é o k-ésimo termo da PA, então o termo geral também pode ser:

$$a_n = a_k + (n - k)r$$

Por meio de exemplos, verifique que o n-ésimo termo obtido por meio de $a_n = a_k + (n - k)r$ é o mesmo para qualquer valor de k.

R3. Qual é o vigésimo termo de uma PA de razão $r = 7$, cujo décimo termo é $a_{10} = 67$?

Resolução

Utilizando $a_n = a_k + (n - k)r$, com $n = 20$, $k = 10$, $a_k = 67$ e $r = 7$, segue que:

$$a_{20} = 67 + (20 - 10) \cdot 7$$
$$a_{20} = 67 + 10 \cdot 7 = 137$$

Portanto, o vigésimo termo é igual a 137.

R4. Determine a razão r de uma PA infinita cujos três primeiros termos são $a_1 = x + 3$, $a_2 = x - 6$ e $a_3 = 5 - x$.

Resolução

Por se tratar dos termos de uma PA, temos:

- $\underbrace{(x - 6)}_{a_2} = \underbrace{(x + 3)}_{a_1} + r \Rightarrow r = \underbrace{(x - 6)}_{a_2} - \underbrace{(x + 3)}_{a_1}$
- $\underbrace{(5 - x)}_{a_3} = \underbrace{(x - 6)}_{a_2} + r \Rightarrow r = \underbrace{(5 - x)}_{a_3} - \underbrace{(x - 6)}_{a_2}$

Logo,

$$(x - 6) - (x + 3) = (5 - x) - (x - 6)$$
$$x - 6 - x - 3 = 5 - x - x + 6$$
$$-20 = -2x$$
$$x = 10$$

Substituindo $x = 10$ em $r = (x - 6) - (x + 3)$, obtemos $r = (10 - 6) - (10 + 3) = -9$.

R5. Escreva o termo geral da PA, sabendo que $a_6 = 29$ e $a_8 = 41$.

Resolução

O termo geral de uma PA é $a_n = a_1 + (n - 1)r$, conhecidos os valores de a_1 e r.

Substituindo $n = 8$, $k = 6$, $a_6 = 29$ e $a_8 = 41$ em $a_n = a_k + (n - k)r$, obtemos o valor de r:

$$41 = 29 + (8 - 6) \cdot r \Rightarrow 12 = 2r \Rightarrow r = 6$$

Substituindo $r = 6$, $n = 6$ e $a_6 = 29$ em $a_n = a_1 + (n - 1)r$, obtemos o valor de a_1:

$$29 = a_1 + (6 - 1) \cdot 6 \Rightarrow a_1 = 29 - 5 \cdot 6 \Rightarrow a_1 = -1$$

Portanto, o termo geral é:

$$a_n = -1 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow a_n = 6n - 7$$

R6. Sejam os extremos $a_1 = 1$ e $a_9 = 5$ de uma PA composta por nove termos. Determine os demais termos desta PA, denominados de meios aritméticos.

Resolução

Precisamos inserir sete termos entre os valores 1 e 5, sabendo que a sequência dos nove termos compõe uma PA.

O processo de inserir ou intercalar os meios aritméticos dados os extremos de uma PA é denominado **interpolação aritmética**.

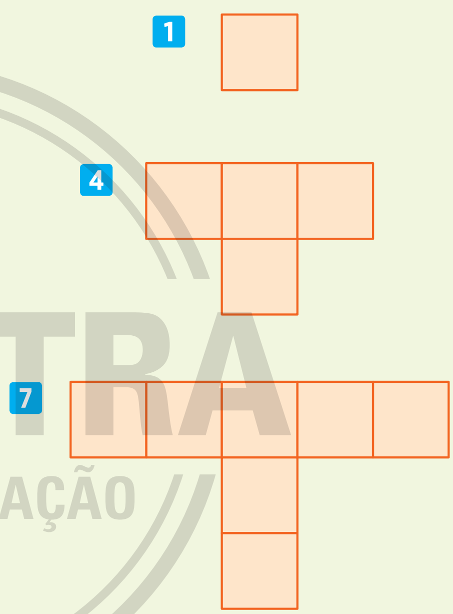
Por meio de $a_n = a_1 + (n - 1)r$, determinamos a razão r da PA. Para isso utilizamos os valores $n = 9$, $a_1 = 1$ e $a_9 = 5$.

$$5 = 1 + (9 - 1) \cdot r \Rightarrow 4 = 8r \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

Portanto, a PA que queremos é

$$\left(1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5\right).$$

R7. A sequência a seguir constitui uma PA, cujo primeiro termo é $a_1 = 1$.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Escreva os próximos três termos desta PA e determine o seu termo geral.

Resolução

Pela sequência temos que os primeiros termos da PA são $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ e $a_3 = 7$. Como a razão de uma PA pode ser definida por $r = a_{n+1} - a_n$, segue que:

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 3$$

Logo:

- $a_4 = a_3 + 3 \Rightarrow a_4 = 7 + 3 = 10$
- $a_5 = a_4 + 3 \Rightarrow a_5 = 10 + 3 = 13$
- $a_6 = a_5 + 3 \Rightarrow a_6 = 13 + 3 = 16$

O termo geral de uma PA é $a_n = a_1 + (n - 1)r$, conhecidos os valores de a_1 e r. Como $a_1 = 1$ e $r = 3$, segue que $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = 3n - 2$.

Atividades

9. Das sequências a seguir, quais são PA?

a) $(2, 4, 6, 8, \ldots)$

b) $(4, 10, 1, 2)$

c) $(-4, -8, -12, -16, \ldots)$

d) $(-5, 7, -8, 1, \ldots)$

e) $\left(-\frac{11}{2}, -5, -\frac{9}{2}, -4, \ldots\right)$

f) $(2, 5, 10, 17, 26, \ldots)$

10. Determine a razão de cada PA. Depois, classifique-as em crescente, decrescente ou constante.

a) $(13, 17, 21, 25, \ldots)$

b) $(-8, -16, -24, -32, \ldots)$

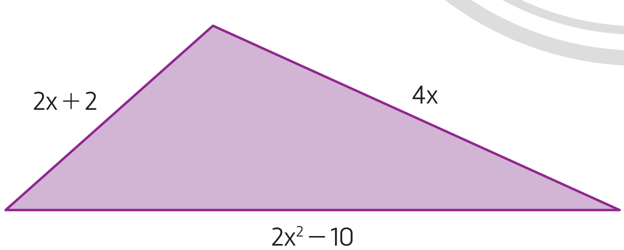
c) $(1, 1, 1, 1, \ldots)$

d) $(10, 17, 24, 31, \ldots)$

e) $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3}, \frac{13}{6}, \ldots\right)$

11. Escreva no caderno os seis primeiros termos de uma PA, sabendo que a razão é 11 e o primeiro termo é 5.

12. Observe o triângulo a seguir cujas medidas são dadas em centímetros.



Sergio Lima/ID/BR

Sabendo que as medidas dos lados deste triângulo formam uma PA, na ordem $(2x + 2)$, $(4x)$, $(2x^2 - 10)$, determine seu perímetro em centímetros.

13. Calcule o 13º termo de uma PA, sabendo que o primeiro termo é 10 e a razão é 15.

14. Qual é o primeiro termo de uma PA, sabendo que $a_{12} = 45$ e $r = 3$?

15. Qual é a razão de uma PA em que $a_1 = 4$ e $a_{26} = 54$?

16. Determine a quantidade de termos de uma PA, sabendo que a razão é igual a 5, o primeiro termo é igual a 6 e $a_n = 36$.

17. Quantos múltiplos de 5 há entre 100 e 1 000?

18. Quantos meios devemos interpolar entre 86 e 107 para termos uma PA de razão 3?

19. (Uece) Os estudiosos de astronomia constataram que o Cometa Halley se aproxima e pode ser visto da Terra a cada 76 anos. A mais antiga visão de que se tem registro data do ano de 1530 e a mais recente ocorreu em 1986. Uma vez mantida a constatação, ao longo do tempo, é possível prever corretamente que, no século XXXI, o Cometa Halley poderá ser visto da Terra:

a) uma única vez, no final da terceira década.

b) uma única vez, próximo à metade do século.

c) duas vezes, nas primeira e oitava décadas.

d) duas vezes, nas segunda e nona décadas.

20. Desafio (Unicamp) O perímetro de um triângulo retângulo é igual a 6,0 m e as medidas dos lados estão em progressão aritmética (PA). A área desse triângulo é igual a:

a) 3,0 m²

b) 2,0 m²

c) 1,5 m²

d) 3,5 m²

21. Em um prazo de três anos, uma pessoa depositou mensalmente certa quantia em reais em sua poupança bancária.

No primeiro mês ela depositou um valor x, no segundo $x + y$, no terceiro $x + 2y$, e assim por diante, de modo que os valores depositados formam uma PA.

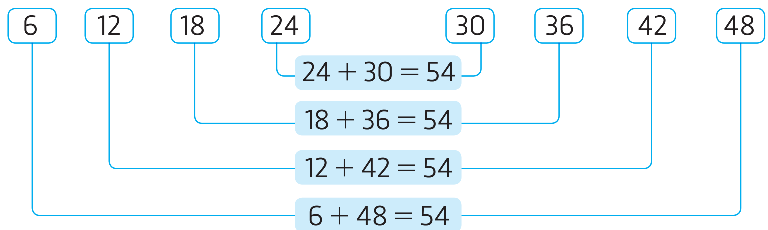
a) Escreva no caderno uma expressão que represente o depósito no último mês.

b) Determine o valor de x e y, em reais, considerando que no segundo mês foi depositado R$ 120,00 e que $a_1 + a_{36} = 2\,616$.

c) Qual foi, em reais, o valor depositado no 26º mês?

Soma dos termos de uma PA finita

Em uma PA finita, o primeiro e o último termos são chamados **extremos** da PA. Considere, por exemplo, a PA $(6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48)$, em que os extremos são $a_1 = 6$ e $a_8 = 48$. Veja, no esquema a seguir, um modo de formar pares com os termos dessa PA, denominados **pares de termos equidistantes dos extremos**.



Uma propriedade importante, que podemos observar no esquema, é que, ao adicionar os dois termos de cada par, obtemos sempre o mesmo valor, correspondente à soma dos extremos da PA. No caso dessa PA, a soma dos extremos é $6 + 48 = 54$.

Essa é uma propriedade válida para qualquer PA finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$. Para demonstrar isso, observe que termos equidistantes dos extremos podem ser expressos por a_{1+k} e a_{n-k}, com $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. A soma desses termos é dada por:

$$a_{1+k} + a_{n-k} = (a_1 + k \cdot r) + (a_n - k \cdot r) = a_1 + a_n$$

Em uma PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Vamos utilizar essa propriedade para obter uma fórmula que calcule a soma dos termos de uma PA finita qualquer.

Se S_n é a soma dos termos da PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, podemos escrever:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad \text{ou} \quad S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Ao calcular $S_n + S_n$, podemos agrupar termos equidistantes dos extremos, como a seguir.

$$S_n + S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Substituindo cada expressão dentro dos parênteses por $a_1 + a_n$, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Essa é uma soma com n parcelas iguais a $(a_1 + a_n)$. Assim:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Os n primeiros termos de uma PA qualquer, finita ou infinita, formam uma PA finita com n termos. Assim, temos o seguinte resultado:

> A soma dos n primeiros termos de uma PA (a_n) é dada por $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

PA e função afim

Lembre-se de que toda sequência é uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^*$. No caso de uma progressão aritmética, o termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)r$ ou $a_n = rn + \left(a_1 - r\right)$, sendo r e a_1 números reais. A PA pode ser relacionada à função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, sendo $a = r$ e $b = a_1 - r$.

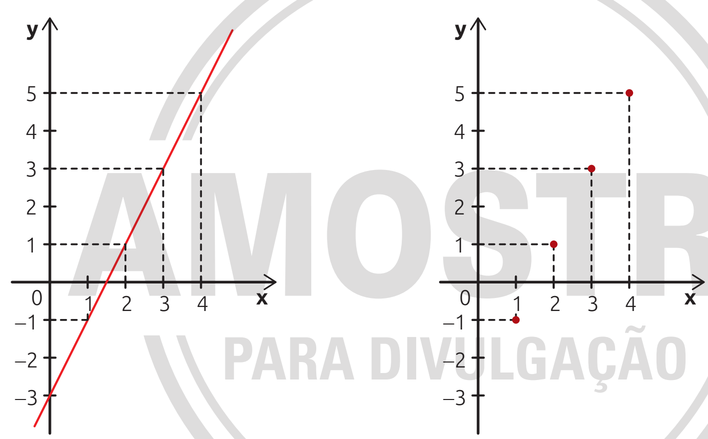
Como um exemplo, considere a PA $(-1, 1, 3, 5, \ldots)$. Temos $a_1 = -1$ e $r = 2$. Logo o termo geral é:

$$a_n = -1 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n + (-1-2) \Rightarrow a_n = 2n - 3$$

Essa PA pode ser relacionada à função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 3$, pois $2 = r$ e $-3 = a_1 - r$.

Assim, a representação gráfica da PA corresponde aos pontos do gráfico de f com abscissas $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

gráfico de f — gráfico de (a_n)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Observe que as funções representadas nos gráficos possuem a mesma lei de formação, porém são definidas em domínios diferentes.

Ao considerarmos uma função afim qualquer, dada por $f(x) = ax + b$, a sequência $\left(f(1), f(2), f(3), \ldots\right)$ será uma PA de razão a, pois, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, vale:

$$f(n+1) - f(n) = a(n+1) + b - (an + b) = an + a + b - an - b = a$$

De maneira geral, para qualquer PA $\left(a_n\right)$ de razão r, a sequência

$\left(f\left(a_1\right), f\left(a_2\right), f\left(a_3\right), \ldots\right)$ será uma PA de razão ar, pois, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, vale:

$$f\left(a_{n+1}\right) - f\left(a_n\right) = a \cdot a_{n+1} + b - \left(a \cdot a_n + b\right) = a\left(\underbrace{a_{n+1} - a_n}_{r}\right) = ar$$

Seja f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim dada por $f(x) = ax + b$ e $\left(a_n\right)$ uma PA de razão r. Então:

- $\left(f(n)\right)$ é uma PA de razão a.
- $\left(f\left(a_n\right)\right)$ é uma PA de razão ar.

Exemplos

a) Uma PA constante $(c, c, c, c, \ldots)$ pode ser relacionada à função constante $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$.

b) Se f é a função afim dada por $f(x) = 5x - 1$ e $(a_n) = (2, 4, 6, 8, \ldots)$ é a PA dada por $a_n = 2n$, então a razão da sequência $(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4), \ldots)$ é $5 \cdot 2 = 10$.

De fato, temos:

- $f(a_1) = f(2) = 5 \cdot 2 - 1 = 9$
- $f(a_2) = f(4) = 5 \cdot 4 - 1 = 19$
- $f(a_3) = f(6) = 5 \cdot 6 - 1 = 29$
- $f(a_4) = f(8) = 5 \cdot 8 - 1 = 39$

$\vdots$

Atividades resolvidas

R8. A primeira edição dos Jogos Paralímpicos ocorreu em 1960, em Roma, na Itália, promovendo jogos que visavam envolver veteranos de guerra com lesão na medula espinhal. Atualmente, os Jogos Paralímpicos são realizados na mesma época e local que os Jogos Olímpicos. Desde a primeira edição, os Jogos Paralímpicos ocorrem a cada quatro anos.

Buda Mendes/STF/Getty Images

Nadador brasileiro André Brasil recebendo a medalha de ouro nos 50 m livre da categoria S10, nos Jogos Paralímpicos de 2012, em Londres, Inglaterra.

a) Escreva uma sequência com os anos das cinco primeiras edições dos Jogos Paralímpicos.

b) Determine uma função que associa o ano de realização dos Jogos Paralímpicos à sua edição.

c) Utilizando a função que foi definida no item **b**, determine em que ano, possivelmente, será realizada a trigésima edição dos Jogos Paralímpicos.

Resolução

a) A primeira edição dos Jogos Paralímpicos foi realizada em 1960. Como ocorrem de quatro em quatro anos, temos uma PA tal que $a_1 = 1960$ e $r = 4$. Logo:

- $a_2 = a_1 + 4 \Rightarrow a_2 = 1960 + 4 = 1964$
- $a_3 = a_2 + 4 \Rightarrow a_3 = 1964 + 4 = 1968$
- $a_4 = a_3 + 4 \Rightarrow a_4 = 1968 + 4 = 1972$
- $a_5 = a_4 + 4 \Rightarrow a_5 = 1972 + 4 = 1976$

Portanto, a sequência com as cinco primeiras edições dos Jogos é 1960, 1964, 1968, 1972 e 1976.

b) O termo geral de uma PA é $a_n = a_1 + (n - 1)r$, conhecidos a_1 e r. Como os anos em que ocorrem as edições dos Jogos Paralímpicos constituem uma PA, sendo $a_1 = 1960$ e $r = 4$, segue que:

$$a_n = 1960 + (n - 1) \cdot 4$$
$$a_n = 1960 + 4n - 4$$
$$a_n = 4n + 1956$$

Logo temos a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(n) = 4n + 1956$, em que n é a edição dos jogos e $f(n)$ o ano de sua realização.

c) Utilizando a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = 4n + 1956$, determinamos $f(30)$.

$$f(30) = 4 \cdot 30 + 1956 = 2\,076$$

Portanto, a trigésima edição dos Jogos Paralímpicos possivelmente acontecerá em 2076.

Atividades resolvidas

R9. (PUC-PR) Um consumidor, ao adquirir um automóvel, assumiu um empréstimo no valor total de R$ 42 000,00 (já somados juros e encargos). Esse valor foi pago em 20 parcelas, formando uma progressão aritmética decrescente. Dado que na segunda prestação foi pago o valor de R$ 3 800,00, a razão desta progressão aritmética é:

a) −300
b) −150
c) −100
d) −350
e) −200

Resolução

Sabemos que as 20 parcelas pagas pelo consumidor constituem uma PA, em que $S_{20} = 42\,000$ e $a_2 = 3\,800$.

Como em uma PA finita a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, podemos escrever $a_1 + a_{20} = a_2 + a_{19}$.

Então:

$$S_{20} = \frac{\left(a_1 + a_{20}\right) \cdot n}{2} = \frac{\left(a_2 + a_{19}\right) \cdot n}{2}$$

Substituindo $a_2 = 3800$, $n = 20$ e $S_{20} = 42000$, temos:

$$42\,000 = \frac{\left(3\,800 + a_{19}\right) \cdot 20}{2}$$

$$4\,200 = 3\,800 + a_{19}$$

$$a_{19} = 400$$

Utilizando $a_n = a_k + (n - k)r$, com $n = 19$ e $k = 2$, determinamos a razão r.

$$a_{19} = a_2 + (19 - 2) \cdot r$$

$$400 = 3\,800 + 17r$$

$$-3\,400 = 17r$$

$$r = -200$$

Portanto, a alternativa correta é **e**.

Atividades

22. Determine a soma dos 10 primeiros termos de cada PA.

a) $(8, 11, 14, 17, \ldots)$
b) $(0, 12, 24, \ldots)$
c) $(-1, 1, 3, \ldots)$
d) $(-15, -9, -3, \ldots)$

23. Determine o valor x para cada sequência ser uma PA. Em seguida, calcule a soma de seus termos.

a) $(2, 2x, 10, 3x + 5, 7x - 3)$
b) $(8, 3x, 4, x, 0)$
c) $(x - 6, 5, 7, x, x + 2, 2x - 5)$
d) $(-8x, 3, -2, x - 6, 12x)$

24. Calcule a soma dos 25 primeiros termos de uma PA cuja razão é 5 e o primeiro termo é 8.

25. Qual é a quantidade de termos de uma PA finita, cuja soma dos termos é 3 721 e os extremos iguais a 1 e 121?

26. Amanda guardou dinheiro durante 8 meses para fazer uma viagem. No primeiro mês ela guardou R$ 150,00. A partir do segundo mês até o oitavo, Amanda guardou o valor do mês anterior mais R$ 10,00. Qual foi a quantia total em reais que Amanda conseguiu guardar para a viagem?

27. Seja a PA $(2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 2n, \ldots)$. Calcule a soma dos n primeiros termos desta sequência.

28. Seja a PA $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n - 1, \ldots)$. Calcule a soma dos n primeiros termos desta sequência.

29. (Enem/Inep) As projeções para a produção de arroz no período de 2012-2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de:

a) 497,25
b) 500,85
c) 502,87
d) 558,75
e) 563,25

30. A professora Soraia está ensaiando uma apresentação de final de ano com algumas turmas da escola em que trabalha. Para a apresentação, Soraia organizou os alunos de maneira que fique um na primeira fileira, dois na segunda, três na terceira, e assim por diante, formando uma sequência com 20 fileiras, como mostra o esquema abaixo.

Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

a) Quantos alunos Soraia está ensaiando?

b) Em outra apresentação, Soraia organizou os mesmos alunos em um número menor de fileiras, de modo que a primeira fileira ficou com um aluno, a segunda com quatro alunos, a terceira com sete alunos, e assim por diante, formando uma sequência. Quantas fileiras serão formadas organizando os alunos desta maneira?

31. Um atleta treinou para participar de uma maratona da seguinte maneira: na primeira semana ele correu 37 km; na segunda ele correu 37 km mais r km; na terceira semana ele correu a mesma quantidade que a semana anterior, mais r km, sendo r uma distância fixa.

a) Sabendo que ao longo desse treino o atleta correu ao todo 434,5 km e que na última semana ele percorreu 42 km, quantas foram as semanas de treinamento?

b) A distância r corresponde a quantos metros?

32. Considere a função afim definida por $f(x) = 4x - 30$, cujo domínio são os termos da PA $(11, 15, 19, 23, 27, \ldots)$ e o contradomínio o conjunto dos números naturais.

a) Determine a PA cujos termos são os elementos do conjunto imagem de f.

b) Qual é o termo geral da PA obtida no item **a**?

33. (UERJ) Admita a realização de um campeonato de futebol no qual as advertências recebidas pelos atletas são representadas apenas por cartões amarelos. Esses cartões são convertidos em multas, de acordo com os seguintes critérios:

- os dois primeiros cartões recebidos não geram multas;
- o terceiro cartão gera multa de R$ 500,00;
- os cartões seguintes geram multas cujos valores são sempre acrescidos de R$ 500,00 em relação ao valor da multa anterior.

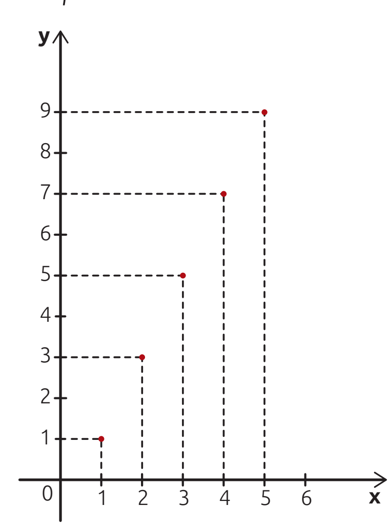
No quadro, indicam-se as multas relacionadas aos cinco primeiros cartões aplicados a um atleta.

Cartão amarelo recebido	Valor da multa (R$)
1º	—
2º	—
3º	500
4º	1 000
5º	1 500

Considere um atleta que tenha recebido 13 cartões amarelos durante o campeonato. O valor total, em reais, das multas geradas por todos esses cartões equivale a:

a) 30 000
b) 33 000
c) 33 000
d) 36 000
e) 39 000

34. Determine no caderno o termo geral da PA representada no gráfico a seguir e a lei de formação da função afim f relacionada a ela.



Sergio Lima/ID/BR

Progressão geométrica (PG)

No início deste capítulo, vimos uma situação em que o capital de R$ 10 000,00 era rentabilizado a uma taxa de juro composto de 1% ao mês. Conforme estudamos no capítulo **6**, a característica fundamental do juro composto é que a taxa de juros incide sobre o montante do período anterior. Assim, se M_k é o montante do período k, obtemos o montante do período seguinte multiplicando M_k pelo número $(1 + i)$, em que i é a taxa de juro. Dessa maneira, tem-se $M_{k+1} = M_k \cdot (1 + i)$. Assim:

- $M_2 = M_1 \cdot (1 + i)$
- $M_3 = M_2 \cdot (1 + i)$

$\vdots$

- $M_n = M_{n-1} \cdot (1 + i)$

A sequência $\left(10\,000; 10\,100; 10\,201; \ldots; 10\,000 \cdot 1{,}01^{n-1}\right)$, dos montantes, em reais, obtidos mês a mês, a partir do início da aplicação realizada por Mirela, é um exemplo que possui essa característica. Essa sequência é denominada **progressão geométrica**, abreviadamente conhecida como **PG**.

Uma progressão geométrica é uma sequência de termos não nulos na qual cada um, a partir do segundo, é igual ao termo anterior multiplicado por um número constante q, chamado **razão** da PG. Se (a_n) é uma PG de razão q, então:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*$$

Uma PG pode ser finita ou infinita, dependendo se a sequência é finita ou infinita.

Termo geral de uma PG

Para obter o termo geral de uma PG qualquer, considere (a_n) uma PG de razão q. Então:

- $a_2 = a_1 \cdot q$
- $a_3 = \underbrace{a_2}_{a_1 \cdot q} \cdot q = a_1 \cdot q^2$
- $a_4 = \underbrace{a_3}_{a_1 \cdot q^2} \cdot q = a_1 \cdot q^3$

$\vdots$

- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$\vdots$

Portanto, uma vez que o primeiro termo a_1 e a razão q são conhecidos, o termo geral da PG é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. O expoente $n - 1$ indica a quantidade de vezes que devemos multiplicar o primeiro termo a_1 pela razão q para obter a_n.

Dois termos quaisquer de uma PG, a_n e a_k, se relacionam por meio da expressão $a_n = a_k \cdot q^{n-k}$. O expoente $n - k$ indica quantas vezes se deve multiplicar ou dividir o termo a_k pela razão q para obter a_n. De maneira equivalente, se $m = n - k$ ou $n = k + m$, então $a_n = a_k \cdot q^m$. Assim, se (a_n) é uma PG de razão q, temos, por exemplo:

- $a_{10} = a_4 \cdot q^6$, pois $10 = 4 + 6$
- $a_2 = a_9 \cdot q^{-7}$, pois $2 = 9 + (-7)$
- $a_{n+5} = a_{n+1} \cdot q^4$, pois $n + 5 = (n + 1) + 4$
- $a_{k+1} = a_1 \cdot q^k$, pois $k + 1 = 1 + k$

Taxa de crescimento de uma PG

O crescimento de um termo de uma PG para o seguinte pode ser expresso pela **taxa de crescimento**. Por exemplo, se esse crescimento ocorre a uma taxa de 15%, quer dizer que cada termo, a partir do segundo, corresponde a 115% (100% + 15%) do termo anterior, ou seja, $a_{n+1} = a_n \cdot 1{,}15$ para todos os índices n. Nesse caso, a razão da PG é $q = 1{,}15$.

Em uma PG cujos termos são positivos, se a taxa de crescimento de um termo para o seguinte for i, tem-se $a_{n+1} = a_n \cdot (1 + i)$, e a razão da PG é $q = (1 + i)$. A taxa de crescimento também pode ser negativa. Por exemplo, se $i = -40\%$, há um decréscimo de 40% de cada termo para o seguinte, ou seja, $a_{n+1} = a_n \cdot (1 - 0{,}4)$ ou $a_{n+1} = a_n \cdot 0{,}6$.

Exemplos

a) Uma sequência constante $(c, c, c, c, \dots)$, com $c \neq 0$, é uma PG de razão $q = 1$ e taxa de crescimento $i = 0$.

b) Certa população de micro-organismos dobra a quantidade de indivíduos a cada período de 1 hora. Se p_0 é a população inicial, então a população de micro-organismos, a partir de p_0, a cada período de 1 hora forma a PG $(p_0, 2p_0, 4p_0, 8p_0, 16p_0, \dots)$ crescente de razão $q = 2$. A taxa de crescimento dessa PG é de 100%, pois, sendo i essa taxa, então:

$$1 + i = 2 \Rightarrow i = 1$$

c) A sequência $(1\,000, 200, 40, 8, \dots)$, na qual cada termo, a partir do segundo, corresponde a 20% do termo anterior, é uma PG de razão $q = 0{,}2$. Nesse caso, a sequência é decrescente e sua taxa de crescimento i é negativa. Assim, temos:

$$1 + i = 0{,}2 \Rightarrow i = -0{,}8$$

Logo a taxa dessa PG é -80%.

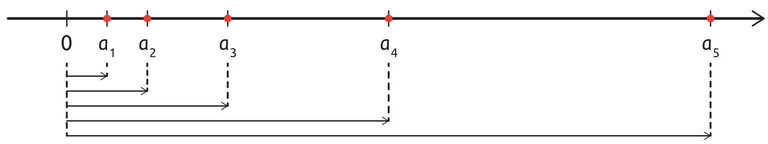
Representação de uma PG na reta real

O comportamento dos termos de uma PG depende do valor de sua razão. Há três casos.

1º caso: $|q| > 1$, ou seja, $q > 1$ ou $q < -1$.

Quando $|q| > 1$, os termos da PG se afastam da origem.

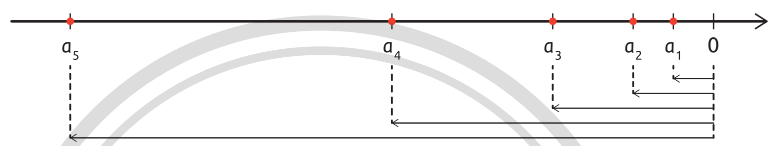
- $q > 1$ e $a_1 > 0$:



$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < \dots$$

Por exemplo, para $q = 3$ e $a_1 = 1$, tem-se a sequência $(1, 3, 9, 27, 81, \dots)$.

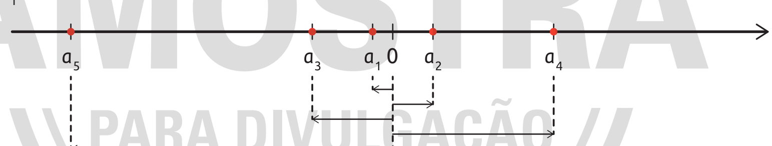
- $q > 1$ e $a_1 < 0$:



$$\dots < a_5 < a_4 < a_3 < a_2 < a_1 < 0$$

Por exemplo, para $q = 4$ e $a_1 = -\frac{1}{2}$, tem-se a sequência $\left(-\frac{1}{2}, -2, -8, -32, -128, \dots\right)$.

- $q < -1$ e $a_1 \neq 0$:



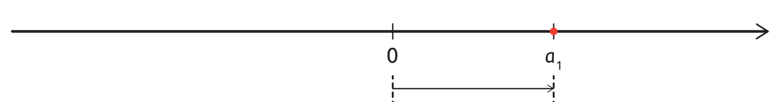
$$0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < |a_4| < |a_5| < \dots$$

Por exemplo, para $q = -2$ e $a_1 = -1$, tem-se a sequência $(-1, 2, -4, 8, -16, \dots)$.

2º caso: $|q| = 1$, ou seja, $q = 1$ ou $q = -1$.

Quando $|q| = 1$, os termos da PG se mantêm a uma mesma distância da origem.

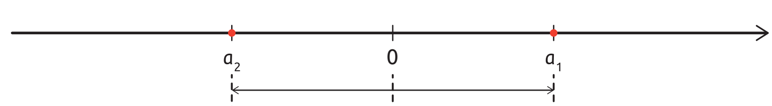
- $q = 1$ e $a_1 \neq 0$:



$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \dots$$

Por exemplo, para $q = 1$ e $a_1 = 6$, tem-se a sequência $(6, 6, 6, 6, 6, \dots)$.

- $q = -1$ e $a_1 \neq 0$:



Ilustrações: Sergio Lima/ ID/BR

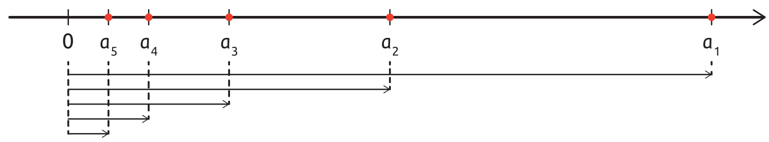
$$|a_1| = |a_2| = |a_3| = |a_4| = |a_5| = \dots$$

Por exemplo, para $q = -1$ e $a_1 = 6$, tem-se a sequência $(6, -6, 6, -6, 6, \dots)$.

3º caso: $0 < |q| < 1$, ou seja, $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$.

Quando $0 < |q| < 1$, os termos da PG se aproximam da origem.

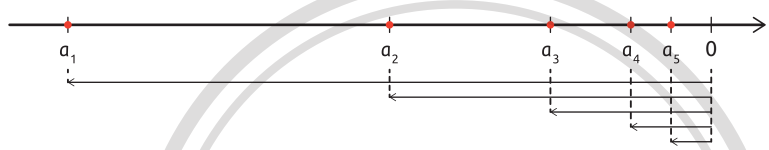
- $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$:



$$0 < \ldots < a_5 < a_4 < a_3 < a_2 < a_1$$

Por exemplo, para $q = \frac{1}{3}$ e $a_1 = 1$, tem-se a sequência $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right)$.

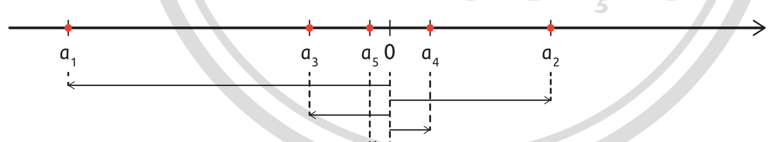
- $0 < q < 1$ e $a_1 < 0$:



$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < \ldots < 0$$

Por exemplo, para $q = \frac{1}{4}$ e $a_1 = -8$, tem-se a sequência $\left(-8, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{32}, \ldots\right)$.

- $-1 < q < 0$ e $a_1 \neq 0$:



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

$$0 < \ldots < |a_5| < |a_4| < |a_3| < |a_2| < |a_1|$$

Por exemplo, para $q = -\frac{1}{2}$ e $a_1 = -8$, tem-se a sequência $\left(-8, 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \ldots\right)$.

Seja (a_n) uma PG de razão q.

- Se $|q| > 1$, os termos a_n se afastam da origem conforme o índice n cresce, de modo que $|a_n| < |a_{n+1}|$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.
- Se $|q| = 1$, os termos a_n mantêm-se a uma mesma distância da origem, de modo que $|a_n| = |a_{n+1}|$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.
- Se $0 < |q| < 1$, os termos a_n se aproximam da origem conforme o índice n cresce, de modo que $|a_{n+1}| < |a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Atividades resolvidas

R10. Determine o primeiro termo de uma PG cujo nono termo é $a_9 = 1\,024$ e a razão, $q = 4$.

Resolução

Substituindo os valores $n = 9$, $k = 1$, $a_n = 1024$ e $q = 4$ em $a_n = a_k \cdot q^m$, sendo $m = n - k$, temos:

$$1024 = a_1 \cdot 4^{9-1} \Rightarrow 1\,024 = a_1 \cdot 4^8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1\,024}{4^8} = \frac{1\,024}{65\,536} = \frac{1}{64}$$

Portanto, $a_1 = \dfrac{1}{64}$.

R11. Em janeiro de 2018, um jovem abriu uma conta de poupança e depositou o valor de R\$ 4 000,00. Considerando que a poupança renda mensalmente 0,7% e que esse jovem não faça mais depósitos, determine o valor aproximado dessa poupança daqui a 17 meses.

Resolução

Sabendo que em janeiro o jovem depositou R\$ 4 000,00 na poupança, rendendo mensalmente 0,7%, e que não efetuou mais nenhum depósito, a partir do segundo mês o valor na poupança corresponderá a 100,7% do mês anterior. A sequência crescente dos montantes, mês a mês, a partir do depósito inicial é uma PG de razão 1,007 e o primeiro termo é 4 000.

Portanto, o termo geral desta PG é

$a_n = 4\,000 \cdot 1{,}007^{n-1}$.

Assim, para determinar o valor na conta poupança daqui a 17 meses, calculamos a_{18}:

$$a_{18} = 4\,000 \cdot 1{,}007^{18-1} \simeq 4\,503{,}61$$

Logo o valor na conta poupança será R\$ 4 503,61.

R12. Escreva o termo geral de uma PG, em que $a_3 = 25$ e $a_5 = 1$.

Resolução

O termo geral de uma PG é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, conhecidos a_1 e q.

Substituindo $n = 5$, $k = 3$, $a_n = 1$ e $a_k = 25$, em $a_n = a_k \cdot q^m$, sendo $m = n - k$, temos:

$$1 = 25 \cdot q^{5-3} \Rightarrow \frac{1}{25} = q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1^2}{5^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow q = \pm\frac{1}{5}$$

Substituindo $q = \pm\dfrac{1}{5}$, $n = 5$ e $a_5 = 1$ em $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, obtemos o termo a_1.

$$1 = a_1 \cdot \left(\pm\frac{1}{5}\right)^{5-1} \Rightarrow 1 = a_1 \cdot \left(\pm\frac{1}{5}\right)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = a_1 \cdot \frac{1^4}{5^4} \Rightarrow 1 = a_1 \cdot \frac{1}{625} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 1 \cdot \frac{625}{1} \Rightarrow a_1 = 625$$

Se $q = \dfrac{1}{5}$, temos $a_n = 625 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$.

Se $q = -\dfrac{1}{5}$, temos $a_n = 625 \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$.

Portanto, o termo geral de uma PG em que $a_3 = 25$ e $a_5 = 1$ é $a_n = 625 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$ ou $a_n = 625 \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$.

R13. Sabendo que os extremos de uma PG finita são $a_1 = \dfrac{3}{2}$ e $a_7 = \dfrac{1}{486}$, determine os sete termos desta PG.

Resolução

Determinamos os meios da PG cujos extremos são $a_1 = \dfrac{3}{2}$ e $a_7 = \dfrac{1}{486}$ por meio de **interpolação geométrica**.

Para isso, determinamos o valor da razão q desta PG utilizando $a_n = a_k \cdot q^m$, com $m = n - k$. Dados $k = 1$, $n = 7$, $a_1 = \dfrac{3}{2}$ e $a_7 = \dfrac{1}{486}$, segue que:

$$\frac{1}{486} = \frac{3}{2} \cdot q^{7-1} \Rightarrow \frac{1}{486} = \frac{3}{2} \cdot q^6 \Rightarrow$$

$$q^6 = \frac{1}{486} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow q^6 = \frac{1}{729} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^6 = \frac{1^6}{3^6} \Rightarrow q^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \Rightarrow q = \pm\frac{1}{3}$$

Se $q = \dfrac{1}{3}$, a PG é:

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \frac{1}{162}, \frac{1}{486}\right)$$

Se $q = -\dfrac{1}{3}$ a PG é:

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{18}, \frac{1}{54}, -\frac{1}{162}, \frac{1}{486}\right)$$

Atividades

35. Determine a razão de cada PG.

a) $(1, 10, 100, 1000, \ldots)$

b) $\left(-5, 1, -\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \ldots\right)$

c) $(-4, 8, -16, 32, \ldots)$

d) $(2, -2, 2, -2, \ldots)$

e) $\left(-\frac{2}{27}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{3}, -2, \ldots\right)$

f) $\left(1, \frac{3}{5}, \frac{9}{25}, \frac{27}{125}, \ldots\right)$

36. Determine o valor de x para cada sequência ser uma PG. Em seguida, expresse o termo geral de cada uma delas.

a) $(x + 2, 6, 4x + 8, 24)$

b) $(x - 5, 4, 8, 2x + 2, 5x - 3)$

c) $\left(-3, -\frac{1}{9}x, -\frac{1}{27}x, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{243}x\right)$

37. Escreva no caderno os seis primeiros termos de uma PG tal que $a_3 = 5$ e $a_5 = \frac{1}{5}$.

38. Em uma progressão geométrica de n termos, $a_4 = -8$, $a_n = -1024$ e $q = 2$. Determine no caderno a quantidade de termos dessa PG.

39. Determine no caderno a razão da PG sabendo que:

a) $a_{14} = 7$ e $a_{15} = 21$.

b) $a_9 = \frac{1}{384}$ e $a_{10} = \frac{1}{768}$.

40. Determine no caderno os três primeiros termos da PG $\left(a_1, a_2, a_3, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{32}, \ldots\right)$.

41. Qual é o 11º termo da PG $\left(\frac{1}{729}, \frac{1}{243}, \frac{1}{81}, \ldots\right)$?

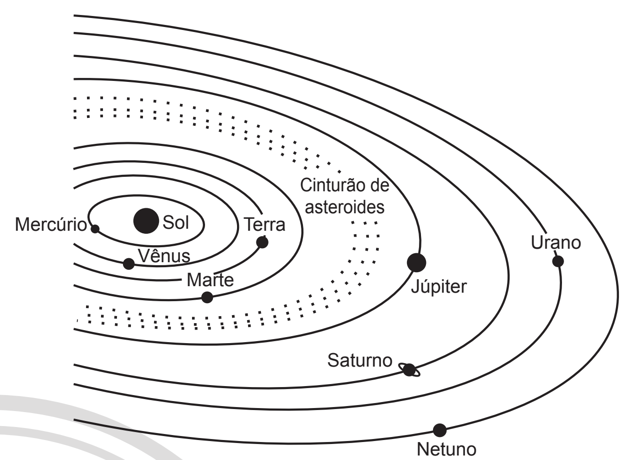
42. Escreva a PG que possui:

a) 4 termos, na qual $a_1 = 65$ e $q = 2$.

b) 3 termos, na qual $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = -6$.

c) 5 termos, na qual $a_1 = 1000$ e $q = \frac{1}{10}$.

43. **Desafio** (UFG) A figura a seguir é uma representação do Sistema Solar.



UFG/ID/BR/Fac-símile:ID/BR

Em 1766, o astrônomo alemão J. D. Tietz observou que as distâncias heliocêntricas dos planetas até então conhecidos e do cinturão de asteroides obedeciam, com boa aproximação, a um padrão conhecido hoje como lei de Titius-Bode.

Segundo esse padrão, a partir do planeta Vênus e incluindo o cinturão de asteroides, subtraindo-se 0,4 das distâncias heliocêntricas, em unidades astronômicas (UA), obtém-se uma progressão geométrica com termo inicial 0,3 e razão 2. A distância da Terra ao Sol, por exemplo, é de, aproximadamente, 1 UA e, neste caso, $1 - 0{,}4 = 0{,}3 \times 2$.

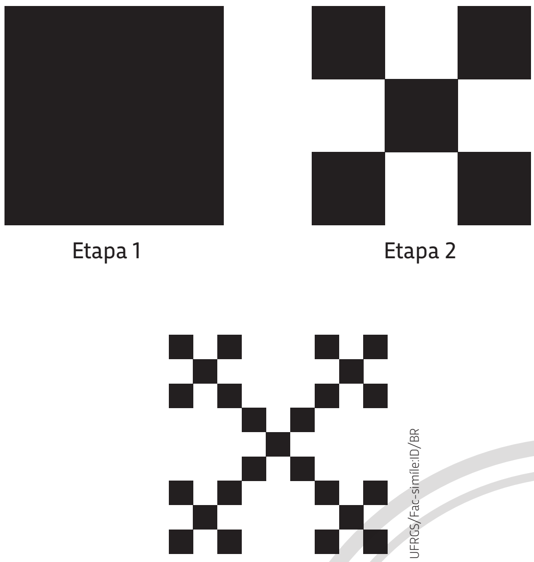
Determine, segundo a lei de Titius-Bode, a distância heliocêntrica, em UA, do planeta Júpiter.

44. Uma amostra de determinada espécie de inseto é formada por 250 indivíduos. Em certa época do ano, quando as temperaturas são propícias para a procriação desse inseto e desconsiderando as mortes, a cada semana duplica-se a quantidade de indivíduos.

a) Quantos insetos haverá no início da:
- segunda semana?
- quarta semana?

b) Determine uma progressão formada pelos seis primeiros termos que representam a quantidade de insetos da amostra no início da semana e o termo geral desta progressão para n semanas, desconsiderando as mortes e considerando condições ideais para a sua reprodução e vida.

45. (UFRGS-RS) Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.



Etapa 1 Etapa 2

Etapa 3

UFRGS/Fac-símile:ID/BR

Na etapa 1, há um único quadrado com lado 1. Na etapa 2, esse quadrado foi dividido em nove quadrados congruentes, sendo quatro deles retirados, como indica a figura. Na etapa 3 e nas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos quadrados da etapa anterior.

Nessas condições, a área restante, na etapa 5, é:

a) $\frac{125}{729}$

b) $\frac{125}{2\,187}$

c) $\frac{625}{729}$

d) $\frac{625}{2\,187}$

e) $\frac{625}{6\,561}$

46. (Fuvest) Dadas as sequências $a_n = n^2 + 4n + 4$, $b_n = 2^{n^2}$, $c_n = a_{n+1} - a_n$ e $d_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, definidas para valores inteiros positivos de n, considere as seguintes afirmações:

I) a_n é uma progressão geométrica;

II) b_n é uma progressão geométrica;

III) c_n é uma progressão aritmética;

IV) d_n é uma progressão geométrica.

São verdadeiras apenas

a) I, II e III.

b) I, II e IV.

c) I e III.

d) II e IV.

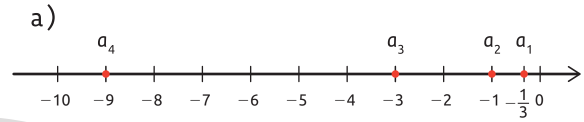
e) III e IV.

47. Um imóvel valorizou 15% em cada um dos 4 primeiros anos de uso. A valorização desse imóvel obedece uma PG cujo 1º termo é o valor referente ao imóvel novo, isto é, R$ 150 000,00. Quanto uma pessoa pagaria por esse imóvel, após os primeiros 4 anos de uso?

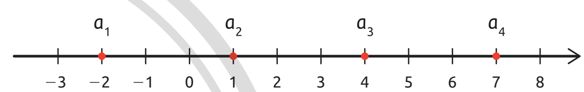
48. Certa população de bactérias é atualmente dada por P_0 e cresce 7% a cada hora. Considerando que esse crescimento seja mantido pelas próximas 24 horas, qual será a população a_n?

49. Em cada item, verifique se os pontos indicados representam uma PG.

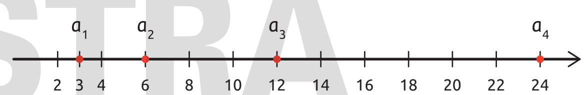
a)



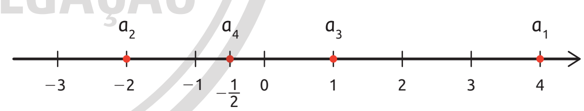
b)



c)



d)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

50. Uma progressão geométrica é tal que $a_1 = 1\,048\,576$ e $q = \frac{1}{2}$.

Determine n de modo que $a_n = \frac{1}{512}$.

51. A quantidade de pessoas que visita diariamente um determinado museu é atualmente dada por N_0 e está diminuindo 4% ao ano. Se esse fato continuar a ocorrer pelos próximos 20 anos, qual será a quantidade Q_n de visitantes daqui a n anos?

52. Sejam a_k, a_{k+1} e a_{k+2} três termos consecutivos de uma PG. Mostre no caderno que $\left(a_{k+1}\right)^2 = a_k \cdot a_{k+2}$.

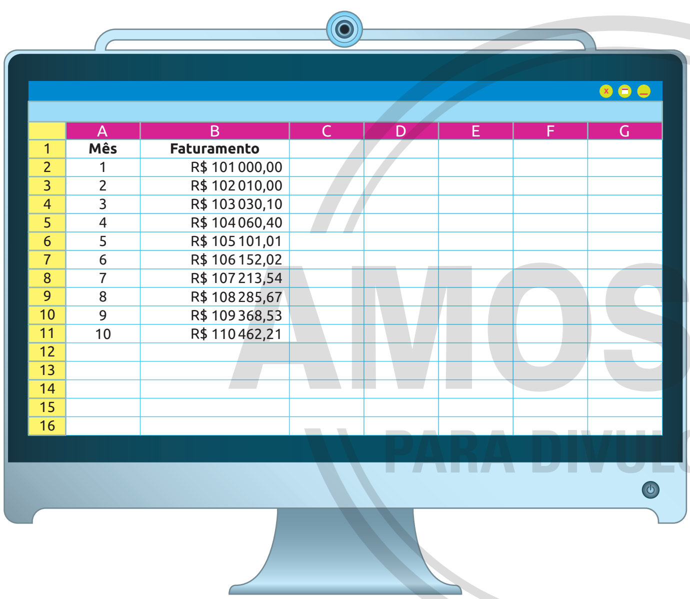
53. Considere uma PA e uma PG, de razões respectivamente iguais a r e q, contendo três termos cada e a_1 o primeiro termo de ambas. Mostre no caderno que o terceiro termo da PA é igual ao terceiro termo da PG se, e somente se, $q = \pm\sqrt{1 + \frac{2r}{a_1}}$.

Soma dos termos de uma PG finita

Camila assumiu a direção de uma pequena empresa que teve um faturamento de R$ 100 000,00 no último mês. Ela espera um crescimento a uma taxa de 1% ao mês nos próximos 36 meses. Surgiu, então, o interesse de calcular o faturamento desse período de acordo com o esperado.

Observe que esse problema consiste em obter a soma dos 36 termos da PG de primeiro termo $a_1 = \underbrace{101\,000}_{100\,000 \cdot 1{,}01}$ e razão $q = 1{,}01$, caso seja desconsiderado que os valores monetários devam ser arredondados na segunda casa decimal.

Uma das maneiras de fazer esse cálculo é utilizando uma planilha eletrônica. Camila sabe que, nesse tipo de *software*, ela pode obter os 36 termos dessa PG com poucos comandos e, em seguida, calcular a soma desejada. Observe na figura os valores do faturamento esperado dos primeiros meses.



	A	B	C	D	E	F	G
1	**Mês**	**Faturamento**					
2	1	R$ 101 000,00					
3	2	R$ 102 010,00					
4	3	R$ 103 030,10					
5	4	R$ 104 060,40					
6	5	R$ 105 101,01					
7	6	R$ 106 152,02					
8	7	R$ 107 213,54					
9	8	R$ 108 285,67					
10	9	R$ 109 368,53					
11	10	R$ 110 462,21					
12							
13							
14							
15							
16							

Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

Os valores apresentados nesta planilha eletrônica estão arredondados até a segunda casa decimal. Com o auxílio de uma calculadora, junte-se a um colega e obtenham os dez primeiros termos dessa PG. Em seguida, comparem com os valores aqui apresentados.

Ao adicionar o faturamento esperado dos 36 meses, ainda utilizando a planilha eletrônica, obtemos R$ 4 350 764,71.

Outra maneira de calcular é por meio da fórmula da soma dos termos de uma PG finita, que veremos a seguir.

Denotando por S_n a soma dos termos da PG $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, de razão $q \neq 1$, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$$

$$S_n = a_1\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right)$$

Se denotarmos a soma dentro dos parênteses por T_n, temos:

$$T_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} \quad \text{(I)}$$

Multiplicando por q, temos:

$$qT_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n \quad \text{(II)}$$

Subtraindo **II** de **I**, temos:

$$T_n - qT_n = 1 - q^n \Rightarrow (1 - q)T_n = 1 - q^n \Rightarrow T_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Portanto:

$$S_n = a_1\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right) \Rightarrow S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

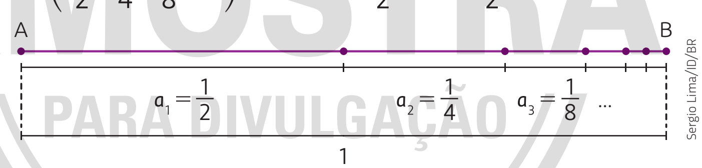
Os n primeiros termos de uma PG qualquer, finita ou infinita, formam uma PG finita com n termos. Assim, temos o seguinte resultado:

> A soma dos n primeiros termos de uma PG (a_n) de razão $q \neq 1$ é dada por $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

Volte ao problema dado anteriormente e, com o auxílio de uma calculadora, obtenha o faturamento total nos 36 meses por meio da fórmula acima.

Soma dos termos de uma PG infinita

Suponha que um móvel encontra-se inicialmente no ponto A, e vai se deslocar em direção ao ponto B em etapas. Em cada etapa, o móvel se deslocará por uma distância correspondente à metade da distância que falta para chegar a B. Se a distância de A até B for tomada como unidade de comprimento, então a sequência das distâncias a serem percorridas em cada etapa será a PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$, com $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$.



A distância total percorrida pelo móvel após n etapas corresponde à soma S_n dos n primeiros termos da PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$. Temos que:

- $S_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$
- $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0{,}75$
- $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0{,}875$
- $S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0{,}9375$
- $S_5 = 0{,}9375 + \frac{1}{32} = 0{,}96875$
- $S_6 = 0{,}96875 + \frac{1}{64} = 0{,}984375$
- $S_7 = 0{,}984375 + \frac{1}{128} = 0{,}9921875$
- $S_8 = 0{,}9921875 + \frac{1}{256} = 0{,}99609375$

$$\vdots$$

O móvel chegará tão próximo de B quanto se deseja, bastando que haja uma quantidade suficiente de etapas, ou seja, a soma $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ resultará em um número tão próximo de 1 quanto se deseja, bastando que se tome n suficientemente grande. Isso pode ser expresso escrevendo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$$

Dizemos que o número 1 é a **soma da PG infinita** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$, e cada soma S_n é chamada **soma parcial** da PG.

Em geral, uma sequência infinita pode ou não admitir uma soma. Uma das condições para que a soma exista é que o valor absoluto dos termos da sequência se aproxime de zero, conforme o índice n cresce. Lembre-se de que uma PG tem essa propriedade quando a razão q satisfaz $0 < |q| < 1$. De fato, pode-se demonstrar que uma PG infinita admite uma soma se, e somente se, sua razão q satisfaz $0 < |q| < 1$. Por outro lado, uma PG infinita não admite uma soma quando $|q| > 1$. Isso pode ser observado intuitivamente por meio da PG $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$, cujos termos são cada vez maiores e cuja soma de seus termos não é possível determinar.

As somas parciais de uma PG são dadas por $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$. Se $0 < |q| < 1$, o número q^n será cada vez mais próximo de zero, conforme n cresce, de modo que as somas parciais S_n vão se aproximar de $S = a_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}$. Baseando-se nessas observações, é possível demonstrar o resultado a seguir.

Seja (a_n) uma PG infinita de razão q. Se $0 < |q| < 1$, então a soma dessa PG é dada por $S = \frac{a_1}{1 - q}$, ou seja:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \frac{a_1}{1 - q}.$$

PG e função do tipo exponencial

Anteriormente, relacionamos a PA com a função afim. De maneira semelhante, relacionamos qualquer PG não constante com uma função do tipo exponencial. O termo geral de uma PG é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ou $a_n = \frac{a_1}{q} \cdot q^n$, sendo a_1 e q números reais constantes e diferentes de zero. A PG pode ser relacionada à função do tipo exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = b \cdot a^x$, sendo $b = \frac{a_1}{q}$ e $a = q$.

Como um exemplo, considere a PG $\left(\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots\right)$. Temos $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = 2$. Portanto, o termo geral é:

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{-1} \cdot 2^n \Rightarrow a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^n$$

Essa PG pode ser relacionada à função do tipo exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$, pois $\frac{1}{4} = \frac{a_1}{q}$ e $q = 2$.

Assim, a representação gráfica da PG corresponde aos pontos do gráfico de f com abscissas $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

gráfico de f

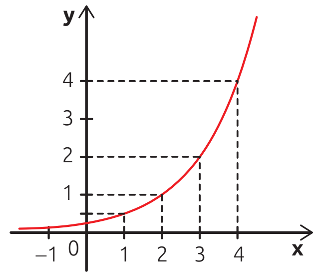
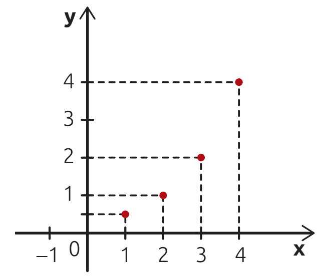


gráfico de (a_n)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Ao considerarmos uma função do tipo exponencial qualquer, dada por $f(x) = b \cdot a^x$, a sequência $(f(1), f(2), f(3), \ldots)$ será uma PG de razão a, pois, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, vale:

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{\cancel{b} \cdot a^{n+1}}{\cancel{b} \cdot a^n} = \frac{\cancel{a^n} \cdot a}{\cancel{a^n}} = a$$

De maneira geral, dada uma função do tipo exponencial definida por $f(x) = b \cdot a^x$, para qualquer PA(a_n) de razão r a sequência $\left(f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots\right)$ será uma PG de razão a^r, pois, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, vale:

$$\frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)} = \frac{\cancel{b} \cdot a^{a_{n+1}}}{\cancel{b} \cdot a^{a_n}} = \frac{a^{a_n + r}}{a^{a_n}} = \frac{\cancel{a^{a_n}} \cdot a^r}{\cancel{a^{a_n}}} = a^r$$

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função do tipo exponencial dada por $f(x) = b \cdot a^x$ e (a_n) uma PA de razão r. Então:

- $(f(n))$ é uma PG de razão a;
- $\left(f(a_n)\right)$ é uma PG de razão a^r.

Atividades resolvidas

R14. Determine a soma dos termos da PG finita $(1, 4, 16, \ldots, 16\,384)$.

Resolução

Para determinar a soma dos termos de uma PG finita podemos utilizar a fórmula $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$, com $q \neq 1$, sendo necessário conhecer os valores do primeiro termo (a_1), da quantidade de termos (n) e da razão (q).

Pela sequência temos $a_1 = 1$ e $q = \frac{4}{1} = 4$. Obtemos a quantidade de termos utilizando o termo geral de uma PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 16\,384 = 1 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4^{n-1} = 16\,384 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4^{n-1} = 4^7 \Rightarrow n - 1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

Substituindo os valores na fórmula da soma de termos de uma PG finita, segue que:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_8 = 1 \cdot \frac{1 - 4^8}{1 - 4} = \frac{-65\,535}{-3} = 21\,845$$

Portanto, a soma de termos da PG finita $(1, 4, 16, \ldots, 16\,384)$ é 21 845.

R15. Determine a fração geratriz da dízima periódica $3,\overline{2}$.

Resolução

$3,\overline{2} = 3 + 0,2 + 0,02 + 0,002 + 0,0002 + \ldots = 3 + \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1\,000} + \frac{2}{10\,000} + \ldots$

Note que a dízima $3,\overline{2}$ pode ser escrita utilizando a soma de uma PG infinita de razão $0 < |q| < 1$.

Logo podemos escrever $3 + S$ em que $S = \frac{a_1}{1 - q}$, com $q \neq 1$, $a_1 = \frac{2}{10}$ e $q = \frac{1}{10}$, como:

$$3 + S = 3 + \frac{\frac{2}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 3 + \frac{\frac{2}{\cancel{10}}}{\frac{9}{\cancel{10}}} = 3 + \frac{2}{9} = \frac{29}{9}$$

Portanto, a fração geratriz da dízima periódica $3,\overline{2}$ é $\frac{29}{9}$.

R16. (FGV-SP)

a) Um sábio da Antiguidade propôs o seguinte problema aos seus discípulos: "Uma rã parte da borda de uma lagoa circular de 7,5 metros de raio e se movimenta saltando em linha reta até o centro. Em cada salto, avança a metade do que avançou no salto anterior. No primeiro salto avança 4 metros. Em quantos saltos chega ao centro?

b) O mesmo sábio faz a seguinte afirmação em relação à situação do item **a**: "Se o primeiro salto da rã é de 3 metros, ela não chega ao centro." Justifique a afirmação.

Resolução

a) Se na primeira vez a rã salta 4 metros e depois salta apenas a metade do salto anterior, em cada salto, percorrendo assim 7,5 metros, então temos uma PG finita, com $a_1 = 4$, $q = \frac{1}{2} = 0,5$ e $S_n = 7,5$. Dessa maneira, a quantidade de saltos (n) pode ser dada por:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \Rightarrow 7,5 = 4 \cdot \frac{1 - 0,5^n}{1 - 0,5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 0,5^n = 7,5 \cdot \frac{(1 - 0,5)}{4} \Rightarrow 0,5^n = 1 - \frac{7,5 \cdot 0,5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,5^n = 0,0625 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow n = 4$$

Portanto, a quantidade de saltos para alcançar o centro da lagoa é 4.

b) Supondo que a rã salte infinitas vezes, sendo o primeiro salto de 3 metros, e os demais, a metade do anterior, também teremos uma PG, em que $a_1 = 3$ e $q = \frac{1}{2} = 0,5$. Porém, a quantidade de termos será infinita e a soma deles será:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{3}{1 - 0,5} = 6$$

Portanto, mesmo que a rã salte infinitas vezes, ela percorrerá no máximo 6 metros, não chegando ao centro da lagoa.

R17. Um capital de R$ 10 000,00 é aplicado em um investimento durante o período de 12 meses, a uma taxa de juro composto de 2% ao mês.

a) Determine o montante obtido após o término dessa aplicação.

b) Escreva a lei de formação de uma função do tipo exponencial que esteja relacionada com a sequência dos montantes dessa aplicação.

Resolução

a) No juro composto, o montante no final de cada mês, a partir do segundo, é dado pelo valor anterior acrescido de 2% deste valor.

Final do 1º mês:

$$10\,000 + \underbrace{200}_{0{,}02 \cdot 10\,000} = 10\,200$$

Final do 2º mês:

$$10\,200 + \underbrace{204}_{0{,}02 \cdot 10\,200} = 10\,404$$

Final do 3º mês:

$$10\,404 + \underbrace{208{,}08}_{0{,}02 \cdot 10\,404} = 10\,612{,}08$$

Observe que a sequência $(10\,200; 10\,404; 10\,612{,}08; \ldots)$ constitui uma PG, em que $a_1 = 10\,200$ e $q = 1{,}02$.

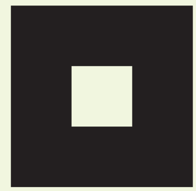
Portanto, no 12º mês o montante resgatado pode ser dado por meio do termo geral da PG $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$:

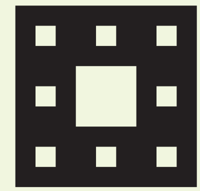
$$a_{12} = 10\,200 \cdot 1{,}02^{12-1} \simeq 12\,682{,}42$$

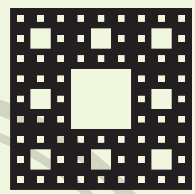
Portanto, o montante obtido ao término dessa aplicação será aproximadamente R$ 12 682,42.

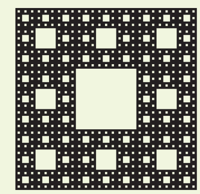
b) A lei de formação da função exponencial que está relacionada à sequência dos montantes dessa aplicação é $f(x) = 10\,200 + 1{,}02^{x-1}$.

R18. Considere um quadrado dividido em nove quadrados congruentes, em que se retira o quadrado central. Nos oito quadrados restantes esse mesmo processo é realizado, e assim sucessivamente. O resultado obtido é conhecido como Tapete de Sierpinski.


1 iteração


2 iterações


3 iterações


4 iterações

Ilustrações: Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

a) Determine a quantidade de quadrados retirados nas quatro primeiras iterações.

b) Escreva a lei de formação de uma função do tipo exponencial que esteja relacionada com sequência formada pela quantidade de quadrados retirados a cada iteração.

Resolução

a) Utilizando o que foi dado, temos a seguinte relação:

Iterações	Quadrados retirados
1	1
2	$8 \cdot 1 = 8$
3	$8 \cdot 8 = 64$
4	$8 \cdot 64 = 512$

b) Observe que a sequência de valores obtidos no item **a**, $(1, 8, 64, 512)$, constitui uma PG, em que $a_1 = 1$ e $q = 8$.
Assim, para determinar a quantidade de quadrados retirados após n iterações, basta utilizar o termo geral da PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \cdot 8^{n-1} \Rightarrow a_n = 8^{n-1}$$

Portanto, a lei de formação da função do tipo exponencial que está relacionada com essa sequência é $f(x) = 8^{x-1}$.

Atividades

54. Calcule a soma dos:

a) cinco primeiros termos da PG $(1, 4, 16, \ldots)$.

b) oito primeiros termos da PG $(1, 2, 4, 8, \ldots)$.

c) quatro primeiros termos da PG $(90, 270, \ldots)$.

d) três primeiros termos da PG $\left(1, \frac{1}{4}, \ldots\right)$.

55. Calcule a soma dos termos de cada PG a seguir.

a) $(1, 3, \ldots, 729)$.

b) $\left(10, 5, \ldots, \frac{5}{16}\right)$.

c) $(4\,096, 1\,024, \ldots, 16)$.

d) $(3, -6, 12, \ldots, 768)$.

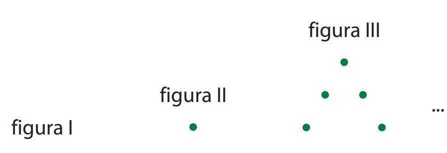
e) $\left(1, 2, \ldots, 2^{12}\right)$.

56. Ana promoveu um *show* em sua cidade e precisou fazer a divulgação. Para isso, ela inicialmente teve a ideia de enviar uma mensagem de divulgação por meio de seu telefone celular. Ana enviou a mensagem para 47 contatos, supondo que:

- todos os destinatários encaminhariam a mensagem para outras 5 pessoas;
- 183 582 pessoas receberiam a mensagem de divulgação;
- nenhuma pessoa receberia mais de uma mensagem de divulgação.

Escreva a sequência para representar a quantidade de pessoas que ficaram sabendo do *show* a cada envio.

57. Observe a sequência de figuras formadas por pontos.



Sergio Lima/ID/BR

Sabendo que essa sequência tem cinco figuras, responda.

a) A figura **V** é formada por quantos pontos?

b) Ao todo, quantos pontos têm as cinco figuras juntas?

58. Seja a PG $(4, 12, \ldots, a_n)$. Qual é a quantidade de termos desta PG, sabendo que a soma de todos eles é 4 372?

59. A soma dos termos de uma PG é 1 020, o primeiro e o último termo são, respectivamente, 512 e 4. Qual é a razão dessa PG?

60. **Ferramentas** Ao analisar uma planilha a respeito do lucro de um determinado produto, um administrador teve um problema com seu computador e perdeu as informações. Veja na planilha parte das informações que restaram.

	A	B	C
1		Crescimento em	
2	Ano	relação ao ano anterior	Lucro
3	2010	0%	
4	2011	12%	
5	2012	12%	
6	2013	12%	
7	2014	12%	
8	2015	12%	
9		Total	R$ 8 926,71
10			
11			

Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

Para os cálculos, os valores envolvidos foram arredondados, quando necessário, ao centésimo mais próximo.

Reescreva a última coluna dessa planilha em seu caderno e determine os valores que estão faltando.

61. (Feevale-RS) Pedro, no dia do nascimento do filho, prometeu, a cada aniversário da criança, plantar 2^n árvores (n número natural, representa a idade do filho). Passados 5 anos, quantas árvores foram plantadas por Pedro, ao total, considerando que ele cumpriu sua promessa em todos os anos?

a) 10
b) 16
c) 32
d) 62
e) 64

62. Calcule a soma dos infinitos termos de cada PG a seguir.

a) $(12, 6, 3, \ldots)$

b) $\left(1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \ldots\right)$

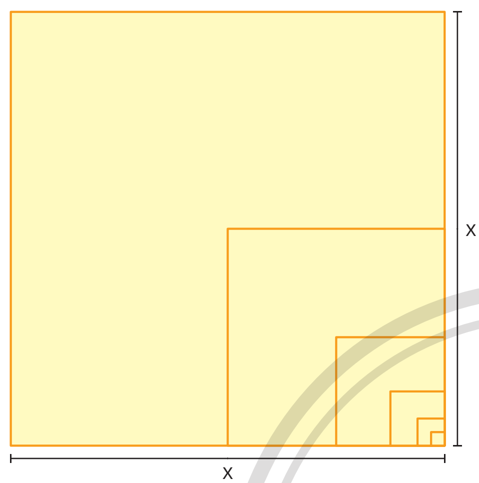
c) $(-24; -2{,}4; -0{,}24; \ldots)$

d) $(16, -4, 1, \ldots)$

e) $\left(1\,000, 20, \frac{2}{5}, \ldots\right)$

63. Qual é o valor do primeiro termo de uma PG infinita cuja razão é $q = \frac{1}{6}$ e a soma $S = \frac{18}{5}$?

64. Em grupo Considerem uma sequência de infinitos quadrados, sendo a medida do lado de cada quadrado, a partir do segundo, igual à metade da medida do anterior, conforme a figura.



Sergio Lima/ID/BR

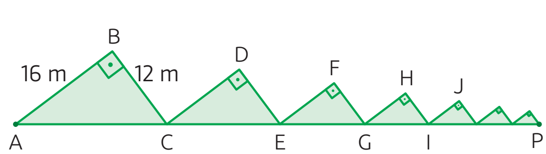
Sabendo que a soma das áreas dos infinitos quadrados é 12 cm^2, determinem o valor de x, em centímetros.

65. Considerando a soma $0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005 + \ldots$, resolva.

a) Qual é a dízima periódica que representa essa soma?

b) Determine a fração geratriz da dízima periódica que você escreveu no item **a**.

66. Desafio (ESPM-RJ) A figura abaixo mostra a trajetória de um móvel a partir de um ponto A, com $BC = CD$, $DE = EF$, $FG = GH$, $HI = IJ$, e assim por diante. Considerando infinita a quantidade desses segmentos, a distância horizontal AP alcançada por esse móvel será de:



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

a) 65 m
b) 72 m
c) 80 m
d) 96 m
e) 100 m

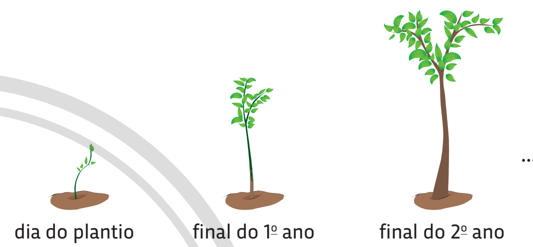
67. Calcule a fração geratriz das dízimas periódicas a seguir.

a) $0{,}7\overline{2}$
b) $0{,}\overline{34}$
c) $5{,}\overline{8}$

68. Lucas guarda dinheiro em seu cofrinho. A cada semestre usa a seguinte estratégia:

Em janeiro guarda R$ 1,00, em fevereiro, R$ 2,00, em março, R$ 4,00, e assim sucessivamente até junho, começando novamente a guardar R$ 1,00 em julho. Qual é o valor total que Lucas pode guardar em três anos?

69. João plantou uma árvore em frente à sua casa e decidiu acompanhar seu crescimento. O viveiro que vendeu a muda, com 40 cm de altura, informou que o crescimento era bifurcado, ou seja, a cada 1 ano, a ponta do galho se dividia em dois novos galhos e a altura aumentava cerca de 40 cm. Veja no esquema como os galhos se bifurcam ano a ano.



Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

Sabendo que esse padrão de crescimento se mantém durante 6 anos, João construiu o quadro abaixo com a expectativa de crescimento da árvore até o final do 6º ano.

Tempo (ano)	Quantidade de novos galhos	Altura (cm)
1	1	40
2	2	80
3	4	
4		

a) No caderno, copie e complete o quadro acima com as informações que faltam.

b) Considere as sequências formadas pelos números nas colunas e classifique-as em PA ou PG.

c) Determine a razão de cada sequência que você classificou no item anterior.

d) Ao final do 6º ano, qual será a quantidade total de novos galhos da árvore? E a sua altura?

70. Seja a PA $(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n, \ldots)$ de razão 3 e seja a função f do tipo exponencial dada por $f(x) = 2 \cdot 3^x$. Qual é a razão da PG $\left(f\left(k_n\right)\right)$?

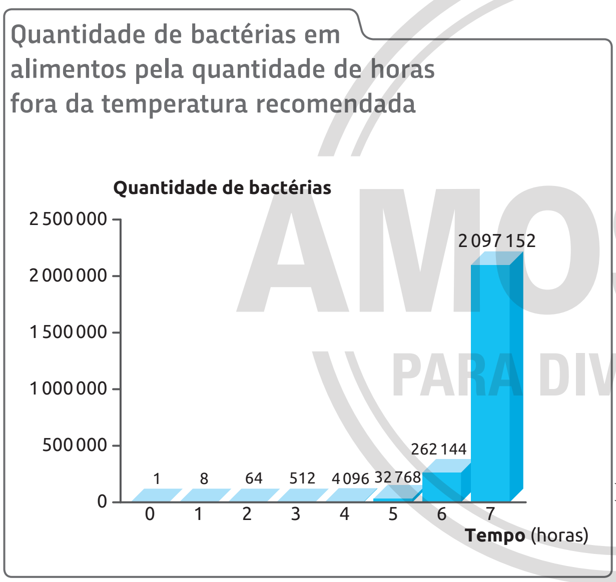
Não escreva no livro.

71. Seja a PA $(3, 8, 13, \ldots)$ e a função f do tipo exponencial dada por $f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Quais são os três primeiros termos da PG $\left(f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots\right)$ sendo (a_n) os termos da PA dada?

b) Qual é a razão q da PG obtida no item **a**?

72. Uma das condições que facilitam a proliferação de bactérias em alimentos é a temperatura. Para minimizar as chances de contaminação é importante manter alguns alimentos abaixo de 5 °C ou acima de 65 °C. Segue abaixo uma possível representação gráfica da quantidade de bactérias existentes a cada hora em condições ideais, ou seja, fora da temperatura recomendada.



Fonte de pesquisa: KUNIGK, LEO. Medidas para evitar toxi-infecções de origem alimentar. Disponível em: <http://maua.br/files/artigos/medidas-para-evitar-toxi-infeccoes-de-origem-alimentar.pdf>. Acesso em: 17 set. 2015.

a) Considerando os dados do gráfico, escreva a lei de formação, o domínio e o conjunto imagem de uma função f que represente a quantidade de bactérias em relação ao tempo t em horas.

b) Qual é a razão da sequência formada pelo conjunto imagem da função?

73. Considere uma função f do tipo exponencial dada por $f(x) = 2a^x$ e uma PA(a_n) de razão $r = 3$. Determine o valor de a sabendo que $f(a_n)$ é uma PG de razão $q = 125$.

74. (Udesc) Considere a função $f(x) = 2^{2x-5}$. Sejam $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ uma progressão aritmética de razão 3 e $f(a_1) = \frac{1}{8}$. Analise as proposições.

I) $a_{53} = 157$

II) A soma dos 11 primeiros termos da progressão aritmética é 145.

III) $f(a_5) = 2^{21}$

IV) $\left(f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots\right)$ é uma progressão geométrica de razão 64.

Determine a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas **I** e **III** são verdadeiras.

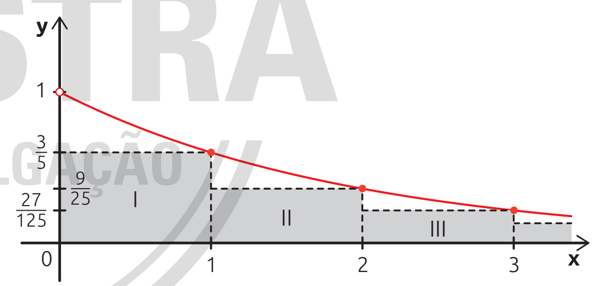
b) Somente as afirmativas **I**, **III** e **IV** são verdadeiras.

c) Somente as afirmativas **I** e **II** são verdadeiras.

d) Somente as afirmativas **III** e **IV** são verdadeiras.

e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

75. Observe o gráfico da função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$.



a) Calcule a área, em unidades de área (u.a.), dos retângulos **I**, **II** e **III** formados abaixo da curva que representa a função f.

b) Determine a soma das áreas, em unidades de área (u.a.), dos infinitos retângulos formados abaixo da curva.

76. Desafio Seja a PG $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, com $a_n \in \mathbb{R}$ e razão q. A respeito da PG dada, julgue as afirmações em verdadeira ou falsa, justificando as falsas.

I) Se a razão da PG for negativa, então $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

II) Se $a_1 + a_2 + a_3 = -2$ e $a_1 = 2q$, então a razão é 1.

III) Seja a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2(-1)^x$. A imagem dessa função é o conjunto formado pelos termos de uma PG.

capítulo 9

Estatística

População e amostra

A Estatística aborda um conjunto de métodos de coleta, organização, análise e interpretação de informações, cujo objetivo é compreender uma determinada situação para a tomada de decisões.

As pesquisas estatísticas são realizadas com diversas finalidades, por exemplo, para verificar a durabilidade de um tipo de material ou para conhecer a opinião de certo grupo de pessoas a respeito de um assunto, como as intenções de voto em um candidato nas eleições. Para isso, seria inviável consultar a opinião de todas as pessoas envolvidas ou observar a durabilidade de todo o material, o que demandaria muito tempo e dinheiro e consistiria em um processo destrutivo. Por exemplo, se o objetivo da pesquisa fosse testar a durabilidade de lâmpadas, em que todas seriam testadas até queimarem, não restaria lâmpada alguma para ser comercializada.

Portanto, trata-se de uma situação para a qual é necessário selecionar apenas uma parte dos elementos, analisar os resultados obtidos e fazer inferências sobre todo o grupo.

Timur Djafarov/Shutterstock.com/ID/BR

Lâmpada fluorescente acesa, ideal para diversos ambientes. Esse é um dos tipos de lâmpada que apresenta alta eficiência e baixo consumo de energia.

Em estatística, todo o grupo é chamado **população**, o que se refere a um conjunto de elementos com pelo menos uma característica em comum. A parte com a qual a pesquisa é realizada recebe o nome de **amostra**, um subconjunto não vazio da população com menor quantidade de elementos.

Em Estatística, a população também pode ser chamada de **universo estatístico**.

A população pode ser finita, como o conjunto de alunos de uma escola, ou infinita, como a sequência infinita de resultados obtidos lançando um dado sem parar. Tendo isso definido, é necessário estabelecer uma técnica de amostragem para garantir a representatividade da amostra, definindo o procedimento de escolha dos elementos da população que vão compor a amostra.

Variável estatística

Quando uma pesquisa estatística envolve pessoas, geralmente são colhidas informações, como idade, massa corporal, estado civil, nível de escolaridade, entre outras. Essas informações são exemplos de **variáveis estatísticas**.

As variáveis que apresentam valores numéricos resultantes de algum tipo de contagem ou mensuração são chamadas **variáveis quantitativas**, como a altura de um indivíduo. Já as variáveis que apresentam como valores uma qualidade ou uma característica são chamadas **variáveis qualitativas**, por exemplo, cor dos olhos.

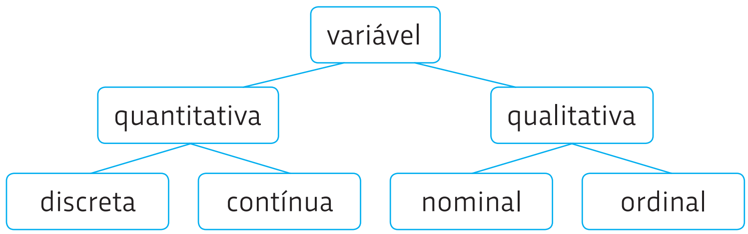
Entre as variáveis quantitativas, podemos classificá-las em dois tipos.

- **Variável quantitativa discreta**, cujos possíveis valores compõem um conjunto finito ou infinito de números resultantes, geralmente de contagens, como a quantidade de filhos de um casal.
- **Variável quantitativa contínua**, cujos possíveis valores formam um intervalo de números reais resultantes, geralmente de mensuração, como o tempo em que um atleta percorre certa distância.

As variáveis qualitativas também podem ser de dois tipos.

- **Variável qualitativa nominal**, quando não existe ordenação alguma para os possíveis resultados, como o sexo de um indivíduo.
- **Variável qualitativa ordinal**, quando existe certa ordenação para os possíveis resultados, como o estágio de uma doença.

De modo geral, podemos representar essas variáveis estatísticas da seguinte maneira:



Atividades

1. Identifique no caderno se a informação em cada item representa população ou amostra.

a) Preferência de todos os alunos da turma sobre um local para a festa de formatura.

b) Intenção de voto de alguns moradores de uma cidade no candidato **A** para prefeito.

c) Os preços de um determinado livro em metade das livrarias do estado.

d) As cores de todos os automóveis disponíveis para venda em uma concessionária.

2. Classifique as seguintes variáveis em quantitativas discretas, quantitativas contínuas, qualitativas nominais ou qualitativas ordinais.

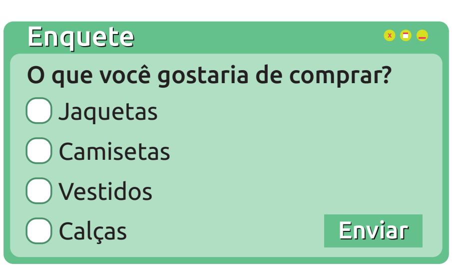
a) Turma em que determinado aluno estuda.

b) Quantidade de cores do arco-íris.

c) Cores presentes em uma bandeira.

d) Temperatura de uma panela num determinado instante.

3. Observe a seguinte pergunta divulgada em uma loja de roupas virtual.

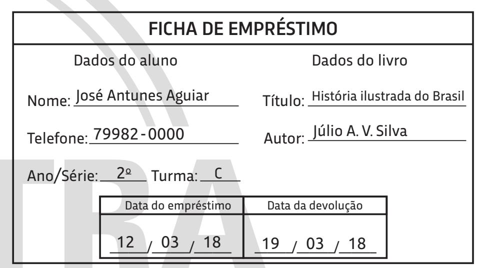


Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

a) Quais resultados a variável pode assumir nessa situação?

b) Como essa variável pode ser classificada?

4. Observe a ficha de empréstimo de livros de uma biblioteca escolar.


FICHA DE EMPRÉSTIMO

Dados do aluno

Nome: José Antunes Aguiar

Telefone: 79982-0000

Ano/Série: 2ª Turma: C

Dados do livro

Título: História ilustrada do Brasil

Autor: Júlio A. V. Silva

Data do empréstimo	Data da devolução
12 / 03 / 18	19 / 03 / 18

Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

a) Quais são as variáveis presentes nessa ficha?

b) Classifique cada variável em quantitativa discreta, quantitativa contínua, qualitativa nominal ou qualitativa ordinal.

5. A equipe administrativa de um restaurante entrevistou 200 clientes que responderam a respeito de idade, local de trabalho, preferência de comidas, horário que costumam frequentar o restaurante e nível de satisfação (5, 6, 7, 8, 9 ou 10) quanto ao atendimento. Sabendo que cada um desses objetos de estudo são variáveis estatísticas, classifique cada variável em relação ao seu tipo.

6. Entre 400 alunos de certo cursinho pré-vestibular, 150 foram questionados a respeito de suas intenções de estudo e trabalho após o curso. Foram feitas perguntas sobre a opção do “curso” de graduação, o “ofício” e um possível “local” de trabalho pretendido por eles.

a) Qual é o universo estatístico e qual é a amostra desse levantamento de dados?

b) Quantas são as variáveis e qual é o tipo de cada uma?

c) No caderno, dê exemplos de possíveis valores para a variável “ofício”.

Representações gráficas

O objetivo da representação gráfica é apresentar um conjunto de dados de modo resumido, principalmente para os resultados de uma pesquisa quando se deseja facilitar sua leitura e compreensão a fim de chegar a conclusões a respeito da evolução das variáveis ou de como elas se relacionam. A escolha da representação gráfica mais apropriada à situação depende de vários fatores, mas a simplicidade, clareza e veracidade das informações devem ser consideradas na elaboração do gráfico.

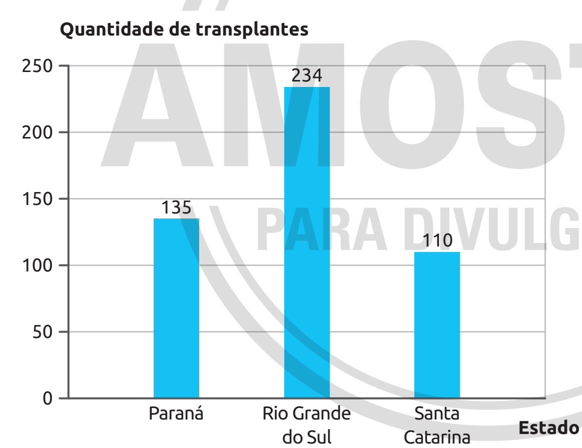
Gráfico de barras

O gráfico de barras verticais, também chamado gráfico de colunas, é representado em um par de eixos ortogonais por meio de retângulos com a mesma largura e altura proporcional aos valores das variáveis, de acordo com a escala do eixo vertical. Esse tipo de gráfico geralmente é utilizado para comparar informações.

Exemplo

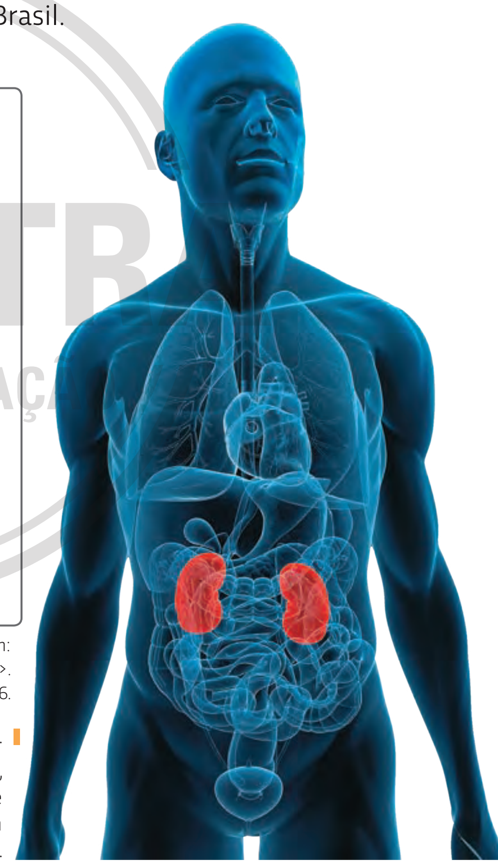
O gráfico a seguir apresenta a quantidade de transplantes de rim de pessoas falecidas entre janeiro e junho de 2015, na região Sul do Brasil.

Transplantes de rim de pessoas falecidas entre janeiro e junho de 2015, na região Sul do Brasil



Sergio Lima/ID/BR

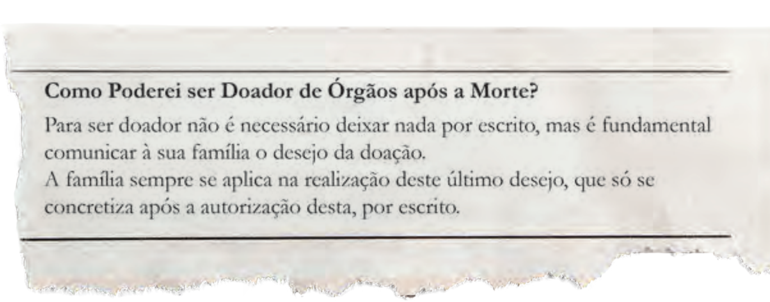
Fonte de pesquisa: Associação Brasileira de Transplante de Órgãos. Disponível em: <www.abto.org.br/abtov03/Upload/file/RBT/2015/rbt2015-1sem-lib2907.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2016.



Esquema representando a localização dos rins no interior do corpo humano.

Os rins são dois pequenos órgãos localizados em ambos os lados da coluna vertebral, atrás das últimas costelas, cuja principal função é eliminar o excesso de água e de toxinas ou dejetos resultantes do metabolismo corporal. Além disso, os rins atuam como órgãos produtores de hormônios e auxiliam na regulação da pressão arterial.

Sebastian Kaulitzki/Shutterstock.com/ID/BR



Como Poderei ser Doador de Órgãos após a Morte?

Para ser doador não é necessário deixar nada por escrito, mas é fundamental comunicar à sua família o desejo da doação.
A família sempre se aplica na realização deste último desejo, que só se concretiza após a autorização desta, por escrito.

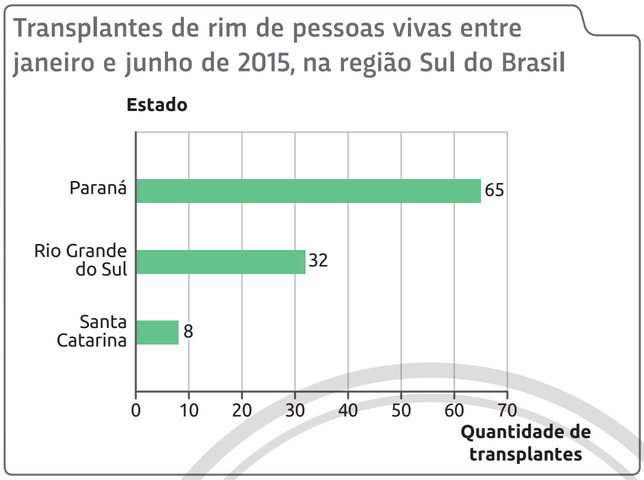
Fotomontagem de Maryane Silva criada com a fotografia STILLFX/Shutterstock.com/ID/BR

Associação Brasileira de Transplante de Órgãos. *Entenda a Doação de Órgãos*: decida-se pela vida. Disponível em: <www.abto.org.br/abtov03/Upload/file/entendadoacao.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2016.

No caso do gráfico de barras horizontais, os retângulos possuem a mesma altura e largura proporcional aos valores das variáveis, de acordo com a escala do eixo horizontal.

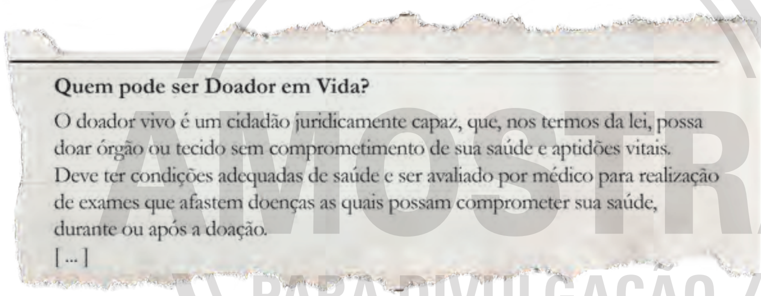
Exemplo

O gráfico a seguir apresenta a quantidade de transplantes de rim de pessoas vivas entre janeiro e junho de 2015, na região Sul do Brasil.



Sergio Lima/ID/BR

Fonte de pesquisa: Associação Brasileira de Transplante de Órgãos. Disponível em: <www.abto.org.br/abtov03/Upload/file/RBT/2015/rbt2015-1sem-lib2907.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2016.



Quem pode ser Doador em Vida?

O doador vivo é um cidadão juridicamente capaz, que, nos termos da lei, possa doar órgão ou tecido sem comprometimento de sua saúde e aptidões vitais. Deve ter condições adequadas de saúde e ser avaliado por médico para realização de exames que afastem doenças as quais possam comprometer sua saúde, durante ou após a doação.

[...]

Fotomontagem de Maryane Silva criada com a fotografia STILLFX/Shutterstock.com/ID/BR

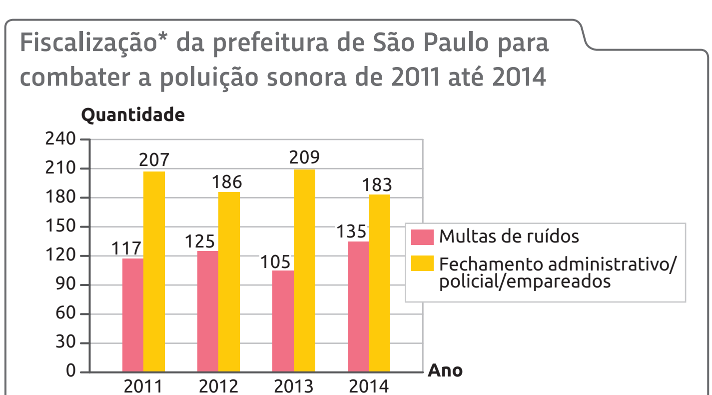
Associação Brasileira de Transplante de Órgãos. *Entenda a doação de órgãos*: decida-se pela vida. Disponível em: <www.abto.org.br/abtov03/Upload/file/entendadoacao.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2016.

Gráfico de barras múltiplas

Assim como os gráficos de barras, os de barras múltiplas também são representados em um par de eixos ortogonais por meio de retângulos. Costuma ser usado principalmente para comparar diferentes categorias no mesmo gráfico.

Exemplo

O gráfico a seguir apresenta a fiscalização realizada pela prefeitura de São Paulo em bares, boates e outros ambientes fechados de modo a combater a poluição sonora nesses ambientes.

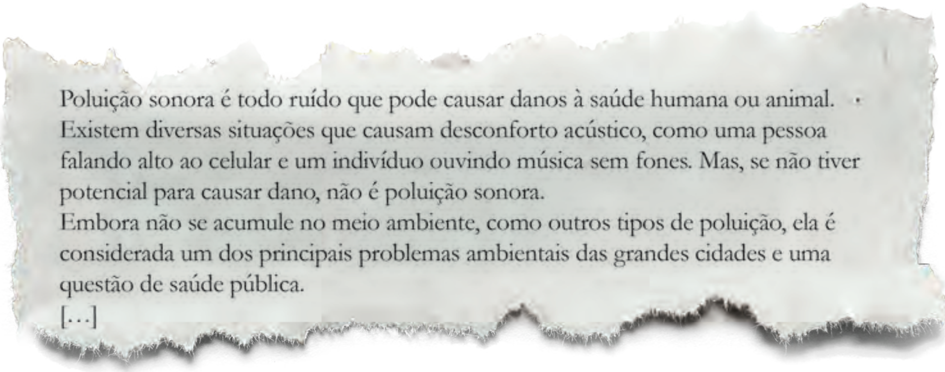


Sergio Lima/ID/BR

Fonte de pesquisa: Prefeitura de São Paulo. Disponível em: <www.prefeitura.sp.gov.br/cidade/secretarias/subprefeituras/zeladoria/psiu/index.php?p=8831>. Acesso em: 14 abr. 2016.

*Fiscalização realizada apenas em ambientes confinados, como bares, boates, restaurantes, salões de festas, templos religiosos, indústrias.

Fotomontagem de Maryane Silva criada com a fotografia STILLFX/Shutterstock.com/ID/BR


Poluição sonora é todo ruído que pode causar danos à saúde humana ou animal. Existem diversas situações que causam desconforto acústico, como uma pessoa falando alto ao celular e um indivíduo ouvindo música sem fones. Mas, se não tiver potencial para causar dano, não é poluição sonora.
Embora não se acumule no meio ambiente, como outros tipos de poluição, ela é considerada um dos principais problemas ambientais das grandes cidades e uma questão de saúde pública.
[...]

SAHD, Luiza. O que é poluição sonora? *Mundo Estranho*. Abril Comunicações S/A. n. 149, p.154, fev. 2014.

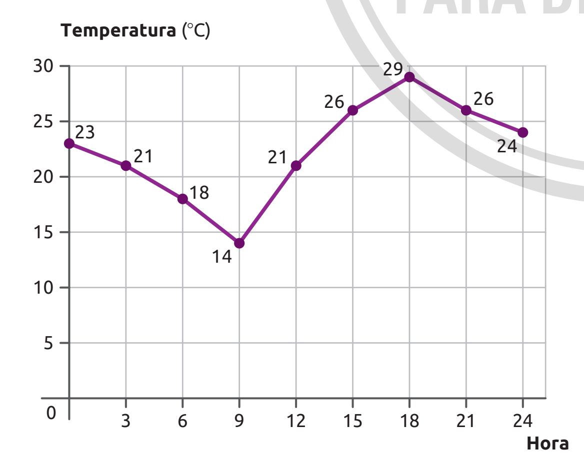
Gráfico de linhas

O gráfico de linhas, também chamado gráfico de segmentos, é representado em um par de eixos ortogonais por meio de linhas que indicam uma tendência entre dois pontos consecutivos, apresentando de maneira aproximada a evolução de determinada variável. Esse tipo de gráfico é utilizado para representar a variação de uma grandeza em ordem cronológica. Nele, o período cronológico geralmente é indicado no eixo horizontal e os valores observados no eixo vertical.

Em gráficos de linhas, a graduação dos eixos horizontal e vertical varia de acordo com a necessidade, mantendo a escala de proporção nos eixos.

Exemplo

Temperatura registrada em Dourados (MS) no dia 29/07/2015



Sergio Lima/ID/BR

Observando o gráfico é possível notar que, nas 24 horas do dia 29/07/2015, a variação máxima de temperatura foi de 15 °C, pois às 9 horas da manhã foi registrada a temperatura mínima de 14 °C e às 18 horas foi registrada a temperatura máxima de 29 °C.

> O gráfico de linhas pode apresentar mais de uma linha, permitindo verificar a tendência dos dados de duas variáveis da mesma natureza.

Fonte de pesquisa: Instituto Nacional de Meteorologia. Disponível em: <www.inmet.gov.br/portal/index.php?r=home/page&page=rede_estacoes_auto_graf>. Acesso em: 14 abr. 2016.

Fotomontagem de Maryane Silva criada com a fotografia STILLFX/Shutterstock.com/ID/BR

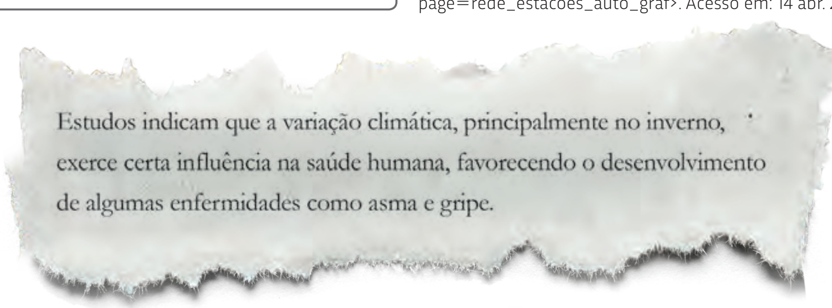

Estudos indicam que a variação climática, principalmente no inverno, exerce certa influência na saúde humana, favorecendo o desenvolvimento de algumas enfermidades como asma e gripe.

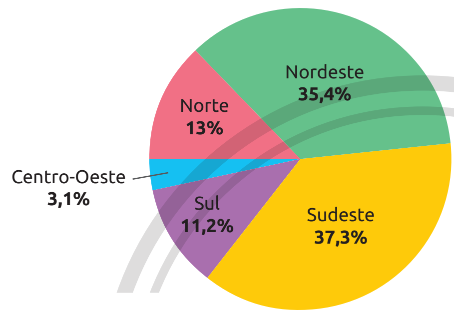
Gráfico de setores

O gráfico de setores é representado em um círculo por meio de setores circulares. Ao construí-lo, o círculo é dividido em setores circulares cujas áreas são proporcionais aos valores das variáveis, geralmente indicados com porcentagem. Esse tipo de gráfico é utilizado principalmente para representar a relação entre as partes de um todo.

Exemplo

O gráfico a seguir apresenta a porcentagem, por região brasileira, de óbitos infantis causados pela sífilis, em 2013.

Óbitos infantis causados pela sífilis por região brasileira em 2013



Sergio Lima/ID/BR

O gráfico de setores também é chamado popularmente como gráfico de *pizza*.

Fonte de pesquisa: Boletim Epidemiológico – Sífilis 2015. Disponível em: <www.aids.gov.br/sites/default/files/anexos/publicacao/2015/58033/_p_boletim_sifilis_2015_final_pdf_p_15727.pdf>. Acesso em: 20 abr. 2016.

Fotomontagem de Maryane Silva criada com a fotografia STILLFX/Shutterstock.com/ID/BR

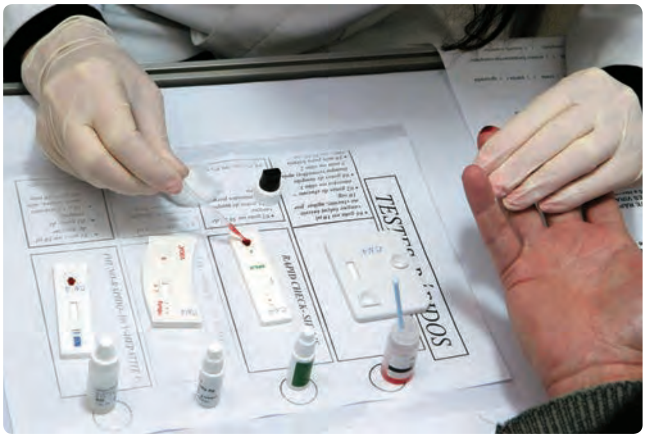
Sífilis

É uma doença infecciosa causada pela bactéria *Treponema pallidum*. [...]
Todas as pessoas sexualmente ativas devem realizar o teste para diagnosticar a sífilis, principalmente as gestantes, pois a sífilis congênita pode causar aborto, má formação do feto e/ou morte ao nascer. [...]
[...] O uso da camisinha em todas as relações sexuais e o correto acompanhamento durante a gravidez são meios simples, confiáveis e baratos de prevenir-se contra a sífilis congênita.
[...]

Departamento de DST, Aids e Hepatites Virais. Disponível em: <www.aids.gov.br/pagina/sifilis>. Acesso em: 14 abr. 2016.

Sífilis congênita: sífilis transmitida de mãe para filho.

Evandro Oliveira/PMPA



Realização de testes rápidos de HIV/Sífilis e Hepatite viral, no município de Porto Alegre (RS), em junho de 2014.

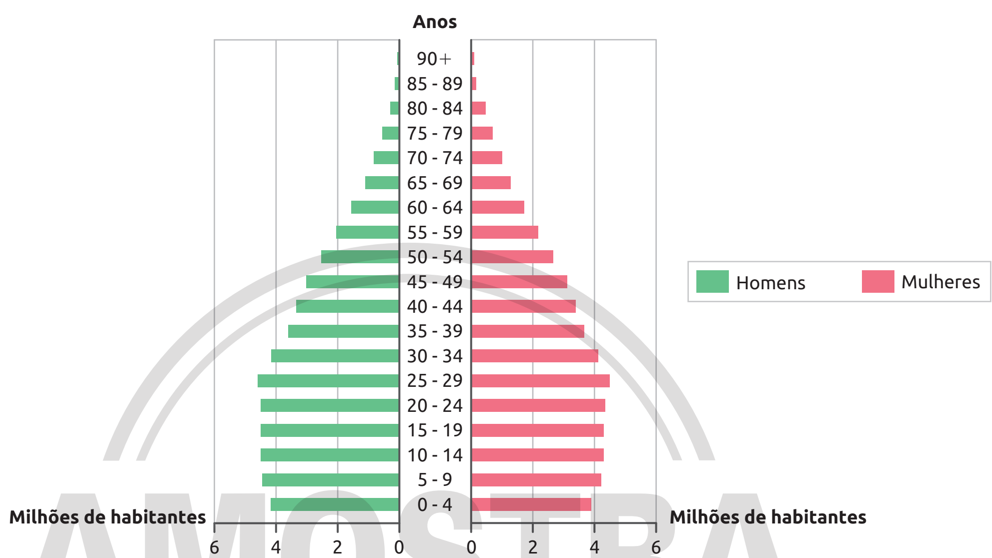
Quem busca tratamento especializado para sífilis e outras doenças contagiosas no tempo certo e segue as recomendações do médico ganha, principalmente, em qualidade de vida. Por esse motivo, o diagnóstico precoce, muitas vezes, significa chance efetiva de cura.

Pirâmide etária

A pirâmide etária, também chamada pirâmide demográfica ou pirâmide populacional, é composta por retângulos que representam a população de determinada região de acordo com o sexo e a idade.

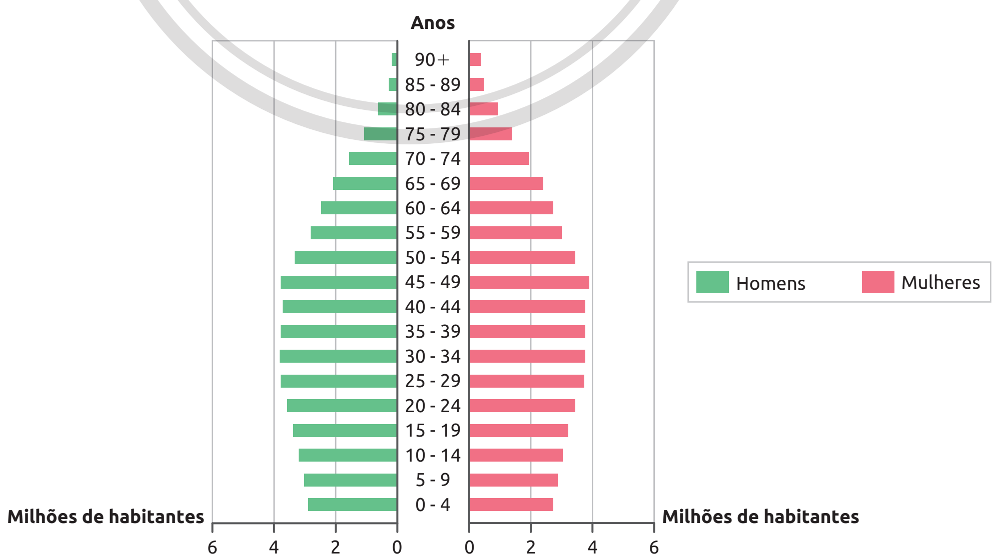
Exemplos

Pirâmide etária da população brasileira no ano de 2010



Fonte de pesquisa: IBGE. Disponível em: <www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 20 abr. 2016.

Projeção da pirâmide etária da população brasileira para o ano de 2030



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Fonte de pesquisa: IBGE. Disponível em: <www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 20 abr. 2016.

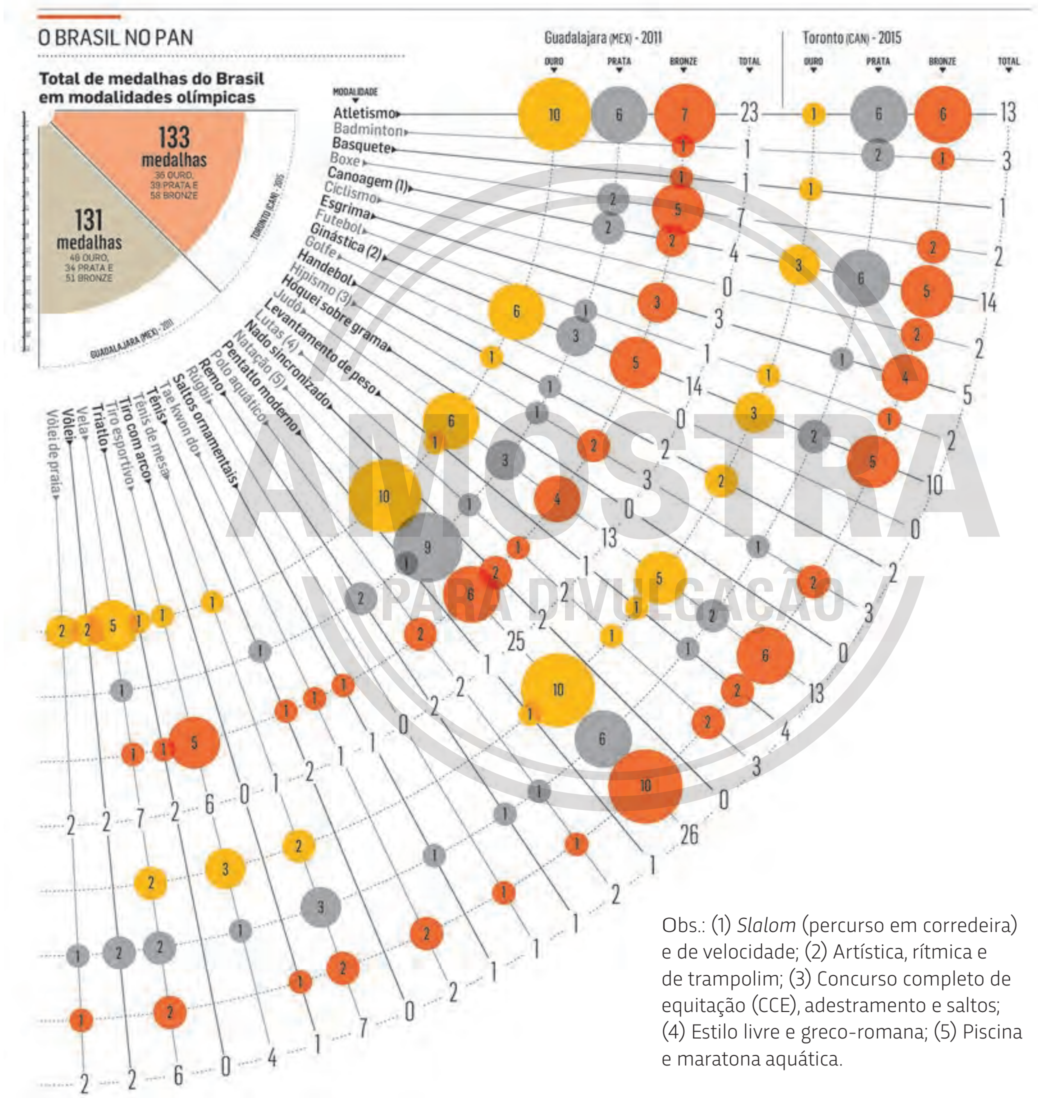
Observe que a pirâmide etária do ano 2010 possui base mais larga que a pirâmide etária projetada para o ano 2030. Uma base larga caracteriza uma população jovem.

Pictograma

O pictograma, também conhecido como gráfico pictórico, apresenta as informações por meio de figuras relacionadas ao assunto abordado, as quais têm tamanhos proporcionais aos valores das variáveis. Esse tipo de representação gráfica é aplicada em diversos meios de comunicação e apresenta os dados de modo mais atraente ao leitor.

Exemplo

Desempenho brasileiro nos Jogos Pan-Americanos de Guadalajara (2011) e Toronto (2015) em modalidades olímpicas



Obs.: (1) *Slalom* (percurso em corredeira) e de velocidade; (2) Artística, rítmica e de trampolim; (3) Concurso completo de equitação (CCE), adestramento e saltos; (4) Estilo livre e greco-romana; (5) Piscina e maratona aquática.

Diogo Shiraiwa/Arte AE/Estadão Conteúdo

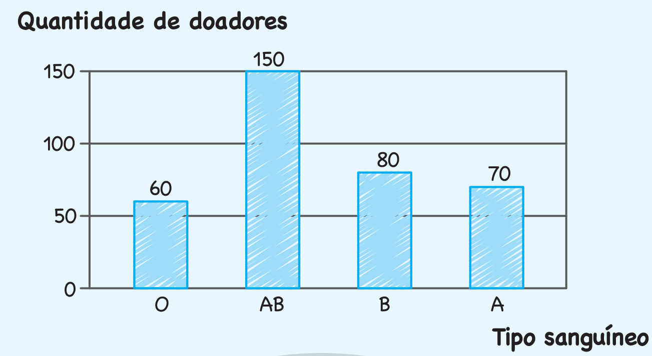
Fonte de pesquisa: SHIRAIWA, Diogo. O Brasil no Pan. *Estadão*. Disponível em: <www.estadao.com.br/infograficos/esportes,o-brasil-no-pan,425005>. Acesso em: 20 abr. 2016.

No infográfico acima, os círculos lembram medalhas de ouro, de prata e de bronze e suas dimensões são proporcionais à quantidade de medalhas conquistadas.

- No atletismo, os atletas brasileiros conquistaram a maior quantidade de medalhas nos Jogos Pan-Americanos de Guadalajara (2011) ou de Toronto (2015)?
  E na natação?

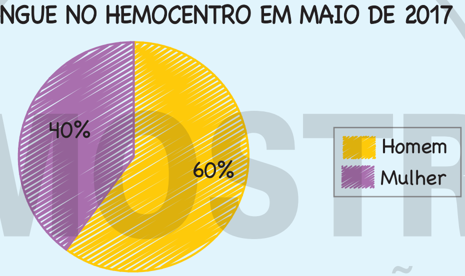
R1. Uma professora organizou os alunos do 1º ano do Ensino Médio em grupos para coletar informações sobre os doadores de sangue de determinado hemocentro. Cada grupo ficou responsável por organizar os dados de acordo com as variáveis tipo sanguíneo e sexo. Observe como os dados foram apresentados.

TIPO SANGUÍNEO DAS PESSOAS QUE DOARAM SANGUE NO HEMOCENTRO EM MAIO DE 2017



Fonte de pesquisa: Banco de dados do hemocentro.

PORCENTAGEM DE HOMENS E MULHERES QUE DOARAM SANGUE NO HEMOCENTRO EM MAIO DE 2017



Fonte de pesquisa: Banco de dados do hemocentro.

Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

a) Quais foram as maneiras utilizadas pelos alunos para apresentar as informações?

b) Olhando separadamente os gráficos é possível determinar, em cada um deles, a quantidade total de doadores no mês de maio de 2017? Justifique.

c) Quantas pessoas fizeram doação de sangue nesse hemocentro em maio de 2017?

d) Quantas mulheres doaram sangue nesse hemocentro em maio de 2017?

Resolução

a) Para apresentar o tipo sanguíneo, os alunos escolheram o gráfico de barras, e para o sexo dos doadores, eles escolheram o gráfico de setores.

b) No primeiro gráfico sim, basta adicionar os valores de cada categoria. No gráfico de setores não é possível, pois os dados referentes à quantidade de homens e mulheres estão em porcentagem.

c) Adicionando as quantidades apresentadas no gráfico de barras, temos:

$$60 + 150 + 80 + 70 = 360$$

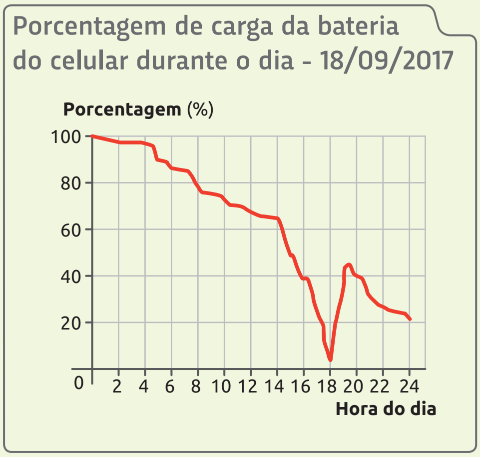
Portanto, 360 pessoas fizeram doação de sangue nesse hemocentro no mês de maio de 2017.

d) De acordo com o gráfico de setores a quantidade m de mulheres que doaram sangue em maio de 2017 foi de 40% do total de doadores.

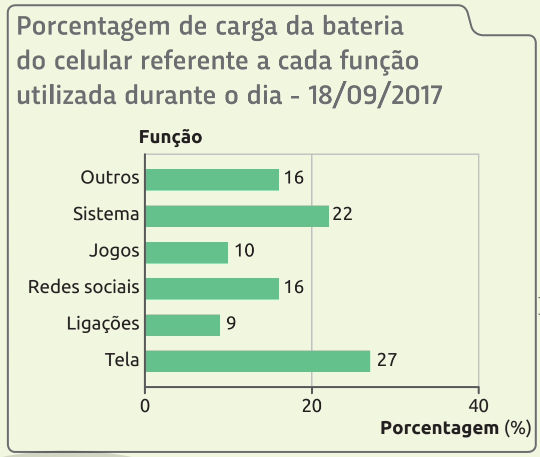
$$m = \frac{40}{100} \cdot 360 = 144$$

Portanto, 144 mulheres doaram sangue nesse hemocentro no mês de maio de 2017.

R2. Para uma aula de Matemática, Laura construiu dois gráficos referentes ao consumo de carga da bateria registrado em seu celular: um gráfico de linhas indicando a porcentagem de bateria durante o dia, e um gráfico de barras com as funções que mais consumiram carga da bateria.



Fonte de pesquisa: Sistema do celular de Laura.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Fonte de pesquisa: Sistema do celular de Laura.

a) De acordo com os gráficos, em qual período de 2 h houve o maior consumo de bateria?

b) Observando os gráficos, podemos afirmar que o celular foi parcialmente carregado durante o dia? Justifique.

c) Qual função do celular consumiu a maior porcentagem de carga da bateria?

Resolução

a) O maior consumo ocorreu entre as 16 horas e as 18 horas.

b) Sim, pois de acordo com o gráfico de linhas houve um aumento da porcentagem de carga da bateria, o que indica o carregamento.

c) Função Tela.

Atividades

7. Leia o texto abaixo.

A cara do brasileiro

Afinal, quem somos nós, os brasileiros? [...] somos o produto da miscigenação entre os colonizadores portugueses, os índios que aqui viviam e os africanos trazidos como mão de obra escrava, além dos imigrantes que chegaram entre os séculos 19 e 20 [...].

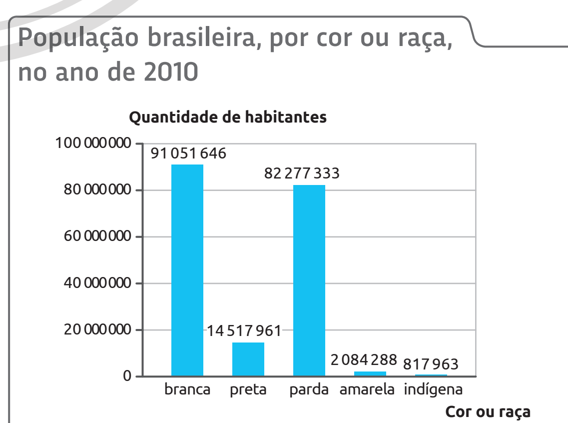
CAVALCANTE, Rodrigo. A cara do brasileiro. *Superinteressante*, n. 217, p. 68, set. 2005.

Na citação acima podemos perceber a mistura que forma o povo brasileiro. No censo de 2010 do IBGE foram computadas as quantidades de brasileiros por cor ou raça autodeclarados, conforme gráfico ao lado.

a) Qual tipo de gráfico foi utilizado para a representação dos dados sobre a miscigenação no Brasil?

b) Qual é a principal informação apresentada no gráfico?

c) Quais as duas cores ou raças com mais habitantes autodeclarados entre a população brasileira?



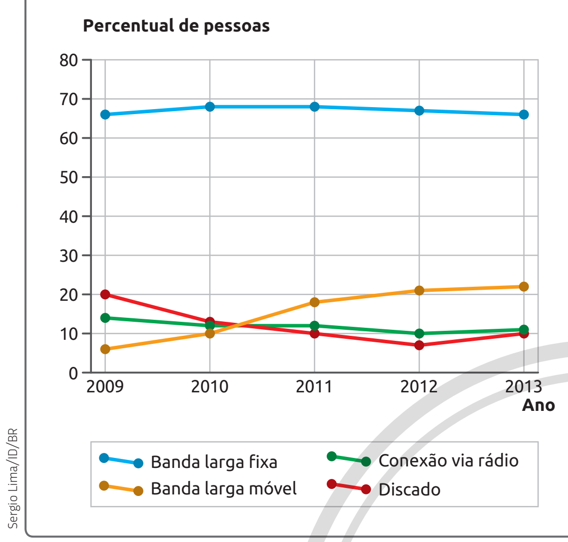
Sergio Lima/ID/BR

Fonte de pesquisa: IBGE. Disponível em: <www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/censo2010/caracteristicas_da_populacao/tabelas_pdf/tab3.pdf>. Acesso em: 20 abr. 2016.

Cor ou raça: de acordo com o IBGE, característica declarada pelas pessoas de acordo com as seguintes opções: branca, preta, amarela, parda ou indígena.

8. O gráfico abaixo informa os dados de uma pesquisa a respeito do tipo de conexão à internet nos domicílios brasileiros.

Preferência dos tipos de conexão à internet nos domicílios brasileiros de 2009 a 2013



Fonte de pesquisa: Teleco. Disponível em: <www.teleco.com.br/internet_usu.asp>. Acesso em: 20 abr. 2016.

No caderno, julgue as alternativas abaixo em verdadeira ou falsa.

a) Em 2009, a maior parte das pessoas entrevistadas utilizava a conexão via rádio.

b) A preferência pela conexão de internet discada é a que menos se alterou nos anos analisados.

c) Entre os anos 2009 e 2012, a preferência pela conexão de internet discada diminuiu.

d) A conexão menos procurada não é a mesma nos anos 2011 e 2012.

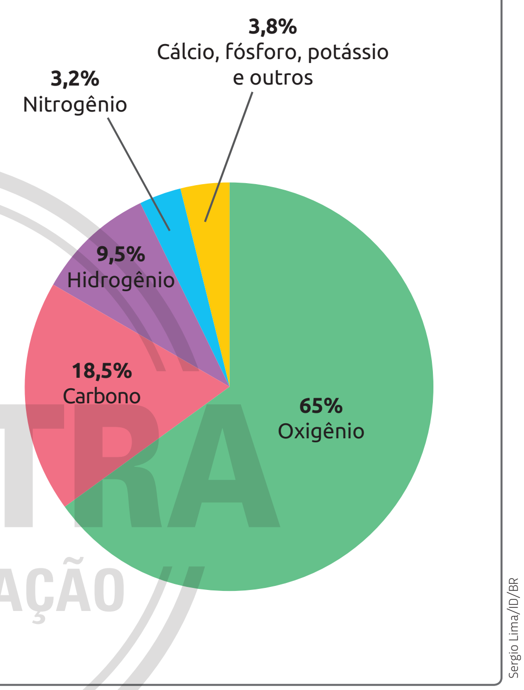
e) A preferência pela banda larga móvel aumentou ao longo dos anos analisados.

9. Construa no caderno um gráfico de barras que represente as notas de Alice, de 0 a 10, no primeiro bimestre de 2017, conforme as informações abaixo. Considere que a menor subdivisão de notas é em décimos.

- A nota em Matemática corresponde ao maior inteiro menor do que sua nota em Biologia.
- As notas em Física e Biologia foram 7,8 e 8,3, respectivamente.
- A nota em História foi 9,9.
- Em Química, Alice tirou a sua nota mais baixa, 6,4.
- A maior nota de Alice foi em Português.

10. Estudos mostram que o corpo humano é constituído essencialmente de átomos de hidrogênio e oxigênio, os elementos que formam a água, além de átomos de carbono. Observe no gráfico abaixo a porcentagem correspondente a esses e outros elementos na massa corporal total humana.

Porcentagem dos elementos mais abundantes na massa do corpo humano



Fonte de pesquisa: TORTORA, Gerard J. *Corpo humano*: fundamentos de anatomia e fisiologia. Trad. Cláudia L. Zimmer. Porto Alegre: Artmed, 2000. p. 21.

a) Que tipo de gráfico foi utilizado para a representação dos dados? Em relação a um gráfico de barras, por exemplo, por que esse gráfico é mais indicado para representar este caso?

b) Considerando que a massa de uma pessoa é 70 kg, calcule a massa de oxigênio no corpo dessa pessoa.

11. **Em grupo** Escolham um tema e pesquisem informações que possam ser apresentadas por meio de um gráfico de barras, de linhas ou de setores. Em seguida, representem esse gráfico em uma cartolina e exponham para os colegas da turma. Os demais grupos devem avaliar se o gráfico representado por vocês está adequado para os dados coletados.

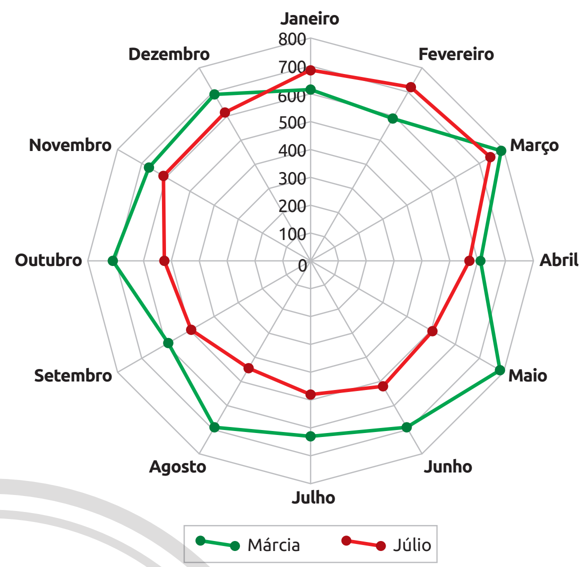
12. Alguns tipos de gráficos, como o gráfico polar (ou gráfico de radar), reúnem uma série de dados em apenas uma imagem. Observe ao lado os valores das vendas mensais ao longo de um ano de dois vendedores de uma determinada loja. Em seguida, responda no caderno.

a) Qual dos dois vendedores registrou melhor desempenho nesse ano?

b) Em quais meses o vendedor de desempenho inferior superou o de melhor desempenho?

c) Em qual mês houve a maior diferença entre os valores das vendas dos dois vendedores?

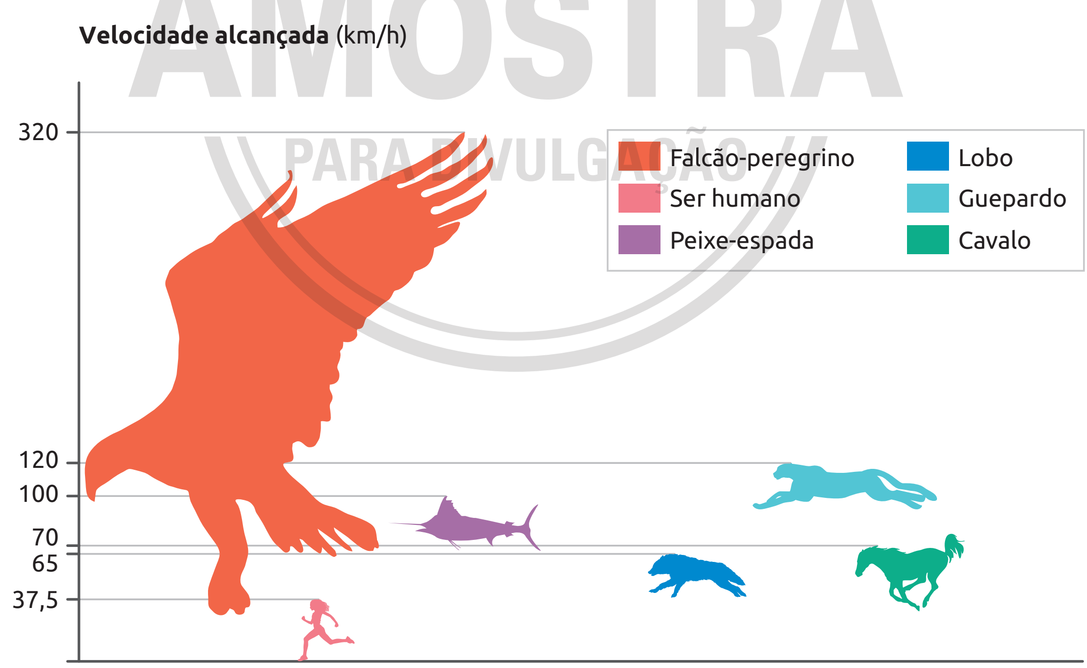
Vendas de Márcia e Júlio em 2017



Fonte de pesquisa: Loja onde Márcia e Júlio trabalham.

13. O gráfico abaixo representa as velocidades máximas de alguns animais e do ser humano.

Comparação das velocidades máximas de alguns animais e do ser humano



Fonte de pesquisa: RICHARDS, Jon; SIMKINS, Ed. *O mundo em infográficos*. Trad. Liliana Negrello; Orlei Negrello Filho. Rio de Janeiro: Sextante, 2013. p. 56-57.

a) Quais animais têm velocidades próximas?

b) Sabendo que o tamanho médio do falcão-peregrino é 44,5 cm, determine a quantidade de vezes que ele percorre o seu próprio tamanho no intervalo de tempo 1 s, com a sua velocidade máxima.

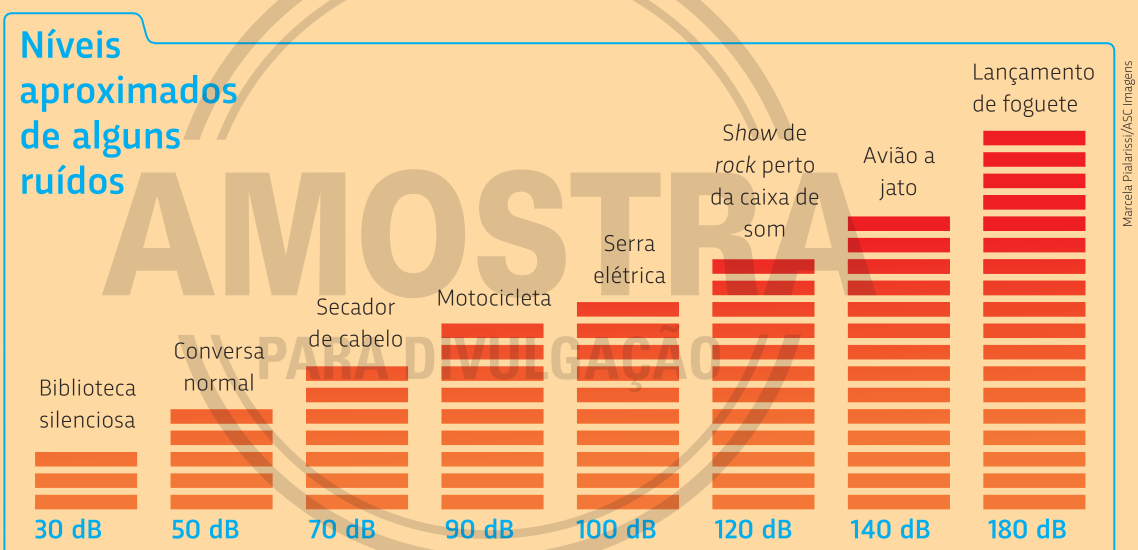
c) Elabore uma questão utilizando as informações do pictograma que ainda não foram exploradas nos itens anteriores. Em seguida, proponha a um colega que a resolva.

Poluição sonora

Imagine que você esteja em um grande centro urbano no início da manhã, quando as pessoas estão saindo de casa em direção ao trabalho ou à escola, por exemplo. Provavelmente você também está pensando nos sons de motores e buzinas de veículos, alto-falantes e alarmes disparados. A essa mistura de sons e ruídos damos o nome de poluição sonora.

Embora seja diferente de outros tipos de poluição, pois não se acumula no meio ambiente, a poluição sonora também provoca danos. Além de afastar alguns animais dos centros urbanos, desequilibrando assim o ecossistema, ela prejudica o corpo humano e interfere no bem-estar por causa dos sons emitidos em alta intensidade (medida em decibéis – dB). Alguns desses males se manifestam com estresse, depressão, insônia, agressividade, perda de atenção e de memória, dores de cabeça, cansaço, perda de audição temporária ou permanente, entre outros sintomas.

Sabendo disso, é possível tomar algumas, como evitar a permanência em locais muito barulhentos, ouvir músicas em baixo volume nos fones de ouvido e por períodos curtos e fechar as janelas do carro quando o trânsito estiver barulhento.



Fonte de pesquisa: Informus.com.br. Disponível em: <www.music-center.com.br/index.php?option=com_content&view=article&id=40:processamento-de-audio-introducao&catid=7:audio&Itemid=5>. Acesso em: 12 jan. 2016.

Ouvir músicas com fone de ouvido em volume alto por muitas horas pode causar danos irreversíveis à audição.

A Onde você vive há poluição sonora? Em caso afirmativo, diga quais são as situações que a provocam.

B Na sua opinião, a quais ruídos apresentados no gráfico não é possível ficar exposto por um longo período?

C Segundo a Organização Mundial da Saúde, um ruído acima de 55 dB pode causar estresse e efeitos negativos. Quais ruídos apresentados no gráfico não se encaixam nesta descrição?

Medidas de tendência central

Vimos anteriormente que os gráficos apresentam um conjunto de informações de modo resumido. Contudo, em alguns casos é necessário apresentar medidas que representem os dados de maneira ainda mais sintetizada. Chamamos essas medidas de **medidas de tendência central**. Entre elas, temos a **média aritmética**, a **mediana** e a **moda**.

A tabela a seguir apresenta a quantidade de gols marcados pelos dez primeiros colocados do campeonato brasileiro de futebol da série A de 2015, até a 16ª rodada. Vamos analisar esse conjunto de dados por meio das medidas de tendência central.

Gols marcados no campeonato brasileiro de futebol da série A de 2015, até a 16ª rodada

Colocação	Clube	Gols marcados
1º	Atlético-MG	32
2º	Corinthians-SP	20
3º	Fluminense-RJ	20
4º	Sport-PE	26
5º	Atlético-PR	20
6º	Palmeiras-SP	26
7º	São Paulo-SP	22
8º	Grêmio-RS	20
9º	Chapecoense-SC	13
10º	Internacional-RS	13

Fonte de pesquisa: Confederação Brasileira de Futebol. Disponível em: <www.cbf.com.br/competicoes/brasileiro-serie-a/classificacao/2015#.Vb9s8_NViko>. Acesso em: 3 ago. 2015.

Buda Mendes/Getty Images

Jogadores do Atlético-MG comemorando um gol marcado contra o Flamengo, no estádio do Maracanã, durante rodada da série A do campeonato brasileiro, em junho de 2015.

A classificação dos clubes, via de regra, é determinada pela quantidade de pontos ganhos e não pela quantidade de gols marcados.

Média aritmética

Para calcular a média aritmética $(\bar{x})$, ou simplesmente média, de um conjunto de dados, basta adicionar os valores de todos os dados e dividir essa soma pela quantidade de valores adicionados. De acordo com a tabela acima, temos que:

$$\bar{x} = \frac{32 + 20 + 20 + 26 + 20 + 26 + 22 + 20 + 13 + 13}{10} = \frac{212}{10} = 21{,}2$$

Portanto, a quantidade média de gols marcados pelos dez primeiros colocados no campeonato brasileiro de futebol da série A de 2015, até a 16ª rodada, é 21,2 gols.

Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ os n valores da variável x. A média aritmética de x representada por $\bar{x}$ é definida por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

O símbolo que indica o somatório (Σ) é a letra grega maiúscula sigma.

O símbolo $\sum_{i=1}^{n} x_i$ (lê-se somatório dos valores x_i, com i variando de 1 a n) indica que todos os números x_i devem ser adicionados, desde o primeiro (x_1) até o n-ésimo (x_n).

Média ponderada

Para determinar a média quando os valores de um conjunto de dados possuem pesos diferentes, isto é, quando possuem graus de importância diferentes, utilizamos a média ponderada $(\bar{x}_p)$. Por exemplo, para calcular a pontuação média de um aluno que obteve 3 pontos numa prova com peso 7 e 8 pontos em um trabalho com peso 3, fazemos:

$$\bar{x}_p = \frac{3 \cdot 7 + 8 \cdot 3}{7 + 3} = \frac{45}{10} = 4{,}5$$

Portanto, a média desse aluno é 4,5 pontos.

Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ os n valores da variável x com pesos $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, respectivamente. A média ponderada de x representada por $\bar{x}_p$ é definida por:

$$\bar{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \ldots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}$$

Mediana

A mediana (*Md*) divide o conjunto de dados em duas partes com a mesma quantidade de elementos: uma parte com valores menores do que ou iguais à mediana e outra parte com valores maiores do que ou iguais à mediana. Para determinar a mediana de um conjunto de dados é necessário organizar os valores em ordem crescente ou decrescente. Para uma quantidade ímpar de elementos, a mediana corresponde ao termo central e, para uma quantidade par de elementos, a mediana corresponde à média aritmética dos dois valores centrais.

No caso dos gols marcados pelos dez primeiros colocados no campeonato brasileiro de futebol da série A de 2015, até a 16ª rodada, inicialmente vamos organizar os valores em ordem crescente. Como temos uma quantidade par de elementos (10), vamos calcular a média aritmética dos dois valores centrais.

13	13	20	20	20	20	22	26	26	32

$$Md = \frac{20 + 20}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Portanto, a mediana é de 20 gols.

Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ os n valores da variável x em ordem crescente ou decrescente. Se n for ímpar, a mediana de x será o elemento central, de ordem $\frac{n+1}{2}$. Caso n seja par, a mediana de x será a média aritmética entre os elementos centrais, de ordem $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$.

Moda

A moda (*Mo*) de um conjunto de dados é o valor que ocorre com a maior frequência.

No caso dos gols marcados pelos dez primeiros colocados do campeonato brasileiro de futebol da série A de 2015, até a 16ª rodada, a moda é 20 gols, isto é, $Mo = 20$, pois 20 é o valor que ocorre com a maior frequência.

Caso um conjunto de dados não apresente moda, ou seja, não contenha valor algum que se repete, dizemos que esse conjunto é **amodal**. Mas caso haja um conjunto de dados com mais de uma moda, ele é **bimodal** se tiver duas modas, **trimodal** se tiver três modas, **quadrimodal** se tiver quatro modas, e assim sucessivamente.

Um conjunto com três ou mais modas também pode ser chamado **polimodal**.

Atividades resolvidas

R3. Observe no quadro a seguir os salários recebidos pelos ocupantes dos cargos de uma empresa de advocacia.

Função	Quantidade de funcionários	Sálario
Presidente	1	R$ 20 000,00
Advogado	8	R$ 12 000,00
Assistente de advocacia	11	R$ 2 500,00

a) Qual é a média dos salários dos funcionários dessa empresa?

b) Os salários dos assistentes de advocacia correspondem a qual porcentagem do total dos salários nessa empresa?

c) Qual é a moda dos salários dessa empresa? E a mediana?

Resolução

a) $\bar{x} = \frac{1 \cdot 20\,000 + 8 \cdot 12\,000 + 11 \cdot 2\,500}{1 + 8 + 11} =$

$= \frac{20\,000 + 96\,000 + 27\,500}{20} =$

$= \frac{143\,500}{20} = 7\,175$

Portanto, a média dos salários dessa empresa é R$ 7 175,00.

b) $p = \frac{11 \cdot 2\,500}{143\,500} \cdot 100 \simeq 19{,}16$

Portanto, os salários dos assistentes de advocacia representam cerca de 19,16% do gasto total com salários nessa empresa.

c) Como a maior parte dos funcionários dessa empresa é de assistentes de advocacia e todos recebem o mesmo salário, podemos afirmar que R$ 2 500,00 é a moda dos salários dessa empresa.

Para determinar a mediana vamos escrever os salários em ordem crescente.

R$ 2 500,00, R$ 2 500,00, R$ 2 500,00,
R$ 2 500,00, R$ 2 500,00, R$ 2 500,00,
R$ 2 500,00, R$ 2 500,00, R$ 2 500,00,
R$ 2 500,00, R$ 2 500,00, R$ 12 000,00,
R$ 12 000,00, R$ 12 000,00, R$ 12 000,00,
R$ 12 000,00, R$ 12 000,00, R$ 12 000,00,
R$ 12 000,00 e R$ 20 000,00

Como a quantidade de salários é par, a mediana é dada pela média aritmética dos termos centrais (10º e 11º termos), isto é:

$Md = \frac{2\,500 + 2\,500}{2} = \frac{5\,000}{2} = 2\,500$

Logo a mediana é R$ 2 500,00.

R4. (UFG-GO) Na tabela apresentada ao lado estão listados os dez países com maior capacidade instalada de energia renovável no mundo.

Tomando por base os dados apresentados na tabela, conclui-se que a média aritmética da capacidade total instalada dos países situados no continente europeu representa, aproximadamente:

a) 36,86% da média aritmética dos países situados fora do continente asiático.

b) 37,97% da média aritmética dos países situados no continente asiático.

c) 44,44% da média aritmética dos países situados no continente americano.

d) 60,24% da média aritmética dos países situados fora do continente europeu.

e) 68,49% da média aritmética dos dez países.

Líderes mundiais em energia renovável instalada

País	Capacidade total instalada (Gigawatts)
China	133
Estados Unidos	93
Alemanha	61
Espanha	32
Itália	28
Japão	25
Índia	22
França	18
Brasil	15
Reino Unido	11

Fonte de pesquisa: Pew Enviroment Group (2011). Disponível em: <http://exame.abril.com.br/economia/noticias>. Acesso em: 1º abr. 2014. (Adaptado).

Resolução

Primeiramente vamos calcular as médias dos países localizados em cada uma das regiões citadas nas alternativas.

Países do continente europeu:

$$\bar{x} = \frac{61 + 32 + 28 + 18 + 11}{5} = \frac{150}{5} = 30$$

Países do continente asiático:

$$\bar{x} = \frac{133 + 25 + 22}{3} = \frac{180}{3} = 60$$

Países do continente americano:

$$\bar{x} = \frac{93 + 15}{2} = \frac{108}{2} = 54$$

Países fora do continente asiático:

$$\bar{x} = \frac{93 + 61 + 32 + 28 + 18 + 15 + 11}{7} = \frac{258}{7} \simeq 36,86$$

Países fora do continente europeu:

$$\bar{x} = \frac{133 + 93 + 25 + 22 + 15}{5} = \frac{288}{5} = 57,6$$

Todos os países:

$$\bar{x} = \frac{133 + 93 + 61 + 32 + 28 + 25 + 22 + 18 + 15 + 11}{10} = \frac{438}{10} = 43,8$$

Agora, calculando a porcentagem que a média dos países do continente europeu tem em relação às médias calculadas acima, temos:

Países do continente asiático:

$$\frac{30}{60} \cdot 100 = 50\%$$

Países do continente americano:

$$\frac{30}{54} \cdot 100 \simeq 55,56\%$$

Todos os países:

$$\frac{30}{43,8} \cdot 100 \simeq 68,49\%$$

Países fora do continente asiático:

$$\frac{30}{36,86} \cdot 100 \simeq 81,39\%$$

Países fora do continente europeu:

$$\frac{30}{57,6} \cdot 100 \simeq 52,08\%$$

Portanto, a alternativa correta é **e**.

14. Marcelo fez três avaliações de Biologia. Na nota da terceira avaliação, ele obteve 3 pontos a mais que na nota da segunda. Na segunda, obteve 6 pontos a mais que na da primeira.

Quais as notas das avaliações de Marcelo, sabendo que a média aritmética das três notas é 69?

15. A tabela abaixo apresenta a distância média entre alguns planetas e o Sol. Sabendo que a média aritmética das distâncias apresentadas é 135 912 500, determine a distância média em quilômetros entre a Terra e o Sol.

Distância entre alguns planetas e o Sol

Planetas	Distância média ao Sol (km)
Mercúrio	57 910 000
Vênus	108 200 000
Terra	*x*
Marte	227 940 000

Fonte de pesquisa: UFSC. Planetário. Disponível em: <http://planetario.ufsc.br/o-sistema-solar/>. Acesso em: 20 abr. 2016.

16. Para avaliar a loja onde trabalha, a gerente aplicou uma pesquisa a seus clientes. Observe os critérios, a pontuação e os pesos correspondentes nessa pesquisa.

Critério	Pontuação	Peso
Qualidade no atendimento	8	3
Preço	9	2
Qualidade do produto	8	5

Sabendo que a pontuação máxima final é 10, que pontuação a loja atingiu com a avaliação dos clientes?

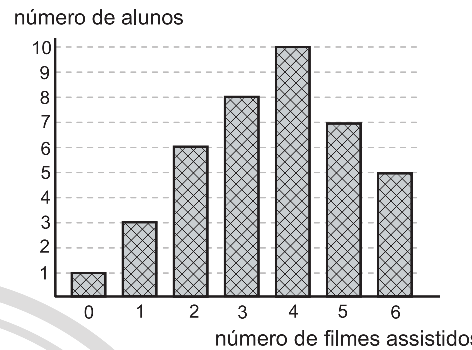
17. As alturas, em metros, dos alunos do 1º C do Ensino Médio são:

1,62	1,78	1,75	1,75
1,75	1,81	1,62	1,65
1,80	1,82	1,90	1,62
1,60	1,83	1,57	1,85

Determine a(s) moda(s) desses valores.

18. (IFSP) Uma pesquisa foi realizada com 40 alunos de uma classe sobre a quantidade de filmes a que cada um assistiu durante o primeiro semestre. O resultado está representado no gráfico.

A média aritmética do número de filmes assistidos pelos alunos é



IFSP/Fac-símile:ID/BR

a) 2,4 b) 2,6 c) 2,8 d) 3,2 e) 3,6

19. (UEA-MA) A tabela relaciona, em ordem decrescente, as seis áreas protegidas da Amazônia que foram mais desmatadas no período de agosto de 2012 a março de 2013, segundo estudo feito pelo instituto de pesquisas ambientais Imazon, baseado em Belém (PA). Nessa tabela, as áreas desmatadas da Flona de Altamira e da APA Triunfo do Xingu estão indicadas respectivamente por *X* e *Y*.

Maiores desmatamentos das áreas protegidas da Amazônia no período de agosto de 2012 e março de 2013 – BRASIL

Áreas Protegidas (APs)	Estado	Desmate (em km^2)
Flona do Jamanxim	PA	42
APA Triunfo do Xingu	PA	*Y*
Florex Rio Preto	RO	23,5
Flona de Altamira	PA	*X*
TI Cachoeira do Iriri	PA	10,5
FERS Mutum	RO	10,3

Fonte de pesquisa: O Estado de S.Paulo. São Paulo, 26 jun. 2013.

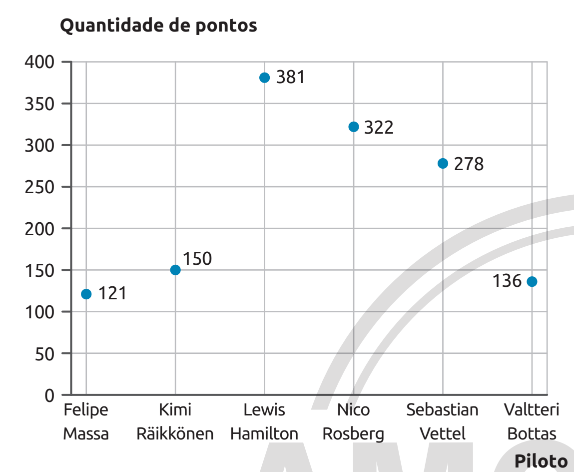
Sabendo que, nessas seis APs, a área mediana desmatada foi 19 km^2 e a área média desmatada foi 20,8 km^2, pode-se afirmar que as áreas desmatadas indicadas por *X* e *Y* na tabela são, respectivamente, em quilômetros quadrados, iguais a

a) 14,5 e 34
b) 14 e 24
c) 13,5 e 26
d) 12 e 28
e) 14,5 e 24

20. Marilsa tem 5 netos de idades diferentes com, no mínimo, um ano de diferença entre eles. A média das idades de seus netos é 14. Sabendo que o neto mais novo tem 8 anos e o mais velho, 24, qual a idade máxima que o segundo neto mais velho pode ter?

21. O gráfico apresenta a quantidade de pontos dos seis primeiros pilotos na temporada de Fórmula 1 de 2015.

Pontuação dos seis primeiros pilotos na temporada de Fórmula 1 de 2015



Sergio Lima/ID/BR

Fonte de pesquisa: Formula 1. Disponível em: <www.formula1.com/content/fom-website/en/latest.html?date=2015-11&type=all>. Acesso em: 23 abr. 2016.

Calcule a média aritmética, a mediana e a moda, caso exista, da quantidade de pontos desses pilotos.

22. (Enem/Inep) Os candidatos *K*, *L*, *M*, *N* e *P* estão disputando uma única vaga de emprego em uma empresa e fizeram provas de Português, Matemática, Direito e Informática. O quadro apresenta as notas obtidas pelos cinco candidatos.

Candidatos	Português	Matemática	Direito	Informática
K	33	33	33	34
L	32	39	33	34
M	35	35	36	34
N	24	37	40	35
P	36	16	26	41

Segundo o edital de seleção, o candidato aprovado será aquele para o qual a mediana das notas obtidas nas quatro disciplinas for a maior.

O candidato aprovado será:

a) K. b) L. c) M. d) N. e) P.

23. Desafio Rebeca tem 5 filhos, dos quais dois são gêmeos. A média das idades de todos os filhos é 13,6. Se não forem contadas as idades dos gêmeos, a média das idades dos filhos de Rebeca é 16. Determine a idade dos gêmeos.

24. (Udesc) Em 2014, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) comemorou 10 anos. A Tabela **1** mostra o desempenho dos alunos catarinenses na OBMEP nas 9 primeiras edições.

Tabela 1: Quadro de premiação de Santa Catarina na OBMEP

Ano	Ouro	Prata	Bronze	Menção honrosa	Total
2005	5	15	15	1 040	1 075
2006	6	15	15	1 526	1 562
2007	3	16	78	1 213	1 310
2008	4	24	54	1 296	1 378
2009	8	27	54	1 488	1 577
2010	9	25	64	1 567	1 665
2011	11	15	49	1 279	1 354
2012	19	32	124	1 707	1 882
2013	26	29	190	1 778	2 023

Fonte de pesquisa: OBMEP. Disponível em: <www.obmep.org.br/obmep_em_numeros.html>. Acesso em: 30 maio 2014.

Analise as proposições acerca das informações da Tabela **1**, e julgue (V) para verdadeira e (F) para falsa.

- O crescimento percentual do número total de premiados catarinenses foi maior de 2005 para 2006 do que de 2011 para 2012.
- Sabe-se que 7 medalhistas de ouro de 2013 são do município de Joinville, logo 24,13% dos medalhistas de ouro de 2013 de Santa Catarina são de Joinville.
- A proporção de medalhistas de bronze de 2013 por 2005 é de $\frac{38}{5}$.
- A média de medalhistas de prata de Santa Catarina é de 22 alunos nessas 9 primeiras edições.

Escolha a alternativa que contém a sequência correta, de cima para baixo.

a) V–F–F–V c) F–F–V–F e) F–V–F–V
b) F–V–V–V d) V–V–F–V

10 capítulo

Trigonometria

Relações métricas

As relações métricas são ferramentas matemáticas que nos permitem estudar alguns aspectos métricos da geometria plana.

Teorema de Tales

[...] Segundo a tradição a geometria demonstrativa começou com Tales de Mileto, um dos "sete sábios" da Antiguidade, durante a primeira metade do sexto século a.C.

Segundo parece, Tales começou sua vida como mercador, tornando-se rico o bastante para dedicar a parte final de sua vida ao estudo e a algumas viagens. Diz-se que ele viveu por algum tempo no Egito, e que despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sombra. De volta a Mileto ganhou reputação, graças a seu gênio versátil, de estadista, conselheiro, engenheiro, homem de negócios, filósofo, matemático e astrônomo. Tales é o primeiro personagem conhecido a quem se associam descobertas matemáticas. [...]

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 94-95.

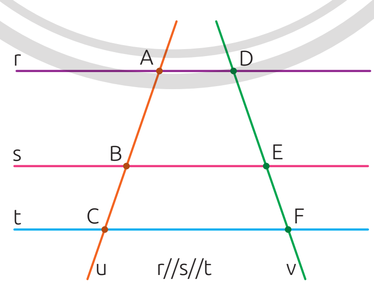
Coleção particular. Fotografia: Classic Image/Alamy Stock Photo/Latinstock

Gravura de Tales de Mileto, que viveu por volta de 640 a.C. a 564 a.C.

Geometria demonstrativa: conhecimentos geométricos que se justificam por meio de demonstrações lógicas.

Antes de enunciar o teorema de Tales, considere o feixe de retas paralelas *r*, *s* e *t* e as retas *u* e *v* transversais ao feixe de retas paralelas.

Retas transversais a um feixe de retas paralelas são retas pertencentes ao mesmo plano do feixe e que intersectam todas as retas do feixe de retas paralelas.



Sergio Lima/ID/BR

Feixe de retas paralelas: duas ou mais retas de um mesmo plano que, duas a duas, são paralelas.

Dizemos que os pontos *A* e *D*, determinados na imagem acima pela intersecção das retas transversais com a reta *r*, são correspondentes. De modo semelhante, são correspondentes os pontos *B* e *E* e os pontos *C* e *F*, determinados pela intersecção das retas transversais com as retas *s* e *t*, respectivamente. De maneira análoga, dizemos que os pares de segmentos *AB* e *DE*, *BC* e *EF*, *AC* e *DF*, determinados sobre as retas transversais pelo mesmo par de retas paralelas, são segmentos correspondentes.

Denotaremos a medida de $\overline{AB}$ por *AB*.

O teorema de Tales nos informa que:

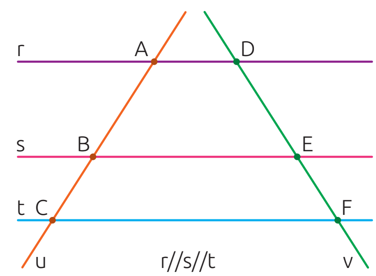
> Quando um feixe de retas paralelas é intersectado por duas retas transversais, a razão entre a medida de dois segmentos quaisquer sobre uma reta transversal é igual à razão entre a medida dos segmentos correspondentes sobre a outra reta transversal.

Assim, em relação à figura anterior, temos:

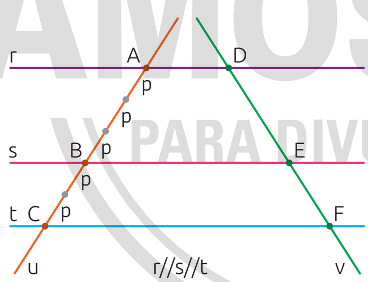
- $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$
- $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DE}{DF}$
- $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{DF}{EF}$

Comensurável: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis quando existe um segmento que cabe um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e um número inteiro de vezes em $\overline{CD}$.

Mostraremos a veracidade do teorema de Tales para segmentos comensuráveis, considerando um feixe de retas paralelas *r*, *s* e *t* e as retas transversais ao feixe de retas paralelas *u* e *v*.



Vamos mostrar que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são proporcionais a $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$, isto é, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$. Para isso, vamos admitir que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são comensuráveis, ou seja, existe um segmento de medida *p* que cabe *m* vezes em $\overline{AB}$ e cabe *n* vezes em $\overline{BC}$, assim $AB = mp$ e $BC = np$ com $m, n \in \mathbb{N}^*$.

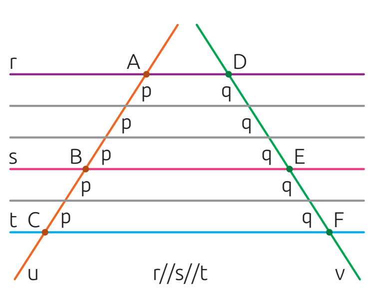


Da razão $\dfrac{AB}{BC}$, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{mp}{np} = \frac{m}{n} \qquad (\text{I})$$

Observe que, de acordo com a imagem, $m = 3$ e $n = 2$.

Traçando retas auxiliares paralelas às retas *r*, *s* e *t* que passam pelos pontos que dividem $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ em *m* e *n* partes congruentes de medida *p*, respectivamente, $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ também ficam divididos em *m* e *n* partes congruentes de medida *q*, respectivamente.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Da razão $\dfrac{DE}{EF}$, temos:

$$\frac{DE}{EF} = \frac{mq}{nq} = \frac{m}{n} \qquad (\text{II})$$

É possível demonstrar que o teorema de Tales também é válido para segmentos não comensuráveis.

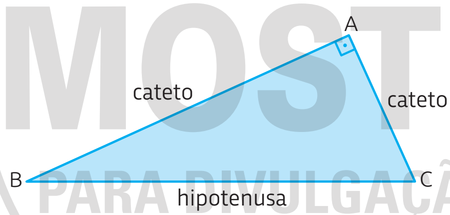
Das relações **I** e **II**, temos $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$, como queríamos mostrar.

Relações métricas no triângulo retângulo

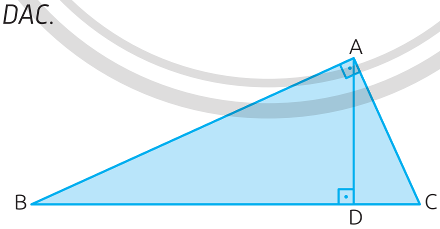
O triângulo retângulo é conhecido há milhares de anos, pois há registros do tempo dos faraós de que os antigos egípcios os construíam a partir de cordas divididas com nós para demarcar ângulos retos.

Representação artística da medição de terra, às margens do rio Nilo, pelos antigos egípcios.

Em um triângulo retângulo chamamos de **hipotenusa** o lado oposto ao ângulo reto (maior lado). Os outros dois lados perpendiculares entre si são chamados **catetos**.

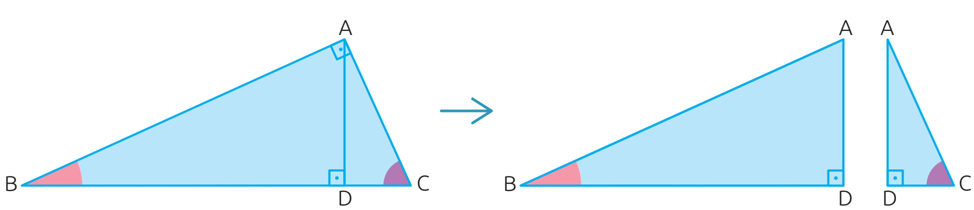


Considerando o triângulo ABC, retângulo em A, ao traçar a altura $\overline{DA}$ relativa à hipotenusa obtemos os triângulos DBA e DAC.



Os triângulos ABC, DBA e DAC são semelhantes entre si.

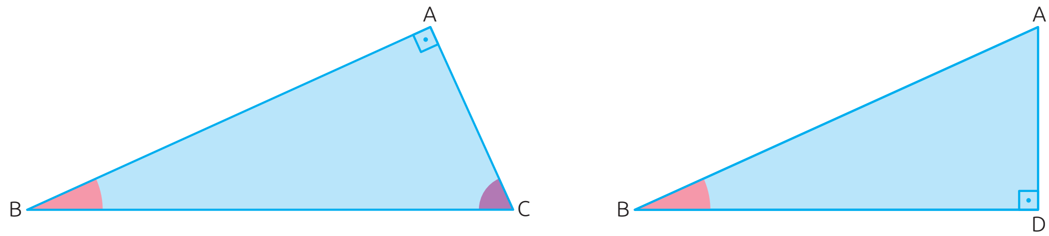
Para verificar a semelhança entre esses três triângulos, vamos inicialmente considerá-los separadamente e depois analisá-los dois a dois.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Indicaremos um ângulo e sua medida por um mesmo símbolo.

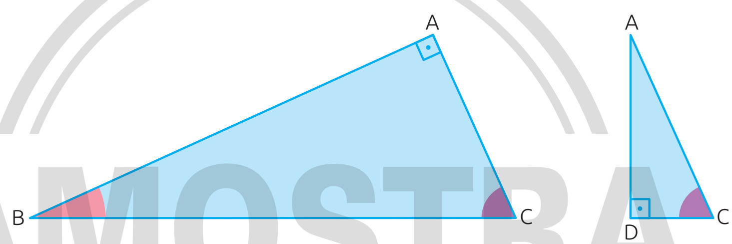
a Triângulos *ABC* e *DBA*



Sabemos que $C\hat{A}B = A\hat{D}B = 90°$ e $C\hat{A}B = D\hat{B}A$, pois os ângulos internos $A\hat{B}C$ e $D\hat{B}A$ são comuns a ambos os triângulos. Como temos dois ângulos internos congruentes, podemos afirmar que os triângulos *ABC* e *DBA* são semelhantes.

> Escrevemos $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ para denotar que os triângulos *ABC* e *DBA* são semelhantes.

b Triângulos *ABC* e *DAC*



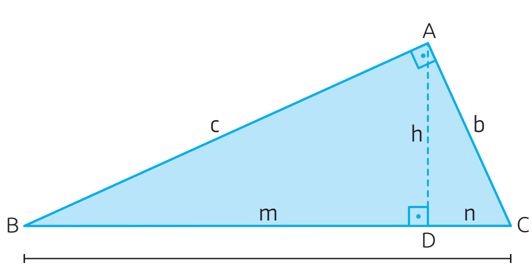
De maneira análoga à anterior, $C\hat{A}B = C\hat{D}A = 90°$ e $B\hat{C}A = A\hat{C}D$, pois os ângulos internos $B\hat{C}A$ e $A\hat{C}D$ são comuns a ambos os triângulos. Como temos dois ângulos internos congruentes, podemos afirmar que os triângulos *ABC* e *DAC* são semelhantes.

c Triângulos *DBA* e *DAC*

Como o triângulo *ABC* é semelhante aos triângulos *DBA* e *DAC*, podemos afirmar que os triângulos *DBA* e *DAC* também são semelhantes.

Portanto, os triângulos *ABC*, *DBA* e *DAC* são semelhantes entre si $(\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC)$, como queríamos verificar.

> Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide-o em dois triângulos retângulos semelhantes a ele e semelhantes entre si.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Utilizando a semelhança entre os triângulos *ABC*, *DBA*, *DAC* e nomeando seus lados, podemos estabelecer algumas relações métricas.

Em relação ao triângulo *ABC*:

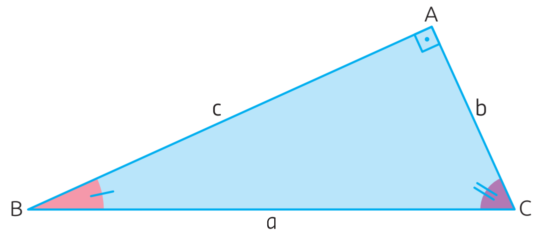
- a é a medida da hipotenusa;
- b e c são as medidas dos catetos;
- h é a medida da altura relativa à hipotenusa;
- m e n são as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa $(a = m + n)$.

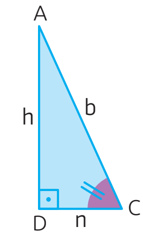
Considerando os triângulos semelhantes *ABC* e *DAC*:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AC}{DA}$$
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h}$$
$$c \cdot b = a \cdot h$$

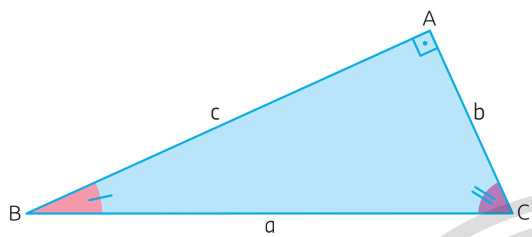
$$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DA}$$
$$\frac{b}{c} = \frac{n}{h}$$
$$c \cdot n = b \cdot h$$

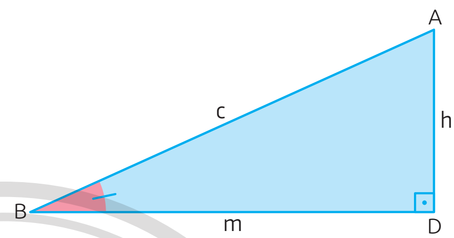
$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$$
$$b \cdot b = a \cdot n$$
$$b^2 = a \cdot n$$





Considerando os triângulos semelhantes *ABC* e *DBA*:





$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{DB}$$
$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m}$$
$$c \cdot c = a \cdot m$$
$$c^2 = a \cdot m$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DA}{DB}$$
$$\frac{b}{c} = \frac{h}{m}$$
$$c \cdot h = b \cdot m$$

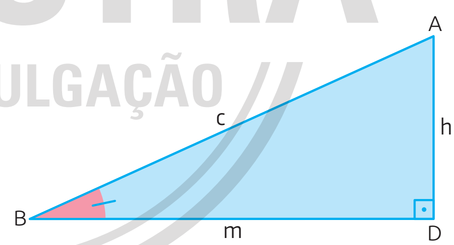
$$\frac{BC}{AC} = \frac{BA}{DA}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h}$$
$$b \cdot c = a \cdot h$$

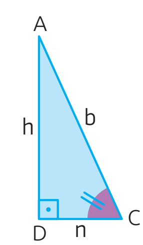
Considerando os triângulos semelhantes *DBA* e *DAC*:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{AD}$$
$$\frac{c}{m} = \frac{b}{h}$$
$$m \cdot b = c \cdot h$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$$
$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$$
$$m \cdot n = h \cdot h$$
$$h^2 = m \cdot n$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{CA}{CD}$$
$$\frac{c}{h} = \frac{b}{n}$$
$$h \cdot b = c \cdot n$$



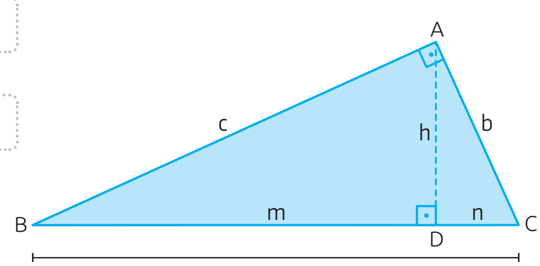


Portanto, no triângulo retângulo *ABC*, estabelecemos as seguintes relações métricas:

$c \cdot b = a \cdot h$ $\quad$ $c \cdot n = b \cdot h$ $\quad$ $b^2 = a \cdot n$

$c^2 = a \cdot m$ $\quad$ $c \cdot h = b \cdot m$ $\quad$ $h^2 = m \cdot n$

$a = m + n$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Ao adicionar as relações métricas $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$ membro a membro, temos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$$
colocando o fator comum (a) em evidência
$$b^2 + c^2 = a \cdot (n + m)$$
utilizando a relação métrica $a = m + n$
$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$
$$b^2 + c^2 = a^2$$

Assim, podemos afirmar que em um triângulo retângulo de catetos com medidas b e c e hipotenusa com medida a, temos $a^2 = b^2 + c^2$. Essa relação é conhecida como **teorema de Pitágoras**.

Esse nome é dado em homenagem ao filósofo e matemático grego Pitágoras, mas na realidade pouco se sabe a seu respeito. É provável que Pitágoras tenha nascido por volta de 572 a.C. e tenha sido discípulo de Tales. Algum tempo depois fundou a famosa escola pitagórica, basicamente um centro de estudos de Filosofia, Matemática e Ciências Naturais.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004..

O teorema de Pitágoras pode ser enunciado como segue:

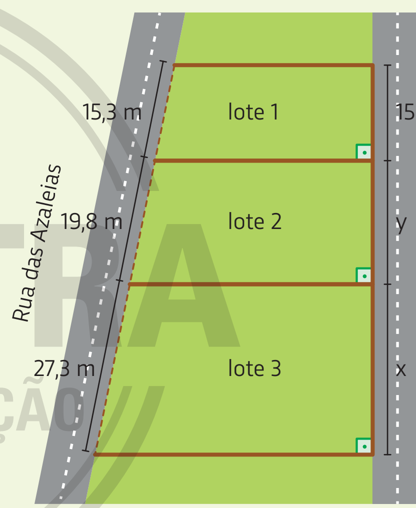
Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

A recíproca do teorema de Pitágoras também é válida. Considerando o triângulo ABC como $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, se $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo ABC é retângulo em A.

Atividades resolvidas

R1. Um terreno com formato de trapézio retângulo foi dividido em 3 lotes, conforme indicado na imagem ao lado.

De acordo com as medidas indicadas na imagem, determine os valores y e x para a fachada dos lotes **2** e **3**, respectivamente.



Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

Resolução

Podemos resolver este problema usando o teorema de Tales. Assim:

$$\frac{15}{y} = \frac{15{,}3}{19{,}8} \Rightarrow 15{,}3y = 15 \cdot 19{,}8 \Rightarrow y \simeq 19{,}41$$

$$\frac{x}{15} = \frac{27{,}3}{15{,}3} \Rightarrow 15{,}3x = 15 \cdot 27{,}3 \Rightarrow x \simeq 26{,}76$$

Portanto, a fachada do lote **2** mede aproximadamente 19,41 m e a fachada do lote **3** mede aproximadamente 26,76 m.

R2. Determine a distância d entre os pontos $A(2, 8)$ e $B(10, 2)$ no plano cartesiano a seguir.

Resolução

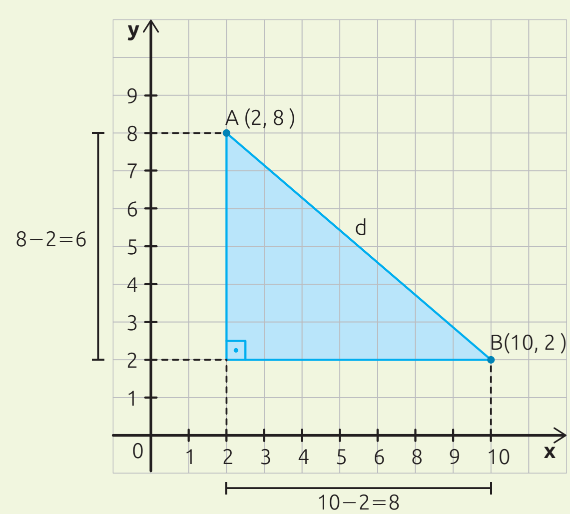
Para resolver este problema podemos recorrer ao teorema de Pitágoras.

$$d^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow d^2 = 36 + 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 100 \Rightarrow d = \sqrt{100} \Rightarrow d = 10$$

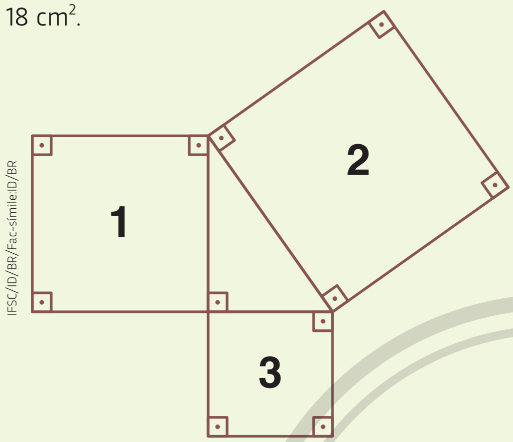
Assim, a distância entre os pontos A e B é de 10 u.c.

A abreviação u.c. significa unidades de comprimento.



Sergio Lima/ID/BR

R3. (IFSC) Ao fazer uma figura, através da técnica de Kirigami (arte tradicional japonesa de recorte com papel, criando representações de determinados seres ou objetos), uma pessoa precisou recortar uma folha **A4** no formato da figura a seguir (um triângulo retângulo e três quadrados formados a partir dos lados do triângulo). Sabe-se que a soma das áreas dos três quadrados é de 18 cm^2.



Em relação aos dados acima, analise as proposições a seguir e determine a soma da(s) correta(s).

01) A área do quadrado **2** é 8 cm^2.

02) Com as informações dadas, podemos determinar os valores dos lados dos quadrados **1** e **3**.

04) A soma das áreas dos quadrados **1** e **3** é 9 cm^2.

08) O lado do quadrado **2** vale 3 cm.

16) Os lados dos três quadrados apresentados estão relacionados pelo teorema de Pitágoras.

Resolução

Sendo b, a e c as medidas dos lados e b^2, a^2 e c^2 as áreas dos quadrados **1**, **2** e **3**, respectivamente, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 & \text{(I)} \\ a^2 + b^2 + c^2 = 18 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo o valor de $b^2 + c^2$ da equação **I** na equação **II**, obtemos:

$$a^2 + a^2 = 18 \Rightarrow 2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

Assim, temos as seguintes conclusões:

01) Falsa, pois a área do quadrado **2** $\left(a^2\right)$ é 9 cm^2.

02) Falsa, pois não é possível determinar isoladamente a área dos quadrados **1** e **3**, logo não teremos como calcular seus lados.

04) Verdadeira, pois

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 \\ a^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow b^2 + c^2 = 9$$

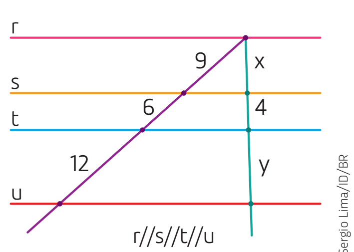
08) Verdadeira, pois se $a^2 = 9$, então $a = 3$ cm.

16) Verdadeira, pois a, b e c são medidas dos lados de um triângulo retângulo.

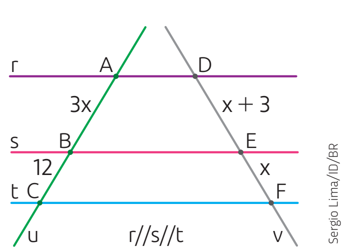
As proposições corretas são **04**, **08** e **16**. Logo a soma é 28.

Atividades

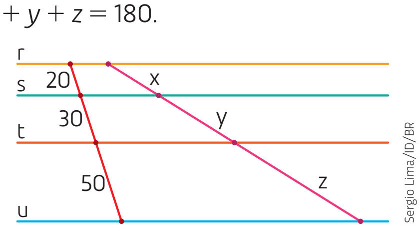
1. Determine no caderno os valores de x e y.



2. Determine no caderno o valor de x.

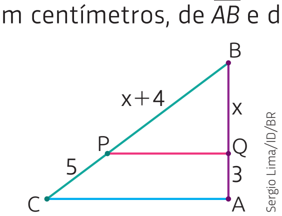


3. Na figura abaixo, as retas r, s, t e u são paralelas e x, y e z representam as medidas dos segmentos tais que $x + y + z = 180$.

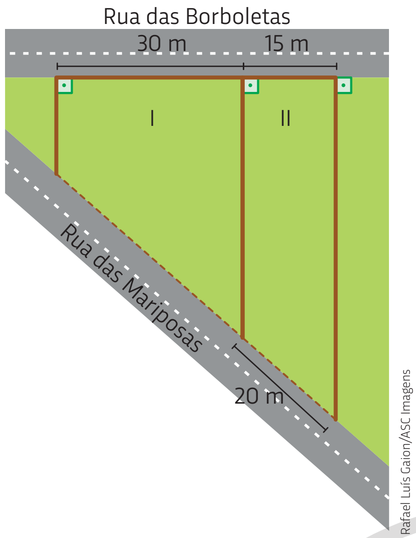


Quais são os valores de x, y e z?

4. Sabendo que $\overline{AC}//\overline{PQ}$, determine no caderno a medida, em centímetros, de $\overline{AB}$ e de $\overline{BC}$.



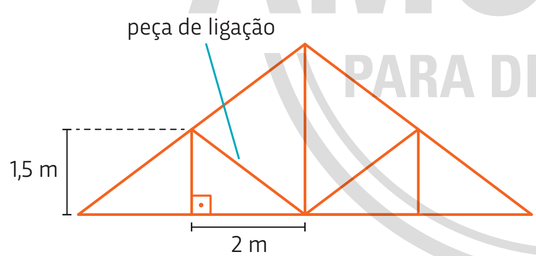
5. No esquema abaixo estão representados os terrenos **I** e **II**.



Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

Reinaldo pretende construir um muro em frente ao terreno **I** para fechar o lado que faz frente com a Rua das Mariposas. Quantos metros de comprimento terá essa construção?

6. Uma das funções da estrutura de um telhado é a sustentação das telhas, garantindo assim a sua estabilidade. Observe o esquema de uma dessas estruturas.



Sergio Lima/ID/BR

As ligações e emendas em peças de madeira podem ser empregadas em treliças e demais elementos estruturais. A aplicação mais comum, no entanto, concentra-se na montagem de tesouras em estruturas de tipos variados. Qual o comprimento da peça de ligação no esquema acima?

Treliça: armação formada pelo cruzamento de ripas de madeira que pode ser feita de metal ou de alumínio.

Tesoura: trata-se de uma montagem de várias peças formando uma estrutura rígida, geralmente de forma triangular.

7. Em cada item, dadas as medidas dos lados de um triângulo, verifique qual deles é retângulo.

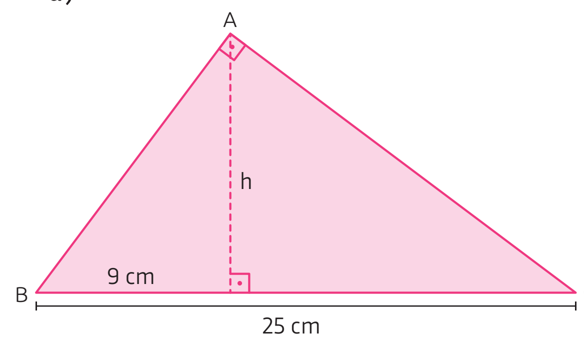
a) 5,3 dm, 5,3 dm e 7,5 dm.

b) 8,5 dm, 6,8 dm e 5,1 dm.

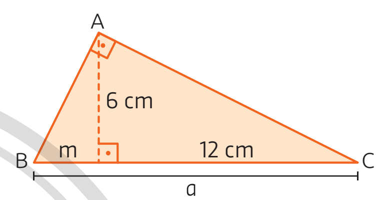
c) 6,9 dm, 6,1 dm e 3,2 dm.

8. Em cada item a seguir, calcule no caderno os valores desconhecidos.

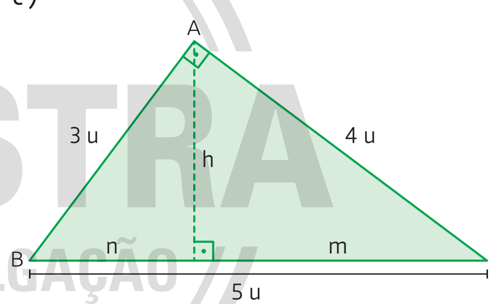
a)



b)

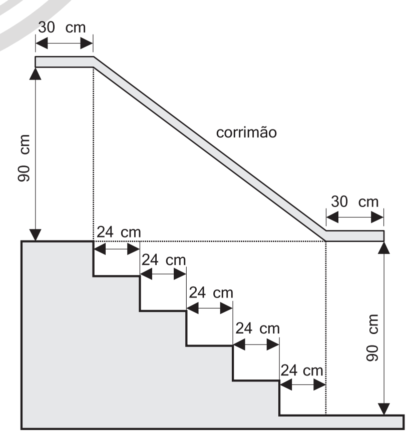


c)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

9. (Enem/Inep)



Enem/Inep/Fac-símile: ID/BR

Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

a) 1,8 m
b) 1,9 m
c) 2 m
d) 2,1 m
e) 2,2 m

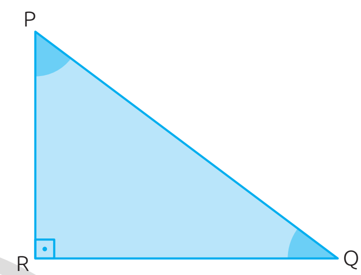
Relações trigonométricas

Vimos as relações métricas envolvendo as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Agora, veremos relações que envolvem tanto as medidas dos lados de um triângulo como as medidas de seus ângulos internos, chamadas relações trigonométricas. O ramo da Geometria destinado a esse fim é denominado **Trigonometria** (palavra de origem grega: *trigono* (triângulo) + *metria* (medida)).

Relações trigonométricas no triângulo retângulo

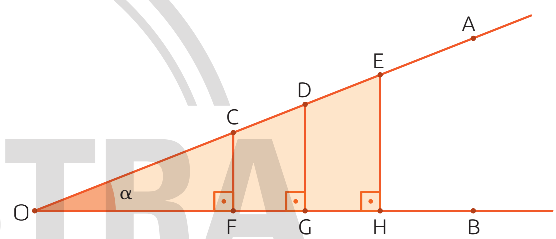
Considere o triângulo retângulo PQR em que:

- o ângulo interno $Q\hat{R}P$ corresponde ao ângulo reto;
- $P\hat{Q}R$ e $R\hat{P}Q$ são ângulos agudos;
- $\overline{PQ}$ é a hipotenusa;
- $\overline{QR}$ é o cateto oposto ao ângulo $R\hat{P}Q$;
- $\overline{RP}$ é o cateto adjacente ao ângulo $R\hat{P}Q$.



Qual é o cateto adjacente ao ângulo $P\hat{Q}R$ do triângulo acima?

Agora, considere um ângulo agudo $A\hat{O}B = \alpha\ (0° < \alpha < 90°)$. A partir dos pontos da semirreta OA podemos traçar infinitos segmentos de retas perpendiculares à semirreta OB e obter infinitos triângulos retângulos semelhantes, pois os ângulos correspondentes serão congruentes.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Por serem semelhantes esses triângulos, a razão entre a medida de dois de seus lados correspondentes será constante. Dessa forma, podemos escrever as seguintes igualdades:

- $\dfrac{CF}{OC} = \dfrac{DG}{OD} = \dfrac{EH}{OE} = \ldots = k_1$, com $k_1 \in \mathbb{R}_+^*$

  A constante k_1 relaciona a medida do cateto oposto ao ângulo α com a medida da hipotenusa dos triângulos retângulos. Essa constante recebe o nome de seno do ângulo α, que indicamos por $\text{sen}\alpha$.

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}\ (0° < \alpha < 90°)$$

- $\dfrac{FO}{OC} = \dfrac{GO}{OD} = \dfrac{HO}{OE} = \ldots = k_2$, com $k_2 \in \mathbb{R}_+^*$

  A constante k_2 relaciona a medida do cateto adjacente ao ângulo α com a medida da hipotenusa dos triângulos retângulos. Essa constante recebe o nome de cosseno do ângulo α, que indicamos por $\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}\ (0° < \alpha < 90°)$$

- $\dfrac{CF}{FO} = \dfrac{DG}{GO} = \dfrac{EH}{HO} = \ldots = k_3$, com $k_3 \in \mathbb{R}_+^*$

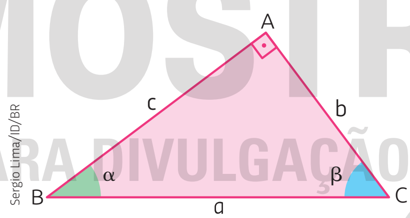
A constante k_3 relaciona a medida do cateto oposto ao ângulo α com a medida do cateto adjacente ao ângulo α dos triângulos retângulos. Essa constante recebe o nome de tangente do ângulo α, que indicamos por $\text{tg}\alpha$.

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha} \; (0° < \alpha < 90°)$$

Nesta coleção utilizaremos a notação *sen*, *cos* e *tg* para indicar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Geralmente, em calculadoras e em *softwares* matemáticos, é utilizada a notação internacional para indicar tais razões, respectivamente, *sin*, *cos* e *tan*.

Relação entre seno, cosseno e tangente

Considere o triângulo retângulo e as relações trigonométricas.



$\text{sen}\alpha = \dfrac{b}{a}$ $\quad \cos\alpha = \dfrac{c}{a}$ $\quad \text{tg}\alpha = \dfrac{b}{c}$

$\text{sen}\beta = \dfrac{c}{a}$ $\quad \cos\beta = \dfrac{b}{a}$ $\quad \text{tg}\beta = \dfrac{c}{b}$

- Como $\text{sen}\alpha = \cos\beta$, $\text{sen}\beta = \cos\alpha$ e os ângulos α e β são complementares $(\alpha + \beta = 90°)$, temos que o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de seu complementar e vice-versa.

- Ao dividir a razão trigonométrica $\text{sen}\alpha$ por $\cos\alpha$, temos:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

Como $\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{b}{c}$ e $\text{tg}\alpha = \dfrac{b}{c}$, logo $\boxed{\text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \; (0° < \alpha < 90°)}$.

- Ao adicionar o quadrado das razões trigonométricas senα e cosα, temos:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

De acordo com o teorema de Pitágoras, temos $a^2 = b^2 + c^2$.
Substituindo $b^2 + c^2$ por a^2, segue que:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1, \text{ isto é, } \boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \ (0° < \alpha < 90°)}$$

Essa relação é chamada **relação fundamental do triângulo retângulo**.

Valores do seno, do cosseno e da tangente

Para resolver certas situações que envolvem razões trigonométricas é necessário conhecer o valor correspondente ao seno, ao cosseno ou à tangente de determinados ângulos. A tabela trigonométrica a seguir apresenta valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente de ângulos inteiros, cujas medidas variam de 1° a 89°.

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175	31°	0,5150	0,8572	0,6009	61°	0,8746	0,4848	1,8040
2°	0,0349	0,9994	0,0349	32°	0,5299	0,8480	0,6249	62°	0,8829	0,4695	1,8807
3°	0,0523	0,9986	0,0524	33°	0,5446	0,8387	0,6494	63°	0,8910	0,4540	1,9626
4°	0,0698	0,9976	0,0699	34°	0,5592	0,8290	0,6745	64°	0,8988	0,4384	2,0503
5°	0,0872	0,9962	0,0875	35°	0,5736	0,8192	0,7002	65°	0,9063	0,4226	2,1445
6°	0,1045	0,9945	0,1051	36°	0,5878	0,8090	0,7265	66°	0,9135	0,4067	2,2460
7°	0,1219	0,9925	0,1228	37°	0,6018	0,7986	0,7536	67°	0,9205	0,3907	2,3559
8°	0,1392	0,9903	0,1405	38°	0,6157	0,7880	0,7813	68°	0,9272	0,3746	2,4751
9°	0,1564	0,9877	0,1584	39°	0,6293	0,7771	0,8098	69°	0,9336	0,3584	2,6051
10°	0,1736	0,9848	0,1763	40°	0,6428	0,7660	0,8391	70°	0,9397	0,3420	2,7475
11°	0,1908	0,9816	0,1944	41°	0,6561	0,7547	0,8693	71°	0,9455	0,3256	2,9042
12°	0,2079	0,9781	0,2126	42°	0,6691	0,7431	0,9004	72°	0,9511	0,3090	3,0777
13°	0,2250	0,9744	0,2309	43°	0,6820	0,7314	0,9325	73°	0,9563	0,2924	3,2709
14°	0,2419	0,9703	0,2493	44°	0,6947	0,7193	0,9657	74°	0,9613	0,2756	3,4874
15°	0,2588	0,9659	0,2679	45°	0,7071	0,7071	1,0000	75°	0,9659	0,2588	3,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	46°	0,7193	0,6947	1,0355	76°	0,9703	0,2419	4,0108
17°	0,2924	0,9563	0,3057	47°	0,7314	0,6820	1,0724	77°	0,9744	0,2250	4,3315
18°	0,3090	0,9511	0,3249	48°	0,7431	0,6691	1,1106	78°	0,9781	0,2079	4,7046
19°	0,3256	0,9455	0,3443	49°	0,7547	0,6561	1,1504	79°	0,9816	0,1908	5,1446
20°	0,3420	0,9397	0,3640	50°	0,7660	0,6428	1,1918	80°	0,9848	0,1736	5,6713
21°	0,3584	0,9336	0,3839	51°	0,7771	0,6293	1,2349	81°	0,9877	0,1564	6,3138
22°	0,3746	0,9272	0,4040	52°	0,7880	0,6157	1,2799	82°	0,9903	0,1392	7,1154
23°	0,3907	0,9205	0,4245	53°	0,7986	0,6018	1,3270	83°	0,9925	0,1219	8,1443
24°	0,4067	0,9135	0,4452	54°	0,8090	0,5878	1,3764	84°	0,9945	0,1045	9,5144
25°	0,4226	0,9063	0,4663	55°	0,8192	0,5736	1,4281	85°	0,9962	0,0872	11,4301
26°	0,4384	0,8988	0,4877	56°	0,8290	0,5592	1,4826	86°	0,9976	0,0698	14,3007
27°	0,4540	0,8910	0,5095	57°	0,8387	0,5446	1,5399	87°	0,9986	0,0523	19,0811
28°	0,4695	0,8829	0,5317	58°	0,8480	0,5299	1,6003	88°	0,9994	0,0349	28,6363
29°	0,4848	0,8746	0,5543	59°	0,8572	0,5150	1,6643	89°	0,9998	0,0175	57,2900
30°	0,5000	0,8660	0,5774	60°	0,8660	0,5000	1,7321				

> [...] presumivelmente durante a segunda metade do segundo século a.C., foi compilada a que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica pelo astrônomo Hiparco de Niceia (por volta de 180-125 a.C.), que assim ganhou o direito de ser chamado "o pai da trigonometria". [...]

BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 118.

Ângulos notáveis

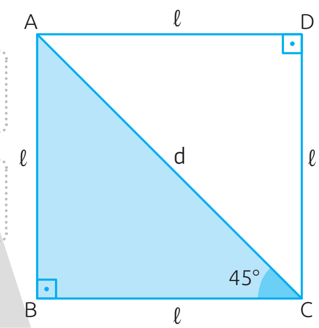
Os ângulos com medidas de 30°, 45° e 60° são nomeados de ângulos notáveis, pois aparecem com frequência no estudo da Trigonometria. Veremos a seguir como determinar o valor correspondente ao seno, ao cosseno e à tangente dos ângulos notáveis.

- Para determinarmos o seno, o cosseno e a tangente de 45°, consideraremos inicialmente um quadrado *ABCD* de lado ℓ e diagonal *d*.

  Utilizando o teorema de Pitágoras temos:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2 \Rightarrow d = \ell\sqrt{2}$$

  Considerando o triângulo *ABC*, temos:



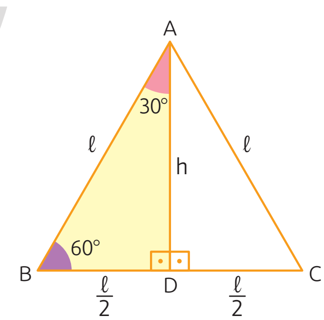
$$\text{sen}45° = \frac{\ell}{d} = \frac{\cancel{\ell}}{\cancel{\ell}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\text{sen}45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos45° = \frac{\ell}{d} = \frac{\cancel{\ell}}{\cancel{\ell}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\text{tg}45° = \frac{\ell}{\ell} = 1 \Rightarrow \boxed{\text{tg}45° = 1}$$

- Para determinarmos o seno, o cosseno e a tangente de 30° e 60°, consideraremos inicialmente um triângulo equilátero *ABC* de lado ℓ e altura *h*.

  Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

$$\ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

  Considerando o triângulo *ABD*, podemos escrever:

$$\text{sen}30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\cancel{\ell}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{\ell}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\text{sen}30° = \frac{1}{2}}$$

$$\cos30° = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell} \Rightarrow \boxed{\cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{tg}30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{h} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{\ell}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{\ell}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{\text{tg}30° = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Utilizando as relações $\text{sen}\alpha = \cos\beta$ para ângulos α e β complementares e $\text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ $\left(0° < \alpha < 90°\right)$, segue que:

$$\text{sen}60° = \cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\text{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos60° = \text{sen}30° = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\cos60° = \frac{1}{2}}$$

$$\text{tg}60° = \frac{\text{sen}60°}{\cos60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\text{tg}60° = \sqrt{3}}$$

Podemos organizar os resultados obtidos com os ângulos notáveis da maneira apresentada abaixo.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

R4. Seja β o ângulo agudo de um triângulo retângulo tal que $\cos\beta = \frac{4}{5}$. Qual o valor de $\text{sen}\beta$? E de $\text{tg}\beta$?

Resolução

Substituindo o valor de $\cos\beta$ na relação trigonométrica fundamental, temos que:

$$\text{sen}^2\beta + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\beta + \frac{16}{25} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\beta = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \text{sen}^2\beta = \frac{9}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}\beta = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow \text{sen}\beta = \pm\frac{3}{5}$$

Como β é um ângulo agudo, então $\text{sen}\beta = \frac{3}{5}$, pois o seno e o cosseno de ângulos agudos são positivos .

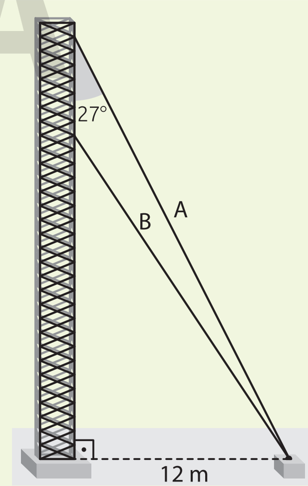
Agora, vamos utilizar os valores de seno e cosseno para determinar a tangente de β.

$$\text{tg}\beta = \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \text{tg}\beta = \frac{3}{4}$$

Portanto, temos que $\text{sen}\beta = \frac{3}{5}$ e $\text{tg}\beta = \frac{3}{4}$.

R5. Na imagem ao lado está representada parte do projeto de uma torre estaiada.

Torre estaiada: torre sustentada por cabos, os quais são ligados à torre e em pontos no chão.



Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

Os cabos indicados na imagem são ligados em diferentes pontos na torre e a um mesmo ponto no solo.

a) Qual o comprimento do cabo **A** indicado na imagem?

b) A que altura o cabo **A** foi preso na torre?

c) Sabendo que o cabo **B** foi preso na torre 6 m abaixo do cabo **A**, calcule:

- o comprimento do cabo **B**;
- a medida aproximada do ângulo que o cabo **B** faz com a torre.

Resolução

a) Podemos determinar o comprimento do cabo **A** utilizando sen27°. Pela tabela trigonométrica, sen27° $\simeq$ 0,454. Desse modo:

$$\text{sen}27° = \frac{12}{x} \Rightarrow x \cdot \text{sen}27° = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{12}{\text{sen}27°} \Rightarrow x \simeq \frac{12}{0{,}454} \Rightarrow x \simeq 26{,}4$$

Portanto, o cabo **A** mede aproximadamente 26,4 m.

b) Vamos determinar a altura h de fixação do cabo **A** na torre utilizando tg27°. Na tabela trigonométrica, verificamos que tg27° $\simeq$ 0,5094.

Com isso, temos:

$$\text{tg}27° = \frac{12}{h} \Rightarrow h \cdot \text{tg}27° = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{12}{\text{tg}27°} \Rightarrow h \simeq \frac{12}{0{,}5094} \Rightarrow h \simeq 23{,}6$$

Portanto, o cabo **A** está fixado na torre a aproximadamente 23,6 m.

c) • Seja y a altura em que o cabo **B** foi fixado na torre. Podemos determinar o valor de y calculando a diferença entre a altura de fixação do cabo **A** na torre e a distância entre esse ponto e o ponto em que o cabo foi preso.

Assim, tem-se $y = 23{,}6 - 6 = 17{,}6$.

Conclui-se que o cabo **B** foi fixado na torre a uma altura de aproximadamente 17,6 m.

Agora, para determinar o comprimento c do cabo **B**, vamos utilizar o teorema de Pitágoras.

$$c^2 = 17{,}6^2 + 12^2 \Rightarrow c^2 = 309{,}76 + 144 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 453{,}76 \Rightarrow c \simeq 21{,}3$$

Portanto, o comprimento do cabo é de aproximadamente 21,3 m.

• Seja α a medida do ângulo formado entre o cabo **B** e a torre. Podemos determinar α utilizando o valor do seno e verificando na tabela qual ângulo tem o seno mais próximo do valor encontrado.

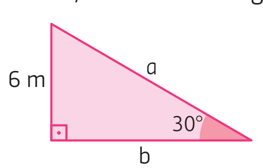
$$\text{sen}\alpha = \frac{12}{21{,}3} \simeq 0{,}5633$$

Consultando a tabela, observamos que o ângulo cujo seno mais se aproxima desse valor é o ângulo de medida 34°. Logo, $\alpha \simeq 34°$.

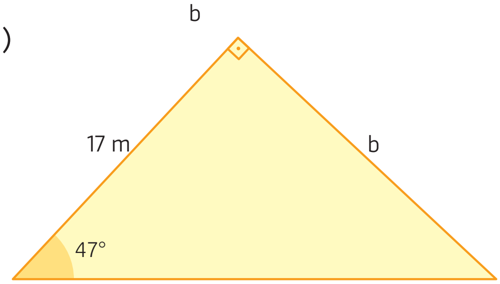
Atividades

10. Nos triângulos abaixo, determine a medida aproximada de cada um de seus lados. Para os ângulos não notáveis, use a tabela trigonométrica.

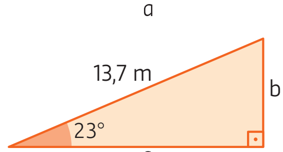
a)



b)



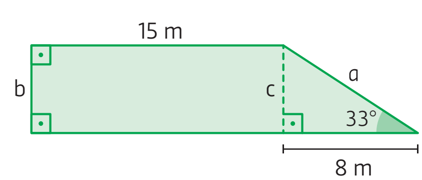
c)



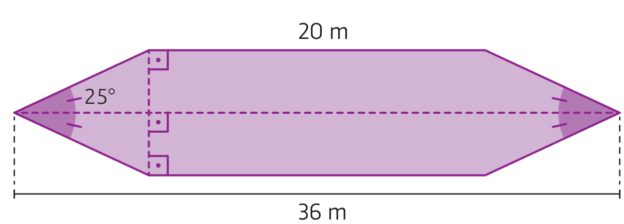
Ilustrações: Sergio Lima/ ID/BR

11. O perímetro de um polígono é a soma das medidas de seus lados. Determine o perímetro aproximado das figuras abaixo, em metros, utilizando aproximação de uma casa decimal, quando necessário.

a)



b)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

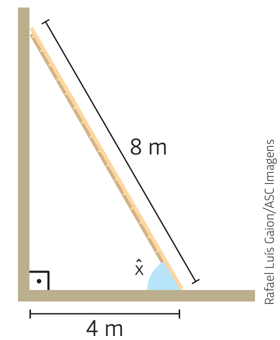
12. Dados sen60° $\simeq$ 0,8660, cos23° $\simeq$ 0,9205 e tg39° $\simeq$ 0,8098, calcule:

a) cos30° b) sen67° c) tg51°

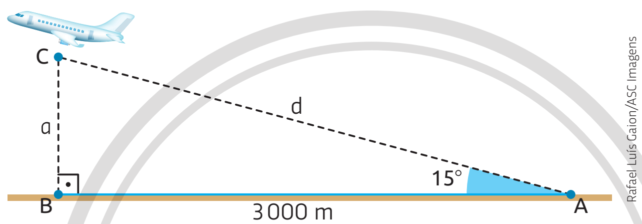
13. Para garantir maior segurança ao utilizar uma escada de mão, a medida do ângulo de inclinação entre o solo e o pé da escada deve estar entre 70,5° e 75,5°. Um homem deseja subir em uma escada de 8 m e decide apoiá-la a uma distância de 4 m de uma parede.

a) Qual é a medida do ângulo de inclinação entre a base da escada e o solo?

b) É seguro para esse homem apoiar a escada a essa distância? Justifique.



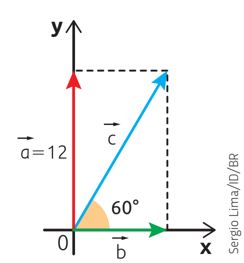
14. Um avião decola a partir do ponto **A** formando um ângulo de subida medindo 15°. Uma pessoa em **B** observa o avião passar acima de sua cabeça, conforme figura abaixo. (Utilize apenas uma casa decimal para a distância e a altura.)



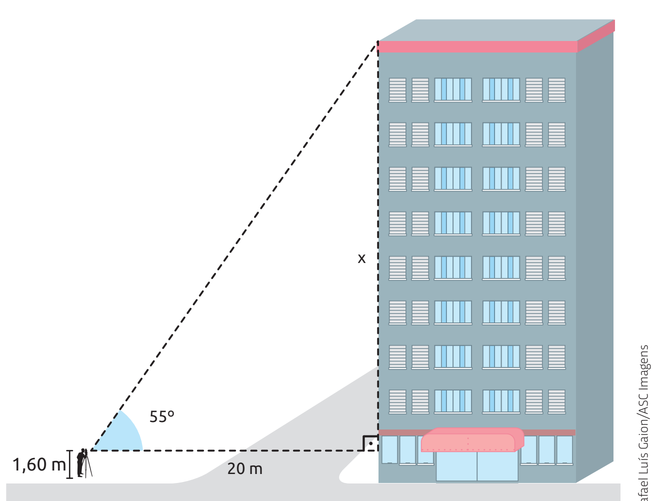
a) Que distância aproximada do ponto de partida o avião terá percorrido em linha reta ao passar acima da pessoa?

b) A que altura ele estará verticalmente em relação ao ponto de partida **A**?

15. Um vetor é representado por um segmento de reta orientado, caracterizado por um comprimento, uma direção e um sentido. Calcule os comprimentos dos vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$, denotados por $|\vec{b}|$ e $|\vec{c}|$, respectivamente, sabendo que $|\vec{a}| = 12$ e $\alpha = 60°$, como indicado na figura. (Utilize $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$.)



16. Um topógrafo observa um edifício do outro lado da rua utilizando um teodolito. O teodolito está posicionado a 1,60 m do chão e a distância entre o prédio e a pessoa é de 20 m, conforme esquema.

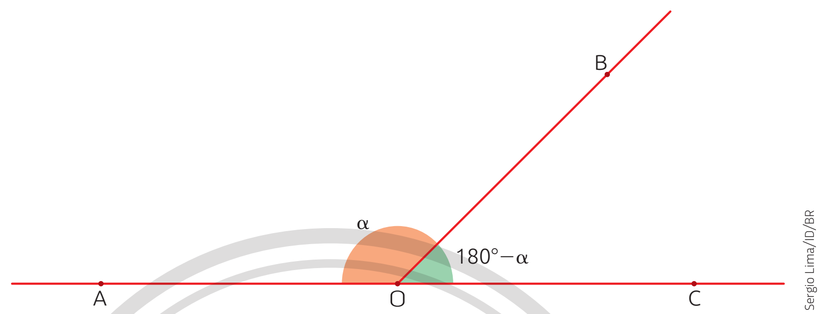


Qual é a altura aproximada desse prédio?

Relações trigonométricas em um triângulo qualquer

Vimos anteriormente as relações trigonométricas envolvendo seno, cosseno e tangente de ângulos agudos associados a triângulos retângulos. Agora, veremos relações trigonométricas associadas a triângulos quaisquer, envolvendo seno e cosseno de ângulos cuja medida está entre 90° e 180°.

Antes de determinarmos os valores correspondentes de seno ou cosseno de ângulos quaisquer, considere um ângulo obtuso $A\hat{O}B = \alpha \left(90° < \alpha < 180°\right)$.



Considere as seguintes afirmações:

- O seno de um ângulo obtuso é igual ao seno de seu suplementar.

$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\left(180° - \alpha\right)$$

- O cosseno de um ângulo obtuso é igual ao oposto do cosseno de seu suplementar.

$$\cos\alpha = -\cos\left(180° - \alpha\right)$$

Essas relações podem ser demonstradas e serão estudadas com mais detalhes nos próximos volumes desta coleção.

Veja os exemplos:

a) $\text{sen}\,120° = \text{sen}\left(180° - 120°\right) = \text{sen}\,60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 135° = -\cos\left(180° - 135°\right) = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{sen}\,162° = \text{sen}\left(180° - 162°\right) = \text{sen}\,18° \simeq 0{,}309$

d) $\cos 99° = -\cos\left(180° - 99°\right) = -\cos 81° \simeq -0{,}1564$

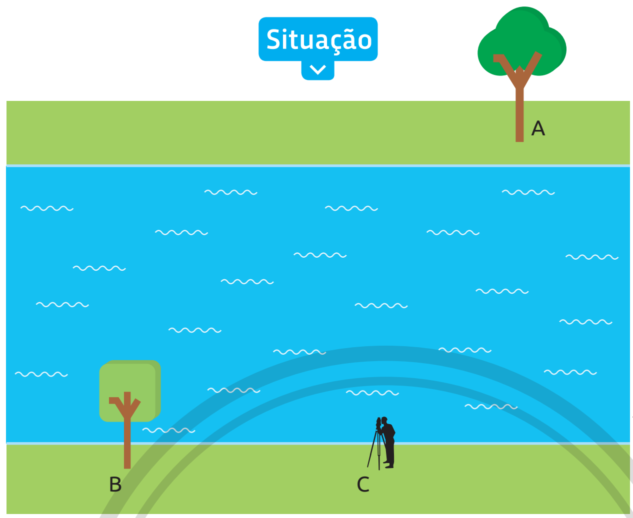
Os valores de $\text{sen}\,18°$ e de $\cos 81°$ foram obtidos consultando a tabela trigonométrica apresentada anteriormente.

Definimos o seno e o cosseno para o caso particular de um ângulo de medida 90°, nesse caso, $\text{sen}\,90° = 1$ e $\cos 90° = 0$.

Lei dos senos

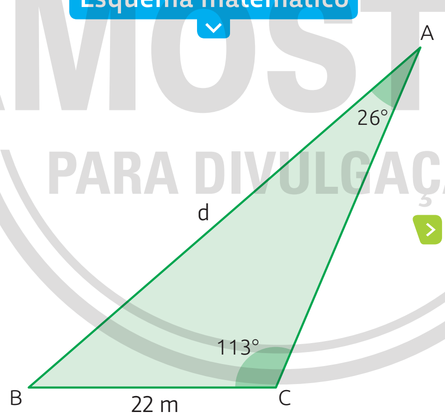
Para determinar a distância aproximada entre duas árvores que servirão de hastes na construção de uma tirolesa, um engenheiro posicionou-se a 22 m da árvore mais próxima e mediu o ângulo de sua visão em relação às árvores, obtendo 113°. Mediu também o ângulo formado entre ele, a árvore mais distante e a árvore mais próxima a ele, obtendo 26°.

Situação



Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

Esquema matemático

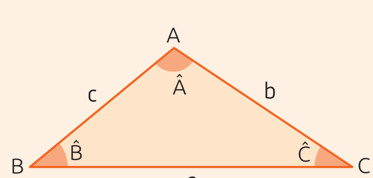


O que é um triângulo obtusângulo?

Conforme o esquema, é necessário determinar a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo obtusângulo *ABC*. Para isso, podemos utilizar a **lei dos senos**.

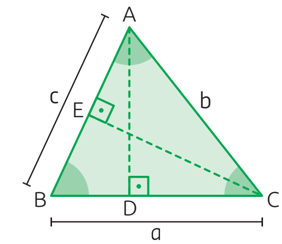
Dado um triângulo qualquer *ABC*, as medidas de seus lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos correspondentes:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Vamos demonstrar a validade da lei dos senos para triângulos acutângulos, ou seja, triângulos que possuem os ângulos internos agudos, considerando o triângulo *ABC* e duas de suas alturas:



No triângulo *BCE*, temos $\text{sen}\hat{B} = \dfrac{EC}{a} \Rightarrow EC = a \cdot \text{sen}\hat{B}$.

No triângulo *ACE*, temos $\text{sen}\hat{A} = \dfrac{EC}{b} \Rightarrow EC = b \cdot \text{sen}\hat{A}$.

Comparando essas duas igualdades, tem-se:

$$a \cdot \text{sen}\hat{B} = b \cdot \text{sen}\hat{A} \Rightarrow \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{a}{\text{sen}\hat{A}} \qquad \text{(I)}$$

No triângulo *ABD*, temos $\text{sen}\hat{B} = \dfrac{AD}{c} \Rightarrow AD = c \cdot \text{sen}\hat{B}$.

No triângulo *ACD*, temos $\text{sen}\hat{C} = \dfrac{AD}{b} \Rightarrow AD = b \cdot \text{sen}\hat{C}$.

- Comparando essas duas igualdades, tem-se:

$$c \cdot \text{sen}\hat{B} = b \cdot \text{sen}\hat{C} \Rightarrow \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \qquad \text{(II)}$$

Das relações **I** e **II**, temos $\dfrac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen}\hat{C}}$, como queríamos demostrar.

Também é possível realizar a demonstração da lei dos senos para triângulos obtusângulos e para triângulos retângulos.

Utilizando a lei dos senos para resolver a situação do início deste tópico, temos:

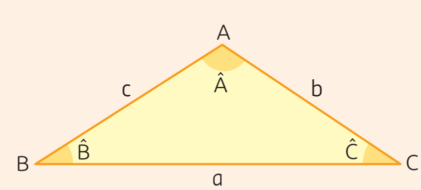
$$\frac{d}{\text{sen}113°} = \frac{22}{\text{sen}26°} \Rightarrow d = \frac{22 \cdot \overbrace{\text{sen}67°}^{\text{sen}(180° - 113°)}}{\text{sen}26°} \Rightarrow d \simeq \frac{22 \cdot 0{,}9205}{0{,}4384}$$

Portanto, a distância aproximada entre as duas árvores mede 46,19 m.

Lei dos cossenos

Em situações envolvendo triângulos quaisquer, em que se conhece a medida de dois lados e a medida do ângulo formado por eles, e pretende-se determinar a medida do terceiro lado, podemos utilizar a **lei dos cossenos**, que diz:

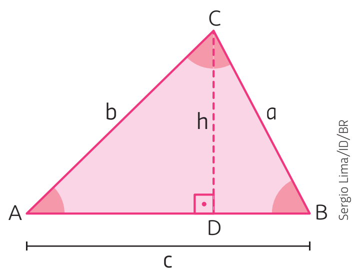
Dado um triângulo qualquer *ABC*, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, subtraída do dobro do produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}$

Vamos demonstrar a validade da lei dos cossenos para triângulos acutângulos considerando o triângulo *ABC* e uma de suas alturas:



No triângulo *ACD*, temos:

- $\cos\hat{A} = \dfrac{AD}{b} \Rightarrow AD = b \cdot \cos\hat{A}$

- $b^2 = (AD)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - (AD)^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - \left(b \cdot \cos\hat{A}\right)^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - b^2 \cdot \cos^2\hat{A}$ (I)

No triângulo *BCD*, temos:

- $a^2 = h^2 + (BD)^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + (c - AD)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(c - b \cdot \cos\hat{A}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = a^2 - \left(c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A} + b^2 \cdot \cos^2\hat{A}\right) \Rightarrow h^2 = a^2 - c^2 + 2bc \cdot \cos\hat{A} - b^2 \cdot \cos^2\hat{A}$ (II)

Das relações **I** e **II**, temos:

$$b^2 - \cancel{b^2 \cdot \cos^2\hat{A}} = a^2 - c^2 + 2bc \cdot \cos\hat{A} - \cancel{b^2 \cdot \cos^2\hat{A}} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$$

como queríamos demostrar.

De maneira semelhante é possível obter as demais expressões enunciadas.

Também é possível realizar a demonstração da lei dos cossenos para triângulos obtusângulos e para triângulos retângulos de maneira análoga à apresentada.

Área de um triângulo

Toda linha poligonal fechada e simples é chamada **polígono**. Quando falamos em determinar a área de um polígono, estamos levando em consideração os seus lados e a sua região interna.

O triângulo é um polígono que possui três lados. Provavelmente você já aprendeu em anos anteriores que a área de um triângulo pode ser obtida utilizando a expressão $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$, em que *b* representa a medida de um dos lados e *h* a medida correspondente à altura relativa a esse lado. Agora, veremos uma maneira de calcular a área de um triângulo conhecendo a medida de dois lados e a medida do ângulo formado por eles.

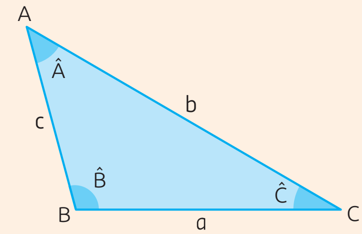
Em geometria, a palavra polígono pode ser utilizada tanto para indicar uma figura composta apenas por seus lados (contorno) quanto para indicar os lados mais a região interna a esse contorno.

Dado um triângulo qualquer *ABC*, sua área é dada pelo semiproduto das medidas de dois lados quaisquer pelo seno do ângulo formado por eles.

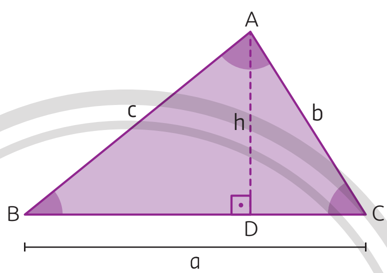
$$A = \frac{ab \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{2}$$

$$A = \frac{ac \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}{2}$$

$$A = \frac{bc \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{2}$$



Vamos demonstrar a validade dessas expressões para triângulos acutângulos considerando o triângulo *ABC* e uma de suas alturas.



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

No triângulo *ABD*, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$$

Como a área do triângulo pode ser determinada por meio da expressão $A = \frac{a \cdot h}{2}$, segue que:

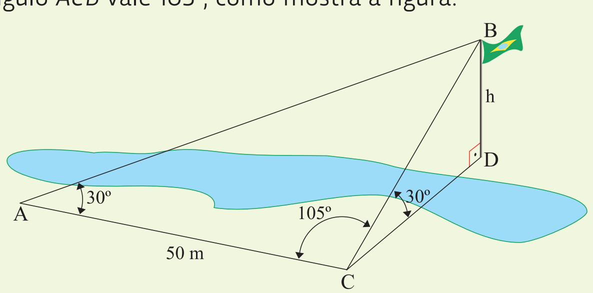
$$A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \left(c \cdot \operatorname{sen}\hat{B}\right)}{2} \Rightarrow A = \frac{ac \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}{2}$$

De maneira semelhante, é possível obter as demais expressões enunciadas.

Também é possível realizar a demonstração da área de um triângulo para triângulos obtusângulos e para triângulos retângulos.

Atividades resolvidas

R6. (Unesp) Uma pessoa se encontra no ponto *A* de uma planície, às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo do mastro de uma bandeira, ponto *B*. Com o objetivo de determinar a altura *h* do mastro, ela anda, em linha reta, 50 m para a direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto *C*. Sendo *D* o pé do mastro, avalia que os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}D$ valem 30°, e o ângulo $A\hat{C}B$ vale 105°, como mostra a figura.



Unesp/ID/BR/Fac-símile:ID/BR

A altura *h* do mastro da bandeira, em metros, é:

a) 12,5 b) $12{,}5\sqrt{2}$ c) 25,0 d) $25{,}0\sqrt{2}$ e) 35,0

Resolução

Para resolver este problema podemos aplicar a lei dos senos nos dois triângulos. Sendo assim, no triângulo *ABC* temos:

$$\frac{50}{\text{sen}45°} = \frac{BC}{\text{sen}30°} \Rightarrow BC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow BC\sqrt{2} = 50 \Rightarrow BC = 25\sqrt{2}$$

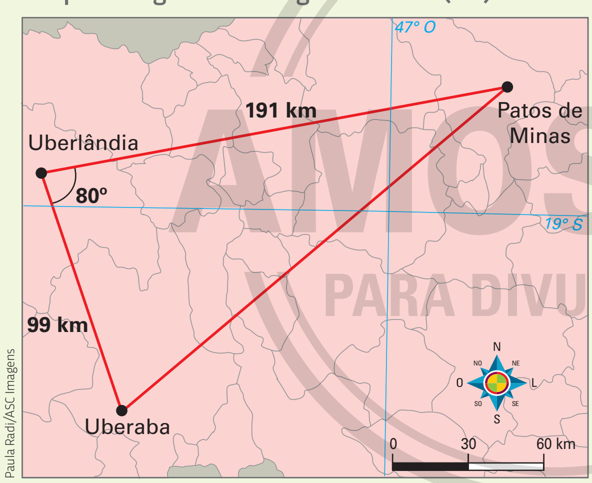
E no triângulo *BCD*, calculamos:

$$\text{sen}30° = \frac{h}{25\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{25\sqrt{2}} \Rightarrow h = 12{,}5\sqrt{2}$$

Portanto, a alternativa correta é **b**.

R7. O Triângulo Mineiro é uma das regiões mais ricas de Minas Gerais, tendo sua economia voltada para o agronegócio. A região tem como limites os rios Grande e Paranaíba e as três cidades mais populosas dessa região são Patos de Minas, Uberaba e Uberlândia. Observe no mapa abaixo a localização dessas cidades e o triângulo formado pelas linhas retas que ligam cada uma delas.

Mapa da região do Triângulo Mineiro (MG) – 2015



Paula Radi/ASC Imagens

Fonte de pesquisa: IBGE. Disponível em: <www.cidades.ibge.gov.br/xtras/uf.php?lang&coduf=31&search=minas-gerais>. Acesso em: 5 set. 2015.

Fonte de pesquisa: Anatel. Disponível em: <http://sistemas.anatel.gov.br/apoio_sitarweb/Tabelas/Municipio/DistanciaDoisPontos/Tela.asp>. Acesso em: 5 set. 2015.

Tendo os dados da imagem, determine a distância aproximada em linha reta de Uberaba a Patos de Minas.

Resolução

Para calcular a distância em linha reta entre Uberaba e Patos de Minas vamos utilizar a lei dos cossenos. Sendo *x* a distância entre as cidades, temos:

$$x^2 = 191^2 + 99^2 - 2 \cdot 191 \cdot 99 \cdot \cos 80°$$

$$x^2 = 36\,481 + 9\,801 - 37\,818 \cdot \cos 80°$$

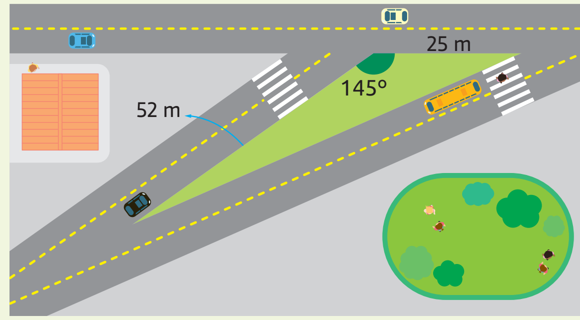
$$x \simeq \sqrt{46\,282 - 37\,818 \cdot 0{,}1736}$$

$$x \simeq \sqrt{39\,717} \Rightarrow x \simeq 199{,}29$$

Portanto, a distância em linha reta entre Uberaba e Patos de Minas é aproximadamente 199,29 km.

Atividades resolvidas

R8. A prefeitura de certa cidade vai construir uma praça com um jardim em um terreno com formato triangular formado por três ruas. Observe na imagem ao lado o formato do terreno em que será construído o jardim, juntamente com algumas medidas.



Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

Sabendo que a empresa contratada vai cobrar um valor de R$ 25,00 por metro quadrado de jardim, responda:

a) Qual é a área da região em que será construído o jardim?

b) Qual será o valor cobrado na construção desse jardim?

Resolução

a) Sendo A a área da região, temos:

$$A = \frac{52 \cdot 25 \cdot \text{sen}145°}{2} = \frac{52 \cdot 25 \cdot \overbrace{\text{sen}35°}^{\text{sen}35° = \text{sen}(180° - 35°) = \text{sen}145°}}{2} \simeq \frac{1300 \cdot 0{,}5}{2} = \frac{745{,}68}{2} = 372{,}84$$

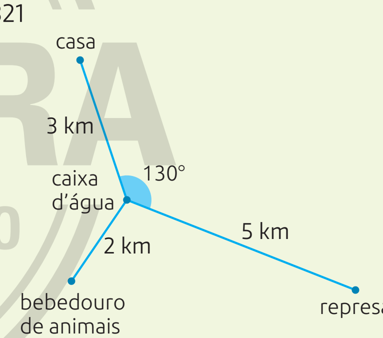
Portanto, a área dessa região é de aproximadamente 372,84 m^2.

b) O valor V cobrado na construção do jardim é dado por:

$$V = 372{,}84 \cdot 25 = 9\,321$$

Portanto, o valor cobrado será R$ 9 321,00.

R9. Em determinada fazenda, a água é bombeada de uma represa até uma caixa-d'agua. Dali, é bombeada para uma casa e para um reservatório que serve de bebedouro para animais. Observe ao lado um esquema onde estão indicadas algumas medidas desse sistema.



Sergio Lima/ID/BR

a) Qual é a distância aproximada, em linha reta, entre a represa de onde a água é bombeada e a casa?

b) Sabendo que a distância em linha reta entre a casa e o bebedouro de animais é de 4,5 km, calcule a medida α do ângulo formado entre os caminhos da casa à caixa-d'agua e da caixa-d'agua ao bebedouro de animais.

Resolução

a) Para calcular a distância x entre a casa e a represa vamos utilizar a lei dos cossenos.

$$x^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 130°$$

$$x^2 = 9 + 25 - 30 \cdot \left[-\cos(180° - 130°)\right]$$

$$x^2 = 34 - 30 \cdot (-\cos 50°)$$

$$x \simeq \sqrt{34 + 30 \cdot 0{,}6428}$$

$$x \simeq \sqrt{53{,}284} \Rightarrow x \simeq 7{,}3$$

Portanto, a distância em linha reta entre a casa e a represa é de aproximadamente 7,3 km.

b) Vamos calcular a medida do ângulo α utilizando a lei dos cossenos:

$$4{,}5^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\alpha$$

$$20{,}25 = 9 + 4 - 12 \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{20{,}25 - 13}{-12}$$

$$\cos\alpha \simeq -0{,}6042$$

$$-\cos(180° - \alpha) \simeq -0{,}6042$$

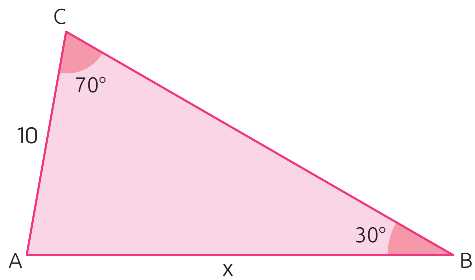
$$180° - \alpha \simeq 53°$$

$$\alpha \simeq 127°$$

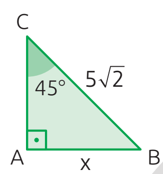
Portanto, a medida do ângulo é de aproximadamente 127°.

17. Ferramentas Determine o valor de x. Considere as medidas dos lados dos triângulos em centímetros.

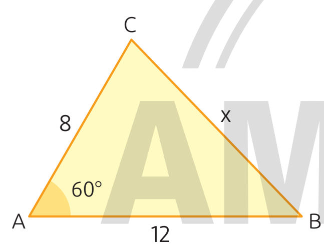
a)



b)

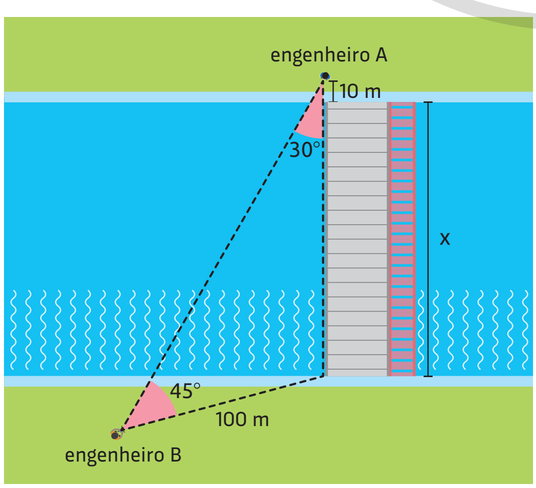


c)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

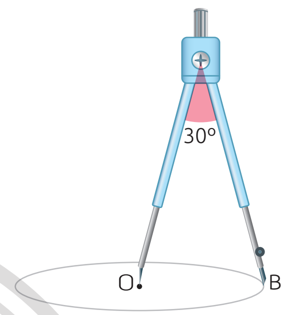
18. Dois engenheiros estão realizando o estudo de uma área para a construção de uma ponte. O engenheiro **A** está de um lado do rio e o engenheiro **B** está do outro lado, a 100 m de onde a ponte será construída, como mostra o esquema.



Ronaldo Lucena/ASC Imagens

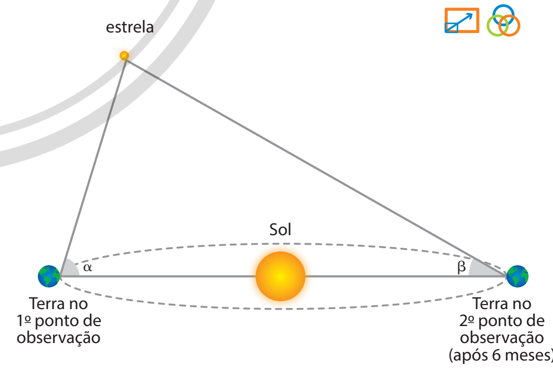
Qual será o comprimento da ponte? (Considere $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$.)

19. Definimos o diâmetro de uma circunferência como qualquer corda que intersecta o centro da circunferência. Considere a circunferência abaixo feita a partir de um compasso com abertura de 30°. Sabendo que o diâmetro da circunferência é 10 cm, determine o comprimento da haste desse compasso, desde a ponta seca até o parafuso de fixação. (Considere $\text{sen}75° \simeq 0{,}9659$.)



Eduardo dos Santos/ASC Imagens

20. Em grupo Para determinar a distância entre a Terra e uma estrela pode-se utilizar o processo de triangulação, que é aplicado apenas para estrelas relativamente próximas. Esse processo consiste em registros fotográficos da estrela em diferentes pontos de observação. Esses registros devem ser realizados num intervalo de tempo de seis meses, pois este é o tempo necessário para a Terra completar meia órbita em torno do Sol.

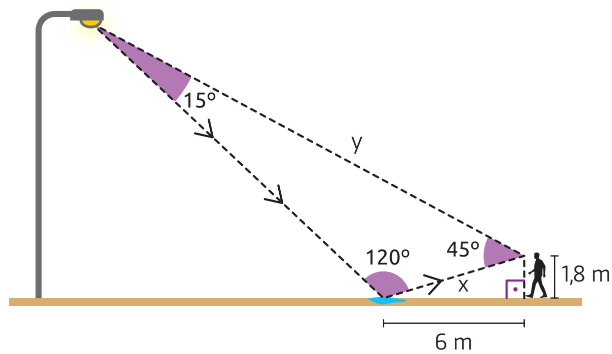


Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

Para a compreensão desse método de uma maneira mais simples, posicionem um de seus dedos na frente do rosto e fechem o olho direito. Em seguida fechem apenas o olho esquerdo. Percebam que seu dedo deslocou-se com relação ao plano de fundo.

Com base nessas informações e conhecendo os ângulos α, β e a distância entre o primeiro ponto de observação e o segundo, qual relação trigonométrica vocês utilizariam para calcular a distância entre uma estrela e a Terra? Justifiquem.

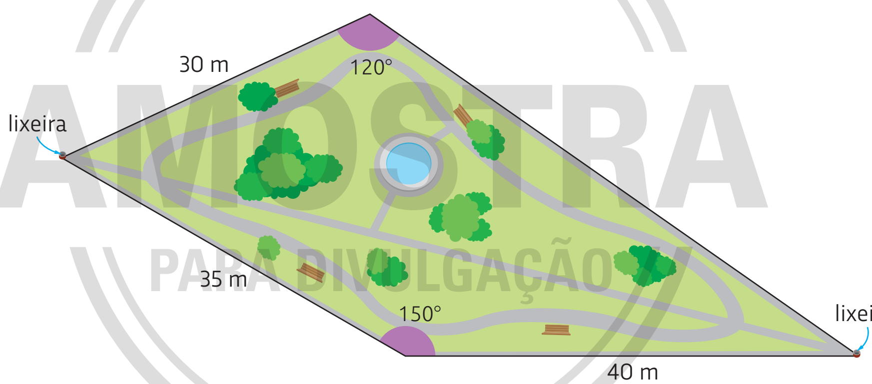
21. Os raios de luz emitidos pela lâmpada de um poste refletem em uma poça e também nos olhos de uma pessoa, como mostra a imagem. (Considere $\text{sen}15° \simeq 0{,}259$.)



Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

Verifique a que distância *x* da poça e a que distância *y* da lâmpada do poste estão posicionados os olhos dessa pessoa.

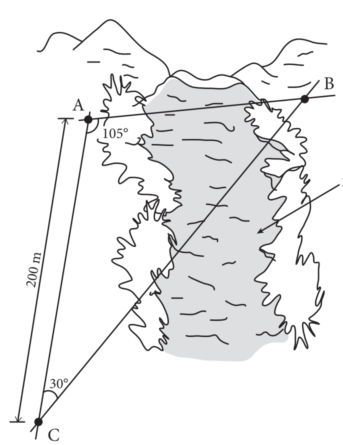
22. A imagem abaixo representa o esquema de uma praça em forma de um quadrilátero. As lixeiras, representadas na imagem, estão nas extremidades da praça a uma distância, uma da outra, de aproximadamente 72,5 metros.



Sergio Lima/ASC Imagens

Utilizando uma calculadora e aproximando os senos, cossenos e raízes com duas casas decimais, determine a área da praça.

23. (UFPB) A prefeitura de certa cidade vai construir, sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar dois pontos, *A* e *B*, localizados nas margens opostas do rio. Para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto, *C*, distante 200 m do ponto *A* e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto *A*. Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que os ângulos $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ mediam, respectivamente, 30° e 105°, conforme ilustrado na figura ao lado.

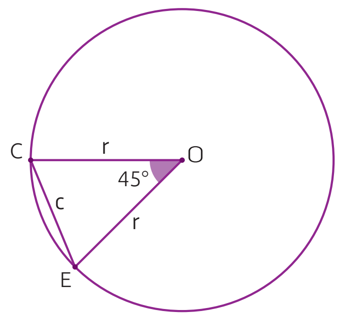


UFPB/Fac-símile: ID/BR

Com base nessas informações, é correto afirmar que a distância, em metros, do ponto *A* ao ponto *B* é de:

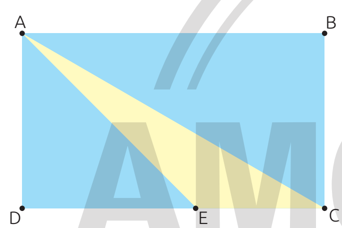
a) $200\sqrt{2}$ b) $180\sqrt{2}$ c) $150\sqrt{2}$ d) $100\sqrt{2}$ e) $50\sqrt{2}$

24. Considere uma circunferência de centro O, raio r e uma corda c, como mostra a figura. Determine o valor de c em função de r.



Sergio Lima/ID/BR

25. (UERJ) Considere uma placa retangular $ABCD$ de acrílico, cuja diagonal $\overline{AC}$ mede 40 cm. Um estudante, para construir um par de esquadros, fez dois cortes retos nessa placa nas direções $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{AC}$, de modo que $\text{med}(D\hat{A}E) = 45°$ e $\text{med}(B\hat{A}C) = 30°$, conforme ilustrado a seguir:



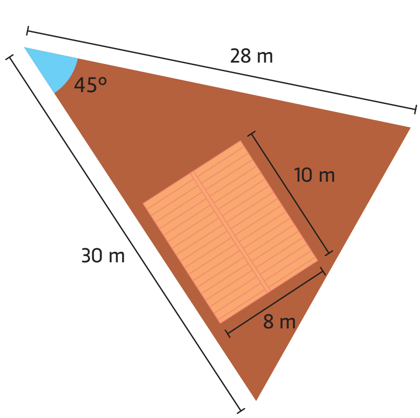
UERJ/Fac-símile: ID/BR

Após isso, o estudante descartou a parte triangular CAE, restando os dois esquadros.

Admitindo que a espessura do acrílico seja desprezível e que $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$, a área, em cm^2, do triângulo CAE equivale a:

a) 80   b) 100   c) 140   d) 180

26. Onofre construiu sua casa em um terreno triangular e agora ele quer plantar grama no restante do terreno. Veja a representação da casa e do terreno.



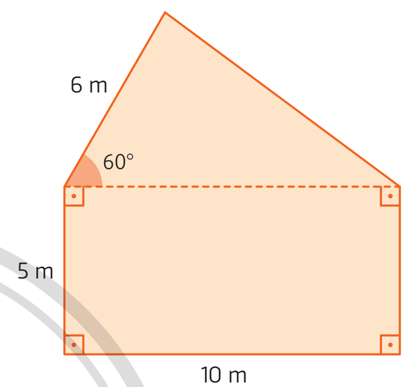
Rafael Luís Gaion/ASC Imagens

Qual é a área livre para Onofre plantar grama?

27. Sabendo que a área de um triângulo ABC é igual a $4\sqrt{3}$ cm^2, o ângulo em A mede 60° e a medida do lado $\overline{AB}$ é 4 cm, calcule a medida do lado $\overline{AC}$ desse triângulo.

28. A imagem abaixo é a representação da parede dos fundos de uma loja.

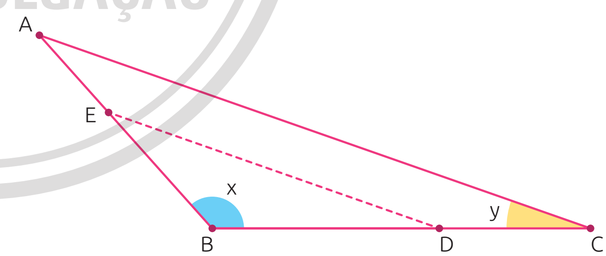
O dono da loja vai mudar a cor dessa parede e para calcular a quantidade de tinta necessária precisa calcular a sua área.



Sergio Lima/ID/BR

Sabendo que, nessa representação, a parede pode ser separada em uma forma triangular e outra retangular, determine sua área. (Considere $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$.)

29. Observe a figura a seguir, na qual as medidas de comprimento são dadas em metros.



Sergio Lima/ID/BR

Sabe-se que $\overline{AB}$ mede 34,3 m, $\overline{BC}$ mede 50 m, os ângulos x, entre $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, e y, entre $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, são tais que $\text{sen}\,x = \frac{3}{4}$ e $\text{sen}\,y = \frac{1}{3}$. Deseja-se construir um segmento de reta paralelo a $\overline{AC}$ ligando os pontos D e E.

a) Determine a medida de $\overline{AC}$.

b) Sabendo que $BD = 30$ m, determine a distância entre os pontos D e E.

30. Elabore uma atividade que envolva área de um triângulo. Troque com um colega para que ele resolva e, em seguida, corrija os cálculos dele.

31. Em dezembro de 1891, em Massachusetts (EUA), Luther Halsey Gullick, diretor de um colégio, pediu ao professor de educação física James Naismith para criar um jogo que não fosse violento e pudesse ser executado em local fechado. Assim foi criado o esporte conhecido hoje como basquetebol.

Até 2010, as áreas das quadras de basquetebol próximas da cesta eram em formato de trapézios isósceles e após 2010, as áreas restritivas passaram a ter formato de retângulo.

A fotografia abaixo é de uma quadra de basquetebol do modelo anterior a 2010.

Sergio Lima/ID/BR

Renata Mello/Pulsar Imagens

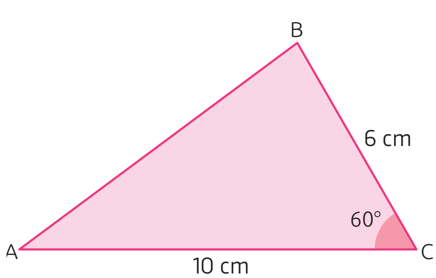
Jogadores disputando uma partida de basquetebol em cadeira de rodas durante os Jogos Parapan-Americanos de 2007, na Barra da Tijuca, Rio de Janeiro (RJ). A imagem no centro da quadra refere-se ao símbolo dos Jogos Parapan-Americanos.

O início do jogo de basquetebol acontece no círculo central da quadra, onde dois jogadores se posicionam e saltam para pegar a bola. Nas áreas em azul próximas às cestas, chamadas "áreas restritivas", um jogador oponente não pode permanecer por mais de 3 segundos consecutivos enquanto sua equipe estiver no controle com a bola. Essas regras valem também para os jogos de basquetebol paralímpicos, respeitando as devidas adequações para o uso da cadeira de rodas.

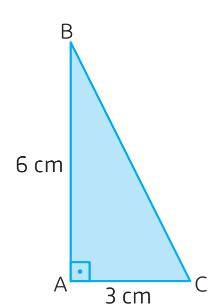
Usando uma calculadora, determine quanto mede, em metros quadrados, a área restritiva total da quadra de basquetebol.

32. Determine a área de cada triângulo. (Considere sen105° $\simeq$ 0,966.)

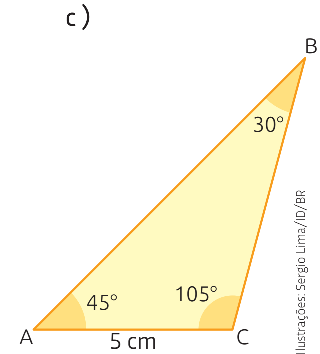
a)



b)



c)



Ilustrações: Sergio Lima/ID/BR

Verificando rota

1. O que é uma sequência?

2. O que é uma progressão aritmética (PA)?

3. Para quais valores da razão *r* uma progressão aritmética é considerada:

- crescente?
- decrescente?
- constante?

4. O que é uma progressão geométrica (PG)?

5. Em uma PG, a razão *q* pode assumir qualquer valor real? Se não, quais valores reais *q* pode assumir?

6. Podemos representar três termos consecutivos de uma PA de razão *r* da seguinte maneira: $(x - r, x, x + r)$. Sendo assim, represente três termos consecutivos de uma PG de razão *q* e cujo termo central seja *x*.

7. Para que a soma dos termos de uma PG infinita exista, a razão *q* deve pertencer a qual intervalo real?

8. Em Estatística, o que é população? E amostra?

9. Qual é a diferença entre variável quantitativa e variável qualitativa?

10. Qual é o objetivo da representação gráfica em Estatística?

11. No capítulo **9** foram apresentados alguns tipos de gráficos: gráfico de barras; gráfico de linhas; gráfico de setores. Dê exemplos de situações nas quais cada um deles geralmente é utilizado.

12. Em qual situação a média ponderada é utilizada para determinar a média aritmética de um conjunto de dados?

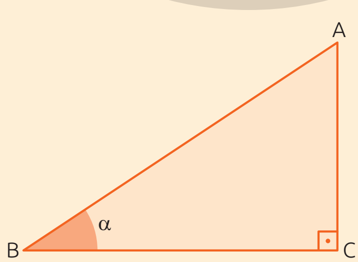
13. O que é a moda de um conjunto de dados?

14. Observe o triângulo retângulo *ABC*.

a) Qual razão corresponde ao senα? E ao cosα?

b) As razões senα e cosα são números positivos maiores do que 1? Justifique.

c) Qual razão corresponde à tgα? Esse valor pode ser igual a 1? Justifique.



Sergio Lima/ID/BR

15. Ao lado estão os valores do seno e do cosseno dos ângulos notáveis. Explique por que $\text{sen}30° = \cos 60°$, $\text{sen}45° = \cos 45°$ e $\text{sen}60° = \cos 30°$.

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

16. A página de abertura da unidade **4** apresentou a música como assunto inicial, informando seus benefícios para pessoas com necessidades especiais. Qual dos conteúdos trabalhados durante esta unidade se relaciona com este tema?

Ampliando fronteiras

Curva de Koch

Uma característica dos fractais é a complexidade infinita, isto é, a quantidade de detalhes é infinita e nunca conseguiríamos representá-los completamente. Isso gera um aparente paradoxo, pois apesar de obtermos uma figura cujo perímetro é infinito, ela abrange uma área finita.

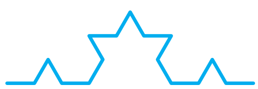
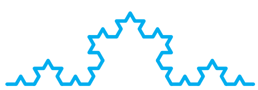
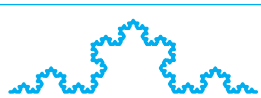
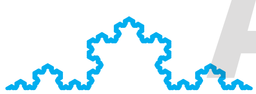
Paradoxo: pensamento, proposição ou argumento que desafia o pensamento lógico, aparentando contradição.

Fractal: estrutura geométrica na qual um padrão é repetido tanto na parte quanto no todo, em qualquer escala.

Floco de neve de Koch

O matemático polonês Helge von Koch (1870-1924) propôs um fractal obtido a partir de um triângulo equilátero: divide-se cada lado do triângulo em três partes de medidas iguais, removendo a parte do meio de cada lado e substituindo-a por dois lados de outro triângulo equilátero, cuja medida do lado é igual ao comprimento do segmento removido. Com algumas alterações recorrentes (iterações), o resultado é uma figura semelhante a um floco de neve, chamada **floco de neve de Koch**.

Para analisar o perímetro da figura, vamos considerar apenas o comprimento da linha destacada nas imagens, denominada **curva de Koch**. O quadro representa as n primeiras iterações dessa curva, considerando um segmento inicial de comprimento ℓ.

	Iteração	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento (u.c.)	Comprimento total da curva (u.c.)
	0	1	ℓ	$\ell = \left(\frac{4}{3}\right)^0 \ell$
	1	4	$\frac{\ell}{3}$	$4\frac{\ell}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^1 \ell$
	2	4^2	$\frac{\ell}{3^2}$	$4^2\frac{\ell}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \ell$
	3	4^3	$\frac{\ell}{3^3}$	$4^3\frac{\ell}{3^3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \ell$
	4	4^4	$\frac{\ell}{3^4}$	$4^4\frac{\ell}{3^4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \ell$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n	4^n	$\frac{\ell}{3^n}$	$4^n\frac{\ell}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \ell$

Sergio Lima/ID/BR

De fato, os termos do comprimento total da curva em cada iteração representam os termos de uma PG de razão $\frac{4}{3} > 1$. Portanto, para infinitas iterações, o comprimento total da curva de Koch não é finito e, consequentemente, o perímetro do floco de neve de Koch é infinito.

A Você conhece outros tipos de fractais? Cite-os.

B Considerando o quadro apresentado, qual a quantidade de segmentos, o comprimento de cada segmento e o comprimento total da curva de Koch na iteração **5**?

C Calcule o perímetro das figuras que representam as quatro primeiras iterações do floco de neve de Koch, considerando $\ell = 3$ cm.

D Como o paradoxo da curva de Koch, há outros paradoxos matemáticos, como o paradoxo do hotel de Hilbert, o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, entre outros. Realize uma pesquisa a respeito e explique a um colega.

Alexandre Koyama/ASC Imagens

Matemática em ação

Fotomontagem de Z. Vitor Elorza criada com as fotografias Markus Gann, pockygallery e PopTika/Shutterstock.com/ID/BR

Tamanho aparente dos astros

Bate-papo inicial

- Que corpos celestes podem ser visualizados a olho nu da Terra?
- Por que o Sol aparenta ser maior do que os demais corpos celestes quando é observado do nosso planeta?
- Em sua opinião, a Lua aparenta ter o mesmo tamanho do Sol? Por quê?

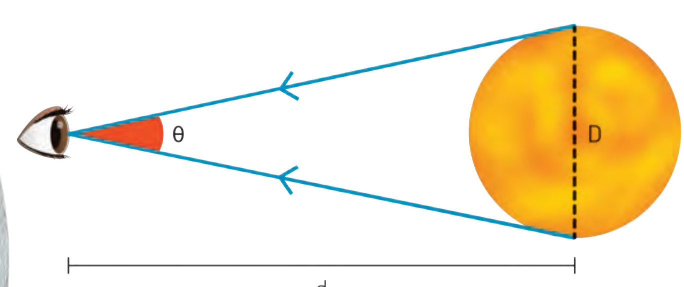
Não se sabe ao certo quando o ser humano começou a estudar os corpos celestes a fim de situá-los no espaço e no tempo, explicando sua origem, suas dimensões e seus movimentos. No entanto, é provável que tanto os corpos celestes quanto os fenômenos astronômicos tenham despertado a curiosidade de diversas civilizações por motivos associados a religião e crença.

Acredita-se que os babilônios conheciam seis corpos celestes importantes (além das estrelas fixas) – Sol, Lua, Vênus, Mercúrio, Marte e Júpiter. Contudo, como eles consideravam o número sete sagrado, fizeram mais observações até descobrirem Saturno, o sétimo corpo celeste. Já os gregos preocuparam-se com questões relacionadas ao tamanho real do Sol e da Lua, assim como suas distâncias em relação ao nosso planeta.

Ainda hoje, é interessante pensarmos nas dimensões astronômicas. Como pontos tão pequenos no céu podem se referir a estrelas gigantescas? Esses pontinhos brilhantes que visualizamos daqui da Terra aparentam ser pequenos porque estão muito distantes daqui, bem mais longe do que o Sol, que se encontra a cerca de 149 600 000 km. Por isso, temos a tendência de associar o que vemos ao **tamanho real** desses corpos celestes.

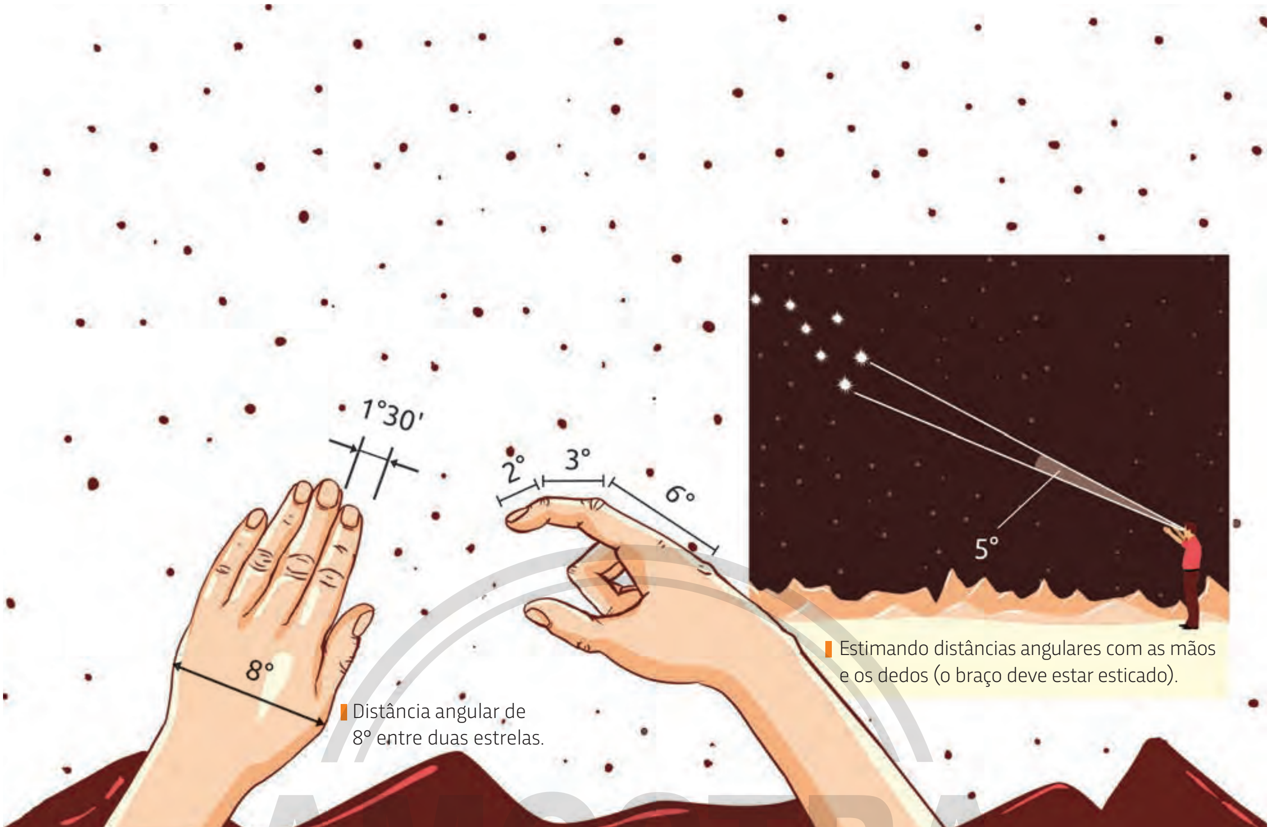
Para compreendermos melhor, tomamos como medida o **diâmetro angular**, que pode ser estimado usando a mão ou os dedos.

No caso do Sol, o diâmetro angular θ mede, aproximadamente, 0,5°. Assim, dizemos que o Sol subtende um ângulo de medida 0,5°. Conhecendo sua distância d até a Terra é possível determinar seu diâmetro real D aproximado.



Ilustranet/ASC Imagens

Observe como podemos estimar posições relativas e tamanhos aparentes de corpos celestes.



Distância angular de 8° entre duas estrelas.

Estimando distâncias angulares com as mãos e os dedos (o braço deve estar esticado).

Ilustranet/ASC Imagens

Mão na massa

A seguir, são propostas duas atividades. A primeira será para estimar o diâmetro real do Sol; a segunda consiste em uma experiência de observação do céu noturno para realizar medições.

- Sigam as orientações do professor para a formação de grupos com os colegas. Providenciem com antecedência uma calculadora científica.
  - De acordo com a imagem que representa o diâmetro angular do Sol e utilizando seus conhecimentos de trigonometria, calculem um valor aproximado para o diâmetro real do Sol. Considerem $d = 149\,600\,000$ km.
  - Esta medida pode ser considerada uma boa estimativa para o diâmetro do Sol? Por quê?
- Combinem com o professor os dias em que vocês deverão se encontrar no período noturno, acompanhados de um adulto responsável, para realizarem as observações e medições. Escolham um local em que haja boa visibilidade do céu, preferencialmente mais afastado das luzes da cidade, e que seja em uma noite sem nuvens.

Com o braço esticado, utilizem a mão para determinar distâncias angulares entre as estrelas da constelação Cruzeiro do Sul. O professor explicará como localizar essa constelação e entre quais estrelas deverão ser estimadas as distâncias angulares. Da mesma maneira, meçam o diâmetro angular da Lua.

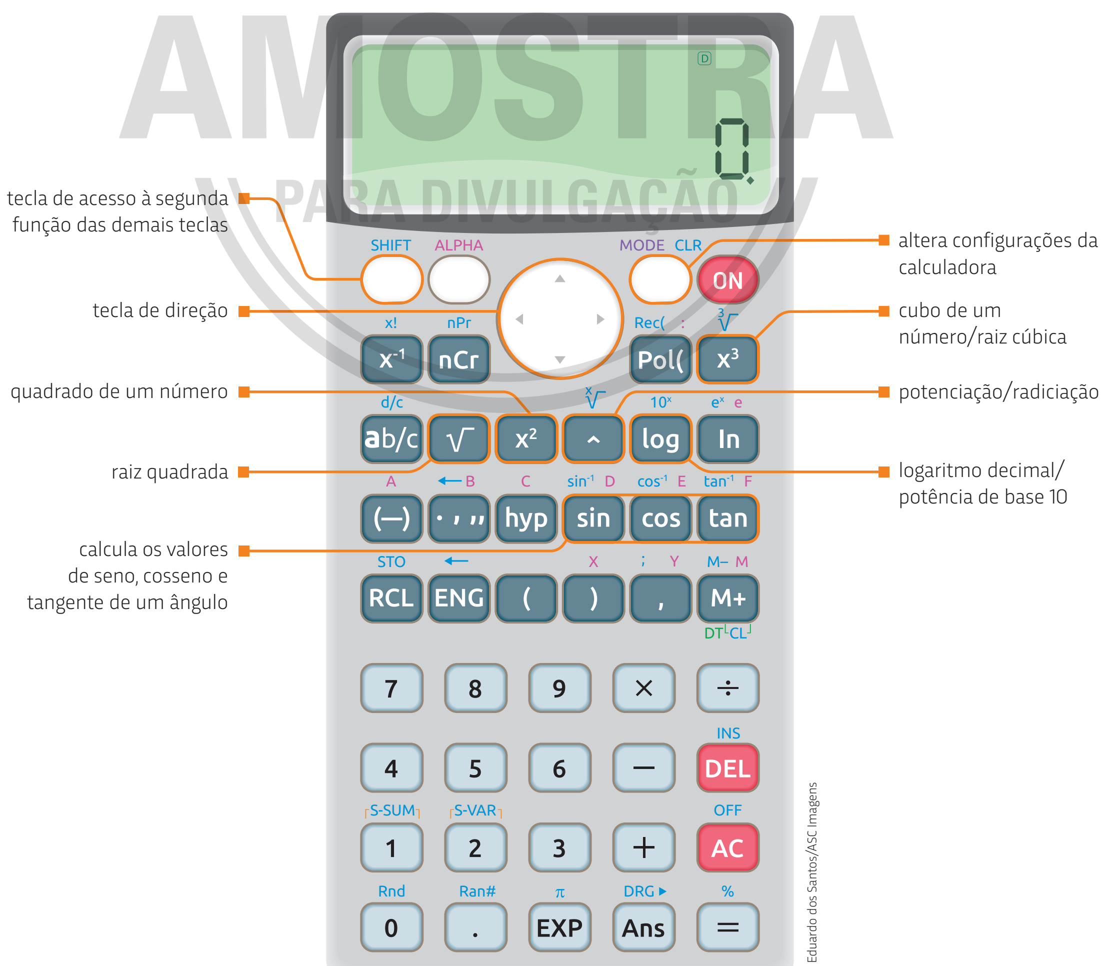
- Em sala de aula e com as medições realizadas com os colegas do grupo, comparem com os outros grupos as distâncias angulares obtidas entre as estrelas do Cruzeiro do Sul.
- Há diferenças nas medições estimadas? Se tiver, justifiquem por que isso ocorreu e proponham uma maneira mais precisa de realizar as medições.

  Calculem o diâmetro angular da Lua, sabendo que sua distância em relação à Terra é de, aproximadamente, $384\,000$ km e que seu diâmetro é de $3\,476$ km. Confiram se o resultado corresponde a um valor próximo ao obtido na medição.

Ferramentas

Calculadora científica

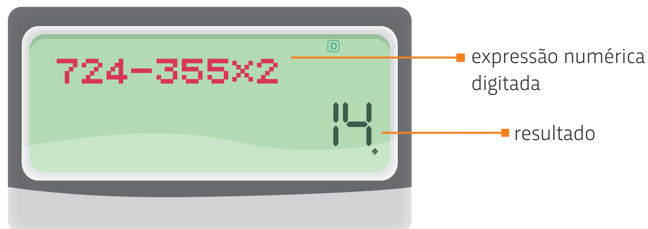
Observe um modelo de calculadora científica e a função de algumas de suas teclas.



Eduardo dos Santos/ASC Imagens

Expressões numéricas

Há modelos de calculadora científica que permitem a inserção de expressões numéricas de modo simples. O modelo que utilizaremos tem o visor dividido em duas partes: na parte superior, pode-se visualizar a expressão numérica digitada e, na parte inferior, seu resultado.



Assim como na representação usual de expressões numéricas, podemos usar parênteses para indicar as operações que são calculadas primeiro. As operações aritméticas fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) são resolvidas na seguinte ordem nas expressões numéricas:

1º Operações entre parênteses.

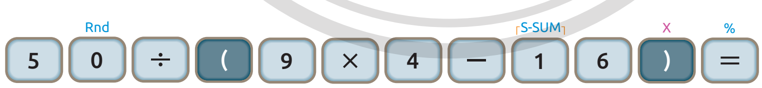
2º Operações de multiplicação e divisão, na ordem em que aparecem.

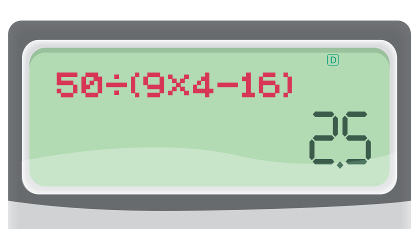
3º Operações de adição e subtração, na ordem em que aparecem.

Veja um exemplo de cálculo de expressão numérica.

Calcular $50 : (9 \cdot 4 - 16)$.

Digite a expressão seguida da tecla =, ou seja, pressione:





Ilustrações: Eduardo dos Santos/ASC Imagens

Nesse modelo de calculadora, é possível editar a expressão após ela ter sido inserida. Para isso, use a tecla de direção para a direita ou para a esquerda para escolher o ponto de alteração e, com o comando SHIFT INS DEL, decida se os novos caracteres vão substituir os já inseridos ou não.
A calculadora indica que $50 : (9 \cdot 4 - 16) = 2{,}5$. Faça os cálculos em seu caderno para conferir esse resultado.

Potenciação e radiciação

O modelo de calculadora que estamos utilizando possui diferentes teclas para o cálculo de potências e de raízes, como as indicadas na página **252**.

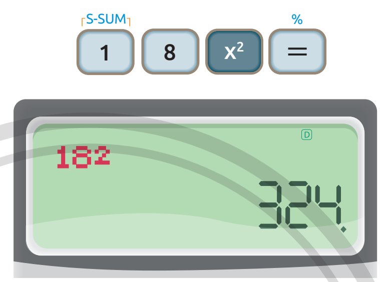
Os símbolos acima das teclas $\sqrt[x]{\ }$ ^ e $\sqrt[3]{\ }$ x^3 indicam a "segunda função" delas, as quais são acessadas por meio da tecla SHIFT.

Em alguns modelos de calculadora científica, a "segunda função" é acessada por meio de uma tecla chamada 2nd F.

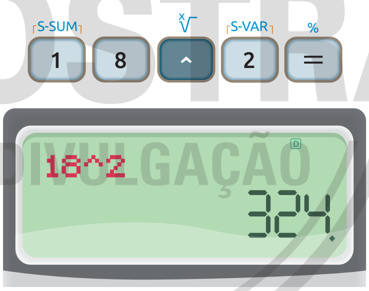
Veja os exemplos a seguir.

Calcular 18^2.

1ª maneira: pressionar a tecla x^2.



2ª maneira: pressionar a tecla $\sqrt[x]{\ }$ ^.

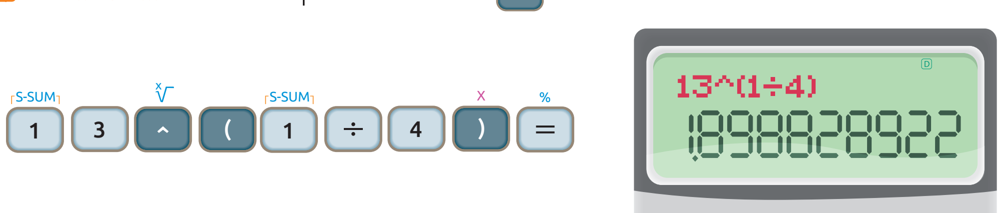


A tecla x^2 insere o expoente 2 para o cálculo do quadrado de um número. Quando se utiliza a tecla $\sqrt[x]{\ }$ ^, o expoente deve ser digitado após o símbolo ^.

Calcular $\sqrt[4]{13}$.

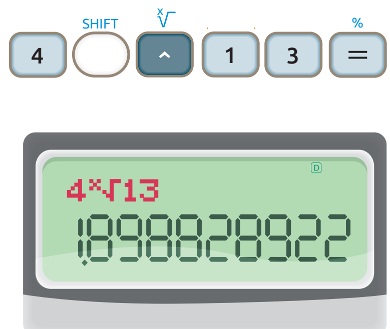
Estudamos, no capítulo **6**, que uma raiz n-ésima corresponde a uma potência com expoente racional, por exemplo, $\sqrt[4]{13} = 13^{\frac{1}{4}}$. Observe duas maneiras de realizar esse cálculo.

1ª maneira: calcular $13^{\frac{1}{4}}$ por meio da tecla $\sqrt[x]{\ }$ ^.



Ilustrações: Eduardo dos Santos/ASC Imagens

2ª maneira: calcular $\sqrt[4]{13}$ por meio da segunda função da tecla ^.



Na 1ª maneira, se não colocássemos parênteses, o resultado não seria o esperado, pois a expressão 13^1 ÷ 4, na calculadora, é interpretada como $13^1 : 4$, o que resulta em 3,25.

Na 2ª maneira, o número digitado antes do símbolo $\sqrt[x]{}$ corresponde ao índice do radical.

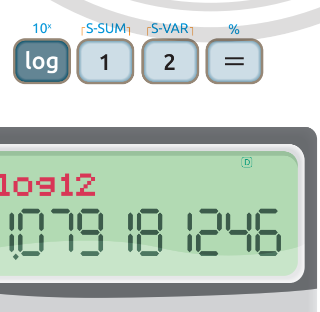
Lembre-se de que uma raiz n-ésima não exata de um número natural é sempre um número irracional. Assim, o resultado desse cálculo é aproximado, ou seja, $\sqrt[4]{13} \simeq 1{,}898828922$.

Logaritmos

Em uma calculadora científica nem sempre há uma tecla para calcular diretamente um logaritmo de base qualquer. Nesse modelo de calculadora, a tecla log é utilizada para o cálculo de logaritmos decimais, cujo procedimento é exemplificado a seguir.

Calcular log12.

Pressione:



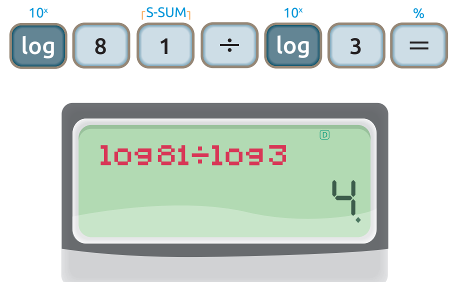
Ilustrações: Eduardo dos Santos/ASC Imagens

Assim, $\log 12 \simeq 1{,}079181246$.

Para calcular logaritmos de outras bases, podemos usar a propriedade de mudança de base, ou seja, $\log_b a = \dfrac{\log a}{\log b}$, sendo a e b números reais positivos e $b \neq 1$. Veja um exemplo a seguir.

Calcular $\log_3 81$.

Sabemos que $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$. Para obter esse resultado na calculadora, podemos utilizar a relação $\log_3 81 = \dfrac{\log 81}{\log 3}$, obtida por meio da propriedade de mudança de base.



Assim, $\log_3 81 = \dfrac{\log 81}{\log 3} = 4$.

Razões trigonométricas

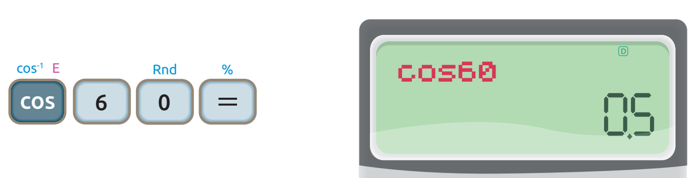
Nas calculadoras científicas, as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente são geralmente indicadas por "sin", "cos" e "tan", respectivamente. Antes de efetuar cálculos envolvendo razões trigonométricas, é importante verificar se a calculadora está configurada para trabalhar com ângulos em graus. No modelo de calculadora que estamos utilizando, isso é indicado pelo ícone com a letra "D", localizado na parte superior do visor. Outras opções possíveis são "R" (radianos) e "G" (grados).

Podemos verificar se a calculadora está configurada para ângulos em graus utilizando os ângulos notáveis. Observe o exemplo.

Calcular o seno, o cosseno ou a tangente de alguns ângulos notáveis.

Para conferir a configuração da calculadora em relação aos ângulos, podemos calcular, por exemplo, sen 30°, cos 60° ou tg 45°, pois sabemos que sen 30° = cos 60° = $\dfrac{1}{2}$ e tg 45° = 1. Para isso, pressione:

- 

- 

- 

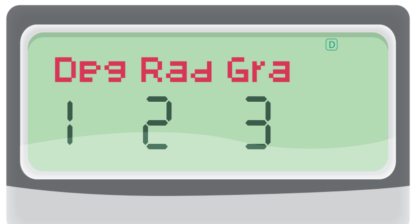
Ilustrações: Eduardo dos Santos/ASC Imagens

Nesses casos, os resultados foram os esperados.

Ao realizar os cálculos do exemplo anterior, se os resultados não forem os esperados, significa que a calculadora provavelmente não está configurada para trabalhar com ângulos em graus. Para alterar essa configuração, procedemos da seguinte maneira.

Configurar a calculadora para ângulos em graus.

Pressione a tecla [MODE CLR] até que apareça no visor as opções de configuração "Deg", "Rad" e "Gra".



Alguns procedimentos explicados nesta seção podem variar de acordo com o modelo de calculadora científica.

A opção "Deg" corresponde à configuração para ângulos em graus (em inglês, *degree*).

Para selecioná-la, basta digitar [1].

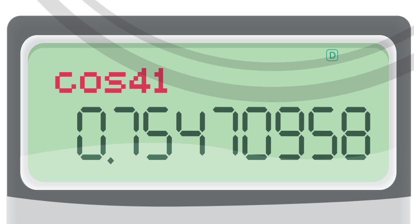
Após se certificar de que a calculadora está configurada para cálculos com ângulos em graus, podemos utilizá-la para realizar o exemplo a seguir.

Calcular sen 40°, cos 41° e tg 42°.

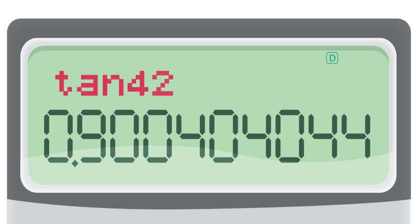
Pressione:

- [sin] [4] [0] [=]

- [cos] [4] [1] [=]



- [tan] [4] [2] [=]



Ilustrações: Eduardo dos Santos/ ASC Imagens

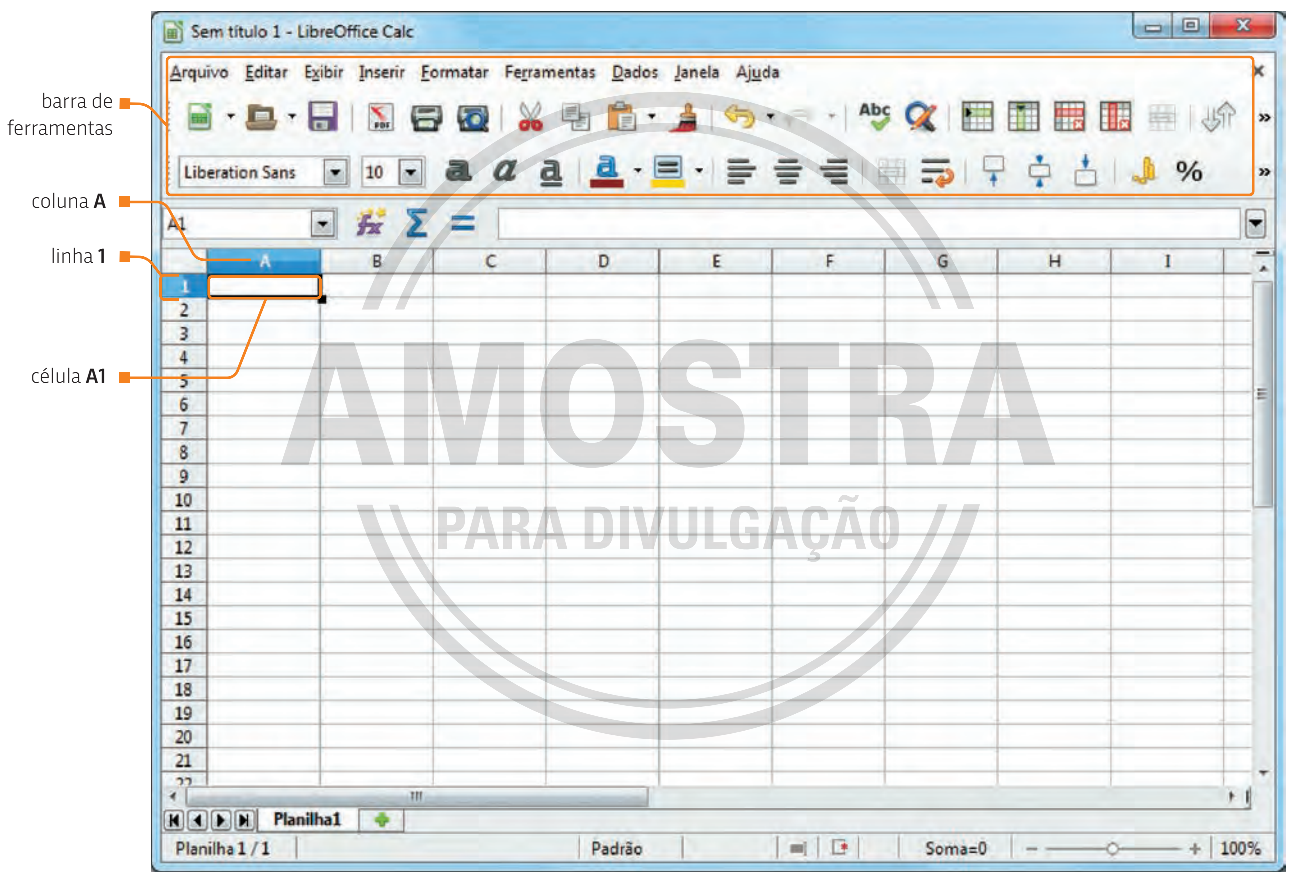
Compare os valores aproximados de sen 40°, de cos 41° e de tg 42°, calculados no exemplo, com os valores correspondentes na tabela trigonométrica apresentada na página **231**.

Nesses casos, os resultados foram os esperados.

LibreOffice Calc

As planilhas eletrônicas são compostas por linhas e colunas, e o encontro delas é denominado célula. Além de organizar e apresentar informações de maneira objetiva e precisa, essas planilhas manipulam os dados por meio de fórmulas e cálculos automatizados.

Em relação ao Calc, trata-se de uma planilha eletrônica que faz parte do pacote LibreOffice, desenvolvido pela The Document Foundation, uma organização sem fins lucrativos. O LibreOffice é um pacote gratuito de aplicações que inclui, além da planilha eletrônica, editores de texto, de apresentação, de desenho, de banco de dados e de fórmulas científicas e equações. Esse pacote pode ser obtido no *site* <http://linkte.me/fh66y> (acesso em: 20 abr. 2016). Para os procedimentos apresentados a seguir, utilizamos a versão LibreOffice 4.4.5.2.



The Document Foundation/Acervo da produtora

Representação decimal na planilha eletrônica

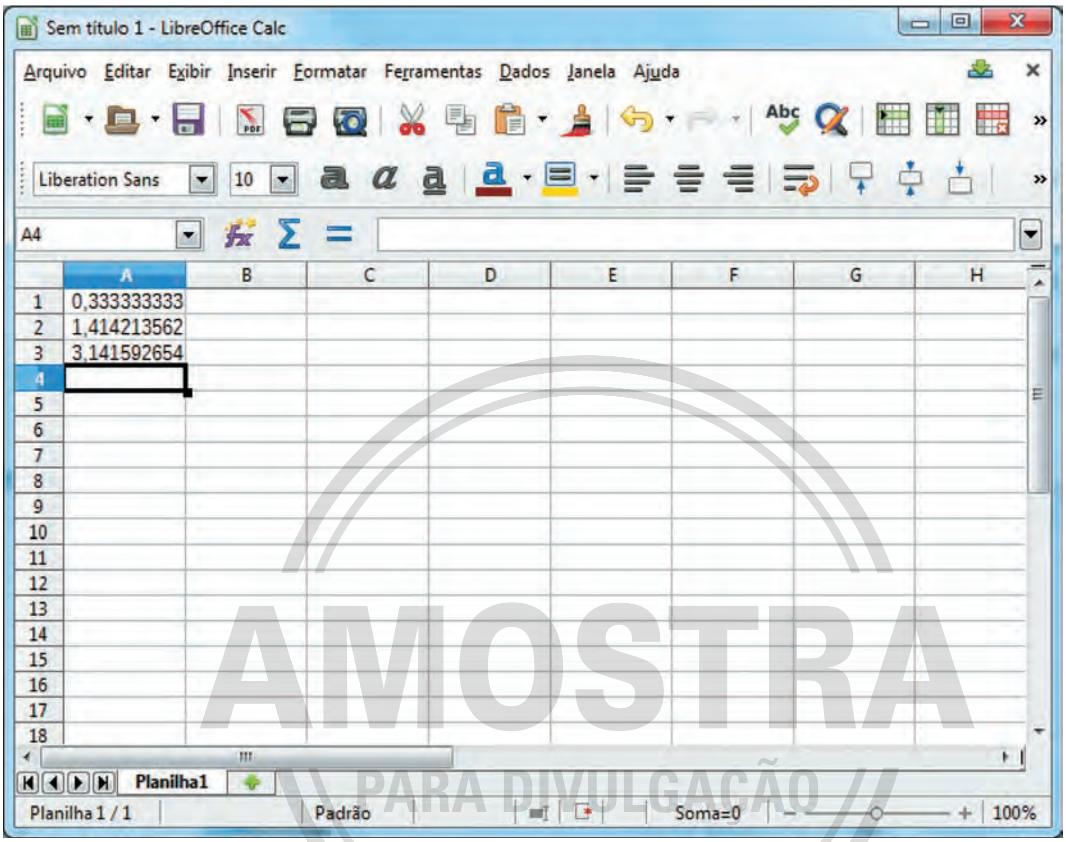
No conjunto dos números reais, sabemos que há números sem uma representação decimal finita. Tanto as dízimas periódicas como os números irracionais possuem uma quantidade infinita de casas decimais, mas a planilha eletrônica representa um número sempre com uma quantidade finita de casas decimais. Portanto, significa que, esses números são representados apenas de forma aproximada.

Veja como podemos obter na planilha eletrônica a representação decimal de um valor aproximado de cada um dos números reais: $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$ e π.

1º passo:

Digite nas células **A1**, **A2** e **A3** as fórmulas a seguir, pressionando a tecla **ENTER** após a inserção de cada uma delas.

- **A1**: $=1/3$
- **A2**: $=$ RAIZ(2)
- **A3**: $=$ PI()

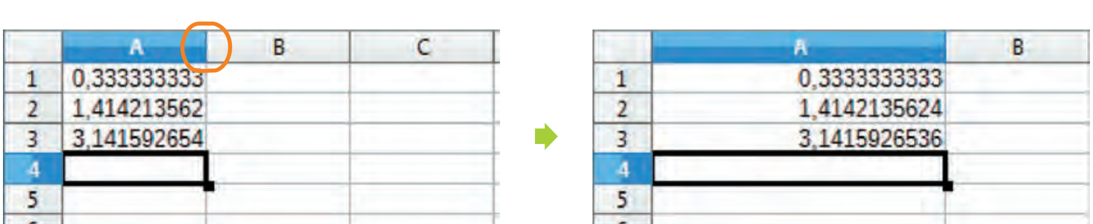


Os números apresentados nas células **A1**, **A2** e **A3** são aproximações de $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$ e π, respectivamente.

Na planilha eletrônica, uma fórmula é iniciada com um sinal de igual ($=$), na qual é possível realizar operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com os caracteres $+$, $-$, * e /, respectivamente. Também podemos usar vários comandos predefinidos, como **RAIZ()**, para calcular a raiz quadrada de um número, ou **PI()**, que retorna um valor aproximado de π.

2º passo:

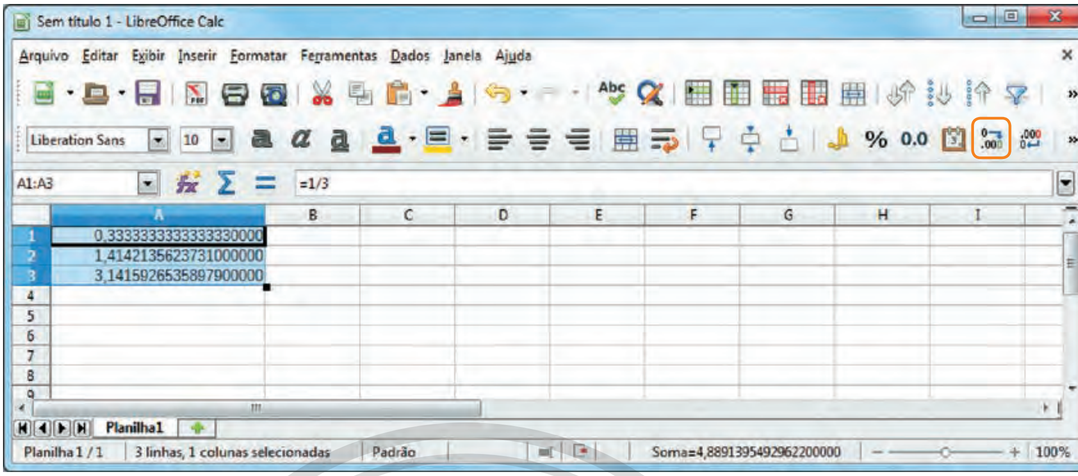
Aumente a largura da coluna **A**. Para isso, clique e arraste para a direita a parte indicada na figura.



Imagens: The Document Foundation/ Acervo da produtora

3º passo:

Selecione as células **A1**, **A2** e **A3**, ou seja, o intervalo de células **A1 : A3**. Em seguida, adicione casas decimais aos números clicando repetidamente no botão **Adicionar casa decimal** ( ).



A partir de certo ponto, aparecem apenas dígitos zero. Em geral, isso indica que o limite de precisão já foi atingido, e o número exibido é a melhor aproximação que se pode obter com esse programa.

Com os colegas, compare as aproximações de $\sqrt{2}$ e de π, obtidas no programa, com as representações decimais desses números dadas no capítulo **1**.

Gráfico de função

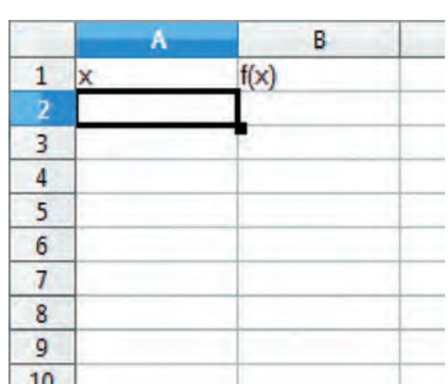
Existem diversos *softwares*, muitos deles gratuitos, que constroem representação gráfica de uma função a partir de sua lei de formação. Uma planilha eletrônica, apesar de não ser voltada ao ensino de conceitos matemáticos, também é usada na construção de alguns gráficos.

Observe como podemos construir o gráfico da função $f: [-10, 10] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x^2}{5} - 8$.

1º passo:

Inicialmente, vamos construir um quadro com alguns valores de x e de $f(x)$. Para isso, digite nas células **A1** e **B1** as seguintes informações.

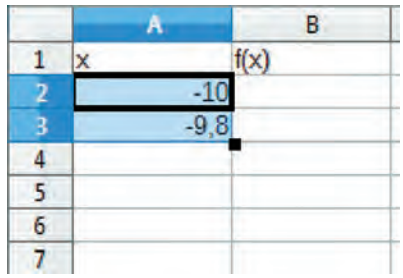
- **A1**: x
- **B1**: $f(x)$



Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

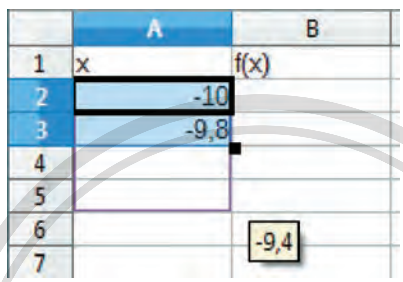
2º passo:

Insira alguns valores para *x* na coluna **A**, sendo −10 o valor mínimo e 10 o valor máximo. Para isso, proceda da seguinte maneira:



	A	B
1	x	f(x)
2	-10	
3	-9,8	
4		
5		
6		
7		

Digite os valores −10 e −9,8 nas células **A2** e **A3**, respectivamente. Em seguida, selecione essas células.

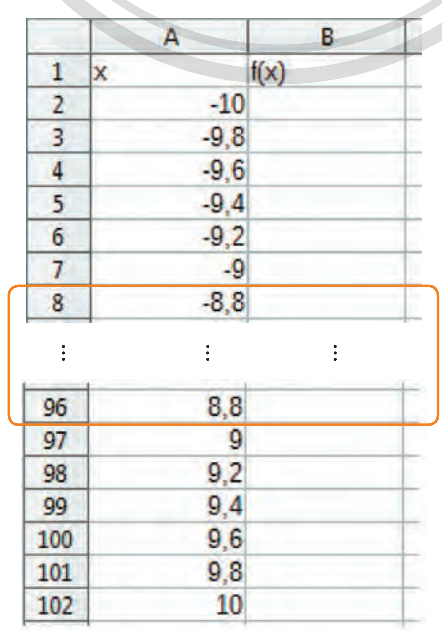


	A	B
1	x	f(x)
2	-10	
3	-9,8	
4		
5		
6		-9,4
7		

Clique e arraste a guia de preenchimento automático para baixo até obter todos os valores desejados.

A **guia de preenchimento automático** é indicada por meio do quadradinho preto localizado no canto inferior direito da seleção atual, e geralmente é utilizada para estender determinados padrões às células adjacentes.

Como a diferença entre os dois valores iniciais é igual a 0,2, os valores obtidos com a guia de preenchimento automático seguem esse mesmo padrão.



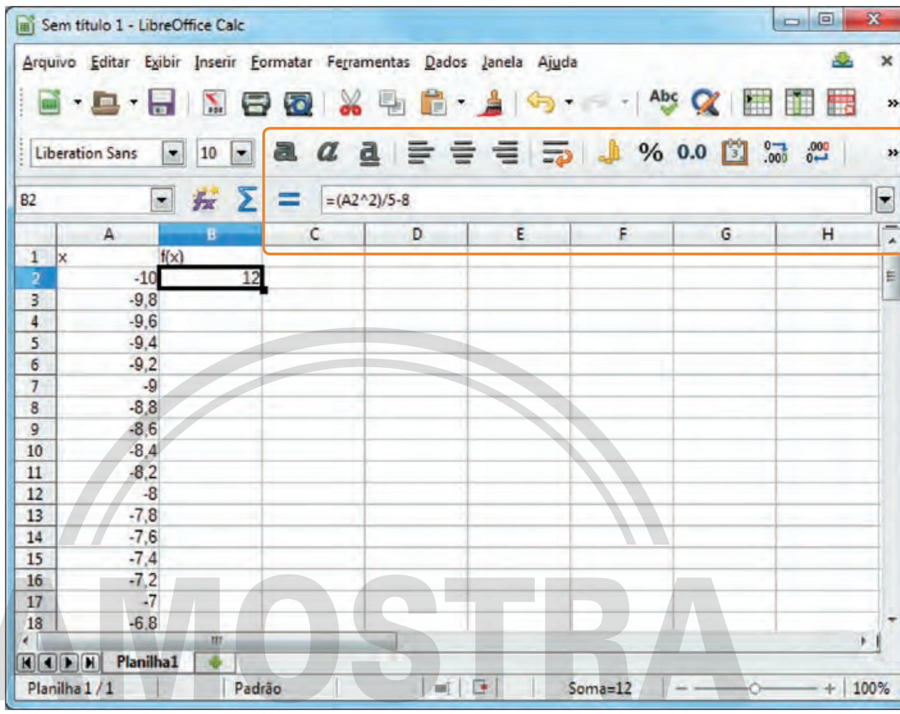
	A	B
1	x	f(x)
2	-10	
3	-9,8	
4	-9,6	
5	-9,4	
6	-9,2	
7	-9	
8	-8,8	
⋮	⋮	⋮
96	8,8	
97	9	
98	9,2	
99	9,4	
100	9,6	
101	9,8	
102	10	

Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

3º passo:

Na coluna **B**, precisamos calcular $f(x) = \frac{x^2}{5} - 8$ para os respectivos valores de x da coluna **A**. Na célula **B2** digite a fórmula $= (A2\text{^}2)/5 - 8$,

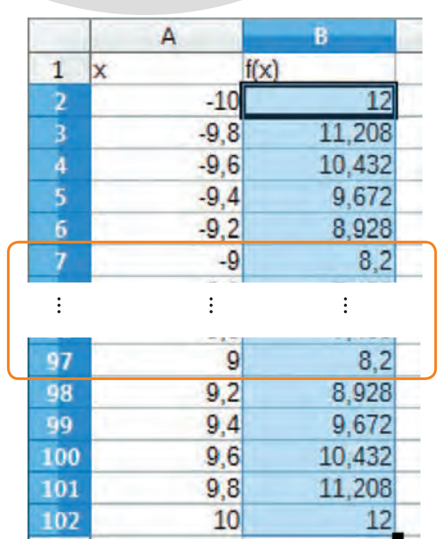
que resulta no valor de $f(x)$, sendo x o valor da célula **A2**, ou seja, $x = -10$.
O caractere ^ indica a operação de potenciação.



Na linha de entrada, destacada na imagem, é possível visualizar a fórmula digitada.

4º passo:

Com a célula **B2** selecionada, clique e arraste a guia de preenchimento automático para estender o cálculo da fórmula para os demais valores de x.

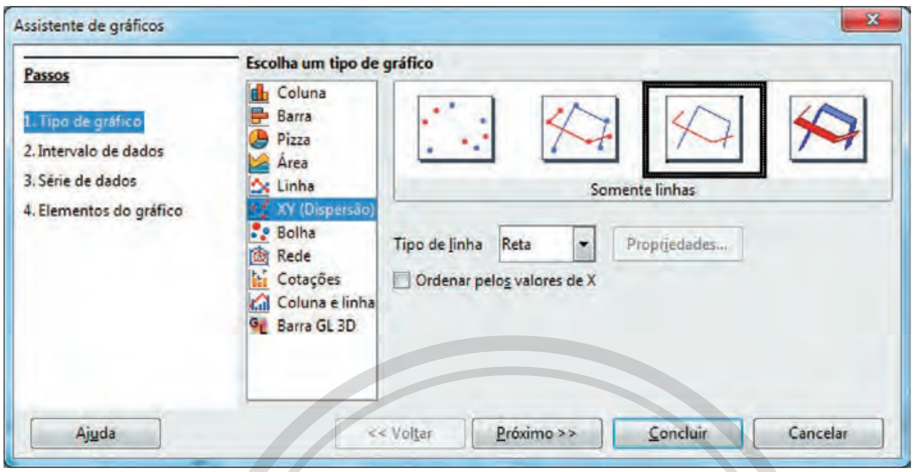


	A	B
1	x	f(x)
2	-10	12
3	-9,8	11,208
4	-9,6	10,432
5	-9,4	9,672
6	-9,2	8,928
7	-9	8,2
⋮	⋮	⋮
97	9	8,2
98	9,2	8,928
99	9,4	9,672
100	9,6	10,432
101	9,8	11,208
102	10	12
103		

Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

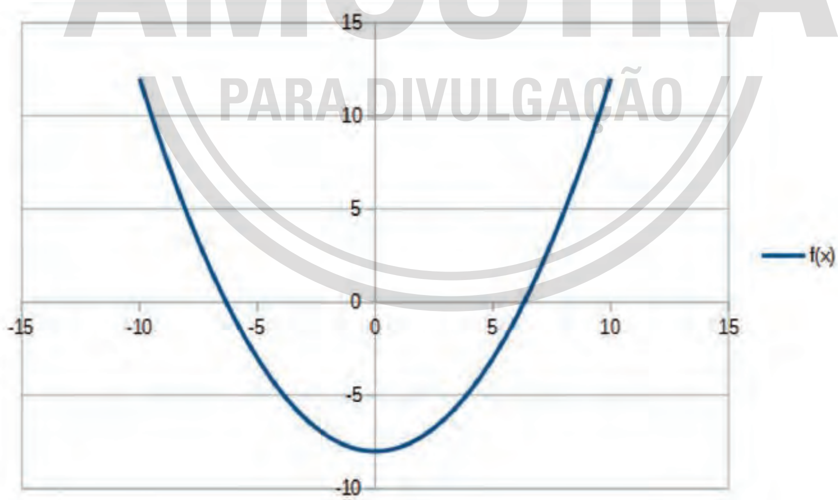
5º passo:

Selecione as células com os valores de x e $f(x)$, ou seja, o intervalo **A1:B102**. Em seguida, clique no botão **Gráfico** ( ), localizado na barra de ferramentas. Na janela **Assistente de gráficos**, escolha o tipo de gráfico **XY (Dispersão)** e a opção **Somente linhas**, como na figura abaixo. Por fim, clique em **Concluir.**



6º passo:

Obtém-se o gráfico a seguir.



Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

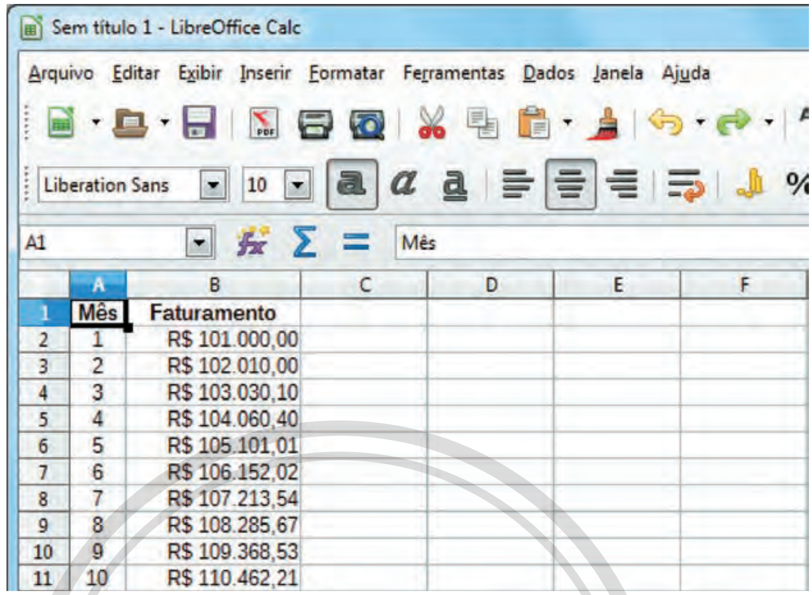
O programa ainda permite configurar diversos elementos do gráfico, como a escala dos eixos, os intervalos a serem exibidos, entre outros. Altere algumas dessas configurações da maneira que julgar mais conveniente.

PA e PG na planilha eletrônica

Em uma planilha eletrônica, podemos listar os primeiros termos de progressões aritméticas e geométricas com apenas alguns comandos, utilizando o recurso da guia de preenchimento automático.

Na página **193**, foi apresentado um problema em que era preciso calcular a soma dos termos da PG formada pelos faturamentos mensais esperados de uma empresa ao longo de 36 meses. Observe parte do quadro construído na planilha eletrônica com os faturamentos dos primeiros meses.

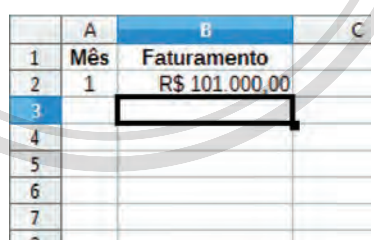
No LibreOffice Calc, os valores monetários são exibidos com um ponto (.) como separador de milhar.



Na coluna **A** temos a PA $(1, 2, 3, 4, \ldots, 36)$ e na coluna **B**, os valores aproximados da PG, em que $a_1 = 101\,000$ e $q = 1{,}01$. Veja a seguir como podemos construir esse quadro na planilha eletrônica e, em seguida, obter o valor aproximado da soma dos 36 termos da PG.

1º passo:

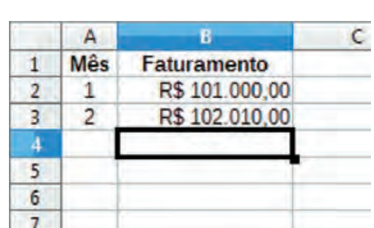
Digite os textos **Mês** e **Faturamento** nas células **A1** e **B1**, respectivamente. Em seguida, preencha a linha abaixo com a informação do primeiro mês, ou seja, digite **1** na célula **A2** e **R$ 101 000,00** na célula **B2**.



2º passo:

Para usarmos o recurso da guia de preenchimento automático, vamos calcular as informações do segundo mês, nas células **A3** e **B3**, por meio das fórmulas a seguir.

- **A3**: $= A2 + 1$
- **B3**: $= B2 * 1{,}01$

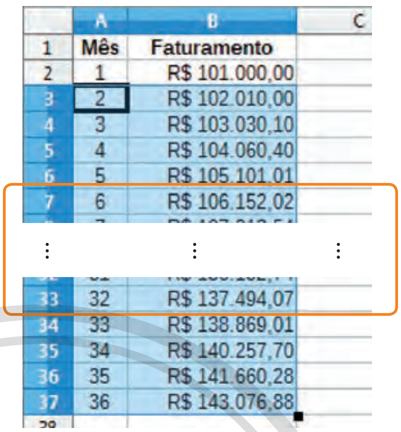


Imagens: The Document Foundation/ Acervo da produtora

3º passo:

No passo anterior, a fórmula inserida na célula **A3** tem como resultado o valor da célula de cima adicionado a 1, e a fórmula inserida na célula **B3** resulta no valor da célula de cima multiplicado por 1,01. Ao utilizar a guia de preenchimento automático, esse padrão é mantido nas células seguintes, o que produzirá uma PA de razão 1 na coluna **A** e uma PG de razão 1,01 na coluna **B**. Então, com o intervalo de células **A3 : B3** selecionado, clique e arraste a guia de preenchimento automático para baixo até obter 36 termos.

	A	B	C
1	Mês	Faturamento	
2	1	R$ 101.000,00	
3	2	R$ 102.010,00	
4			
5			
6			
7			



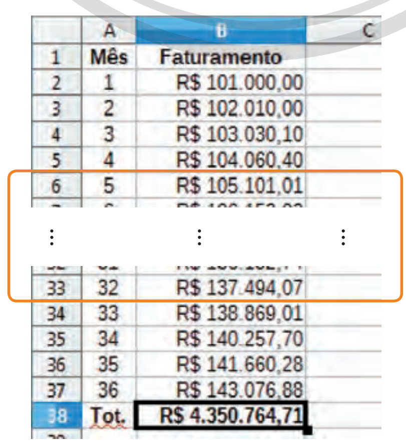
	A	B	C
1	Mês	Faturamento	
2	1	R$ 101.000,00	
3	2	R$ 102.010,00	
4	3	R$ 103.030,10	
5	4	R$ 104.060,40	
6	5	R$ 105.101,01	
7	6	R$ 106.152,02	
⋮		⋮	⋮
33	32	R$ 137.494,07	
34	33	R$ 138.869,01	
35	34	R$ 140.257,70	
36	35	R$ 141.660,28	
37	36	R$ 143.076,88	

Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

Os valores do faturamento aparecem arredondados para duas casas decimais porque estão no formato de valor monetário. É possível exibir uma quantidade maior de casas decimais clicando no botão **Adicionar casa decimal** ( ).

4º passo:

Para apresentar a soma dos faturamentos mensais, digite o texto **Tot.** na célula **A38** e a fórmula **=SOMA(B2 : B37)** na célula **B38**. Essa fórmula fornece a soma de todos os valores do intervalo de células **B2 : B37**, que resulta em R$ 4 350 764,71.



	A	B	C
1	Mês	Faturamento	
2	1	R$ 101.000,00	
3	2	R$ 102.010,00	
4	3	R$ 103.030,10	
5	4	R$ 104.060,40	
6	5	R$ 105.101,01	
⋮	⋮		⋮
33	32	R$ 137.494,07	
34	33	R$ 138.869,01	
35	34	R$ 140.257,70	
36	35	R$ 141.660,28	
37	36	R$ 143.076,88	
38	Tot.	R$ 4.350.764,71	

Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

Ao inserir uma fórmula, em vez de digitar as referências a células ou a intervalos de células, pode-se utilizar as setas do teclado para selecioná-las. Na fórmula da soma, por exemplo, após digitar **=SOMA(** , basta selecionar o intervalo de células desejado e pressionar **ENTER**.

Gráficos estatísticos

Anteriormente, construímos um gráfico na planilha eletrônica para representar uma função. De maneira semelhante, podemos construir vários tipos de gráficos estatísticos. Esses gráficos são gerados a partir de informações previamente organizadas na planilha eletrônica.

Observe como podemos construir um gráfico de barras verticais com as informações da tabela a seguir.

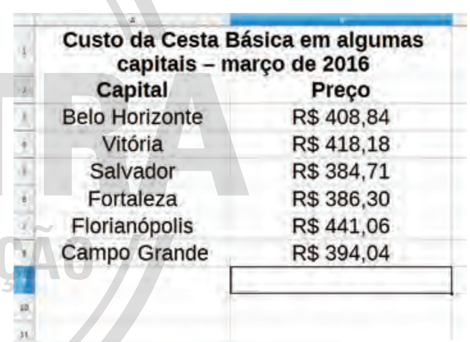
Custo da Cesta Básica em algumas capitais — março de 2016

Capital	Preço
Belo Horizonte	R$ 408,84
Vitória	R$ 418,18
Salvador	R$ 384,71
Fortaleza	R$ 386,30
Florianópolis	R$ 441,06
Campo Grande	R$ 394,04

Fonte de pesquisa: DIEESE. Disponível em: <www.dieese.org.br/analisecestabasica/2016/201603cestabasica.pdf>. Acesso em: 25 abr. 2016.

1º passo:

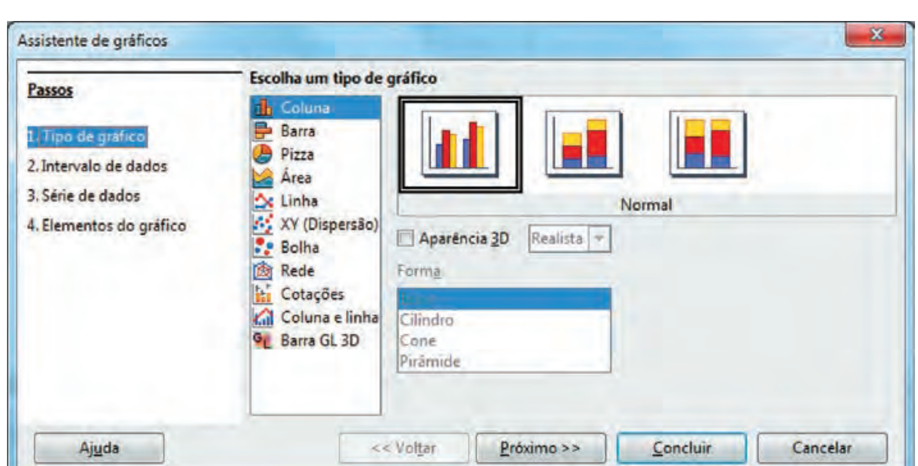
Copie as informações da tabela para a planilha eletrônica. Utilize as opções de formatação que preferir, como **Negrito** ( ), **Centralizar horizontalmente** ( ), **Moldar texto** ( ), etc.



Custo da Cesta Básica em algumas capitais – março de 2016	
Capital	Preço
Belo Horizonte	R$ 408,84
Vitória	R$ 418,18
Salvador	R$ 384,71
Fortaleza	R$ 386,30
Florianópolis	R$ 441,06
Campo Grande	R$ 394,04

2º passo:

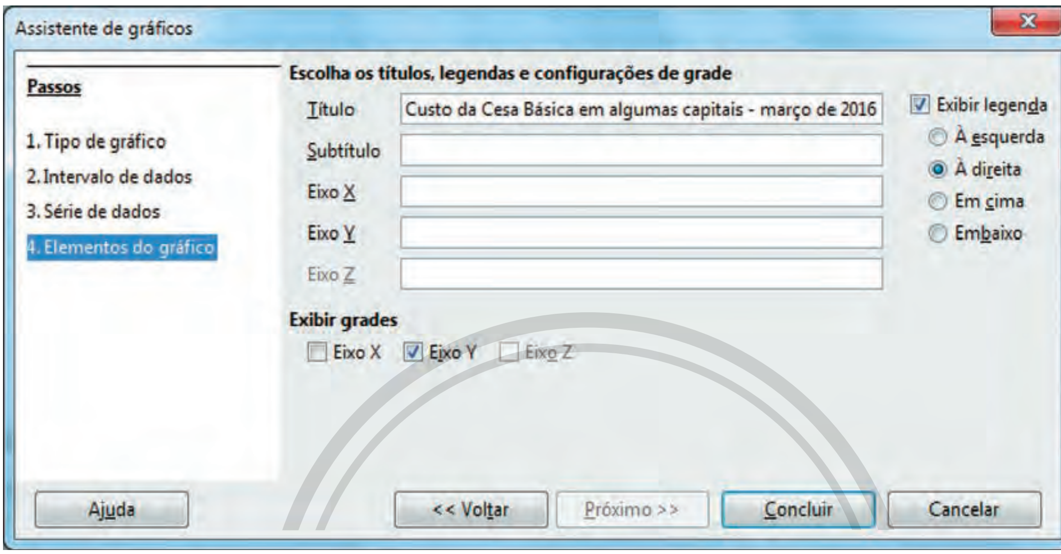
Selecione as informações digitadas, ou seja, o intervalo de células **A1 : B8**, e clique no botão **Gráfico** ( ). Abrirá a janela **Assistente de gráficos**.



Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

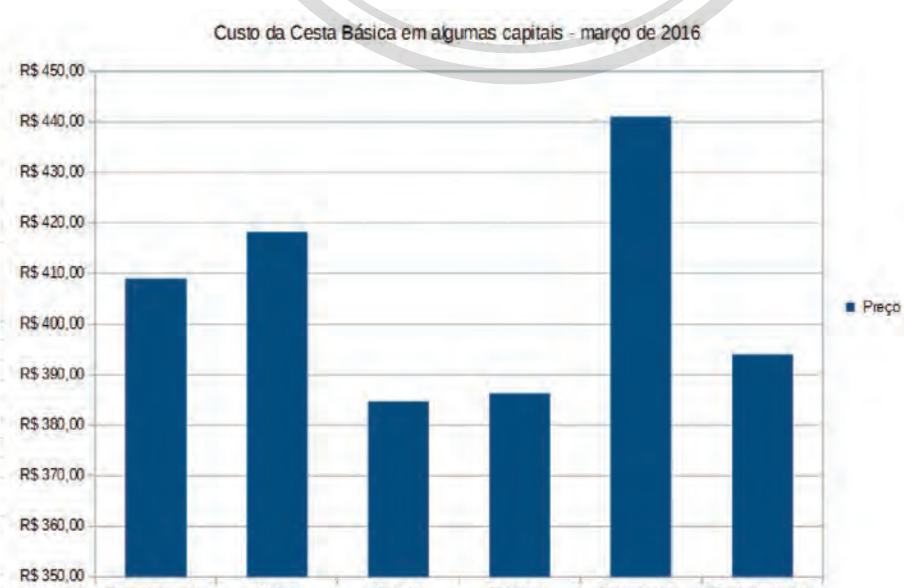
3º passo:

Desejamos construir um gráfico de barras verticais que, provavelmente, será a opção selecionada inicialmente em **1. Tipo de gráfico**. Entre outras configurações possíveis, podemos inserir um título clicando na opção **4. Elementos do gráfico**. No campo **Título**, digite um título igual ao da tabela. Em seguida, clique no botão **Concluir**.



4º passo:

Mesmo com o gráfico pronto, ainda é possível alterar diversas configurações. Para isso, experimente clicar duas vezes em diferentes regiões da figura e editar as informações.



Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

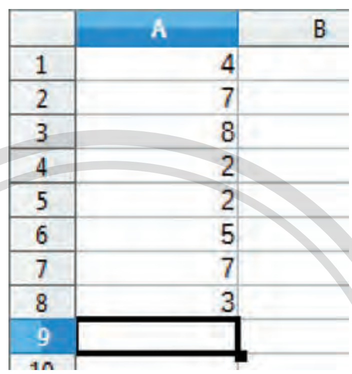
Medidas de tendência central

Uma planilha eletrônica possui diversas funcionalidades que auxiliam no tratamento de informações estatísticas. A seguir, veremos como utilizar algumas dessas funcionalidades para calcular as medidas de tendência central estudadas no capítulo **9**: média aritmética, mediana e moda.

Nesses exemplos, vamos utilizar o seguinte conjunto de dados.

4	7	8	2	2	5	7	3

Para os cálculos dos exemplos a seguir, copie os valores desse conjunto de dados na coluna **A**, como na figura a seguir.

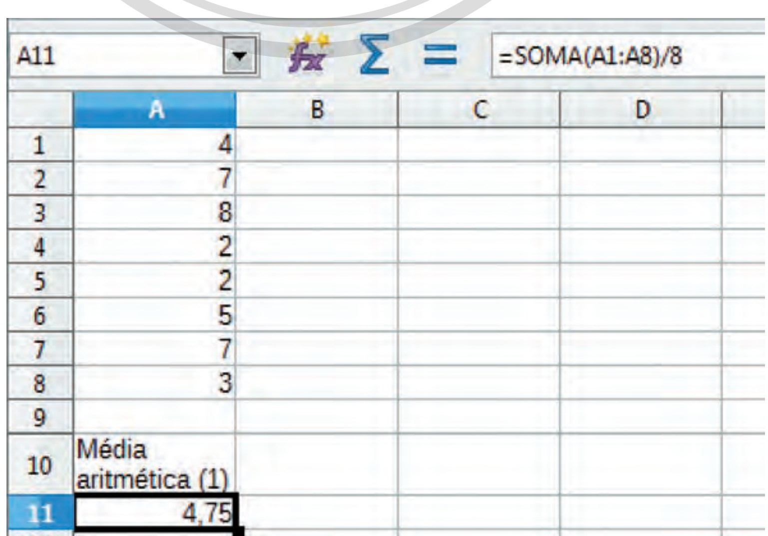


Média aritmética

Vamos mostrar duas maneiras de calcular a média aritmética.

1ª maneira:

Como há 8 valores nesse conjunto de dados, vamos calcular a soma deles por meio da função **SOMA( )** e dividir o resultado por 8. Então, digite na célula **A10** o texto **Média aritmética (1)** e, na célula de baixo, digite a fórmula **=SOMA(A1 : A8)/8** .



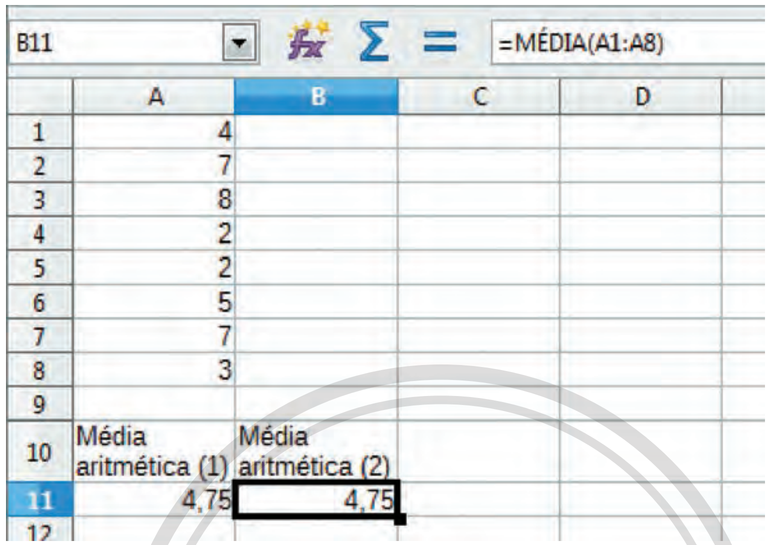
Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

A média aritmética obtida é 4,75.

Não escreva no livro.

2ª maneira:

A função **MÉDIA( )** serve para calcular a média aritmética de um conjunto de dados. Digite na célula **B10** o texto **Média aritmética (2)** e, na célula de baixo, digite a fórmula **=MÉDIA(A1 : A8)**.



Novamente, o valor obtido para a média aritmética é 4,75.

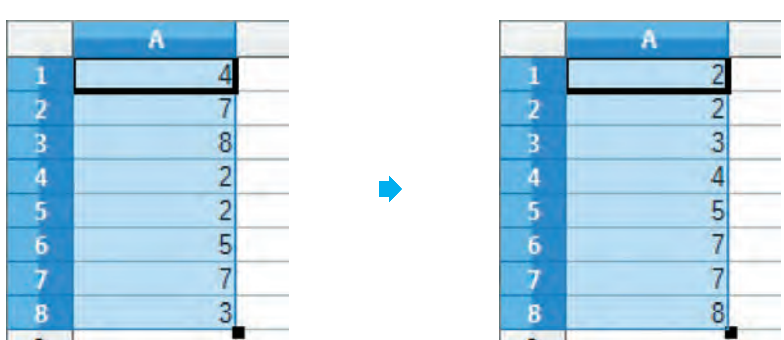
Mediana

Vamos mostrar duas maneiras de calcular a mediana.

1ª maneira:

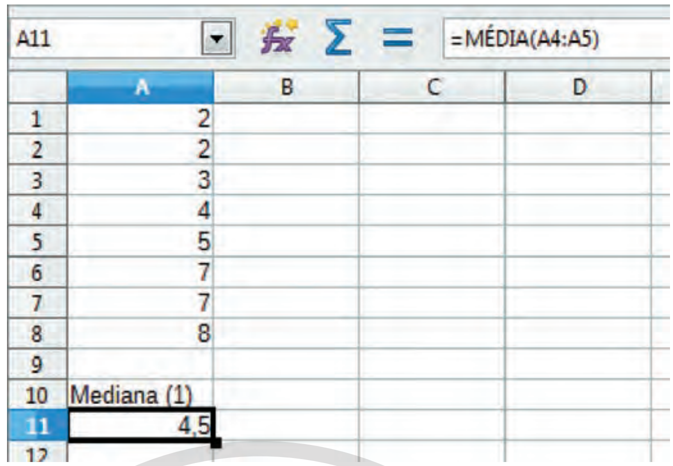
Como há uma quantidade par de valores, vamos organizá-los em ordem crescente e, em seguida, calcular a média aritmética dos dois valores centrais. Proceda da seguinte maneira:

- Selecione o conjunto de dados, ou seja, o intervalo **A1 : A8**, e clique no botão **Classificar em ordem crescente** ( ).



Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

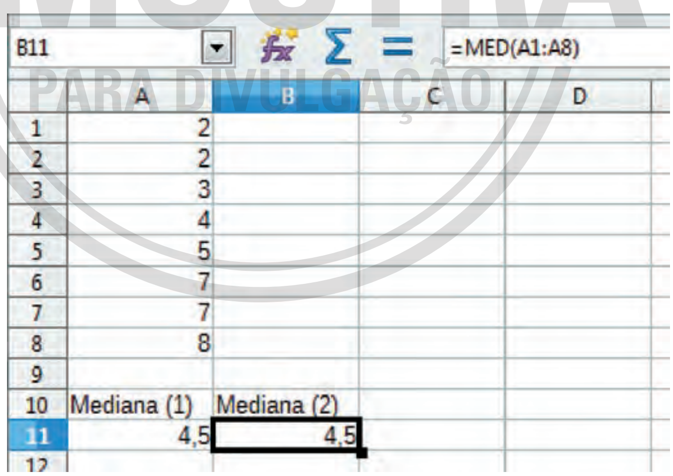
- Os valores centrais são os das células **A4** e **A5**. Então, digite na célula **A10** o texto **Mediana (1)** e, na célula de baixo, digite a fórmula **=MÉDIA(A4 : A5)**.



A mediana obtida é 4,5.

2ª maneira:

A função **MED( )** serve para calcular a mediana de um conjunto de dados. Digite na célula **B10** o texto **Mediana (2)** e, na célula de baixo, digite a fórmula **=MED(A1 : A8)**.



Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

Novamente, o valor obtido para a mediana é 4,5.

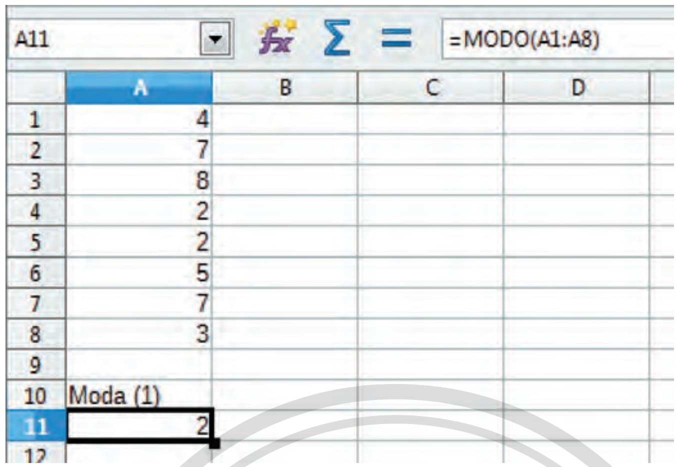
Para calcular a mediana usando a função **MED( )**, não é necessário organizar os dados em ordem crescente ou em qualquer ordem específica.

Moda

Vamos mostrar duas maneiras de obter a moda. Na primeira delas, no caso de haver mais de uma moda, apenas a menor é exibida. Na outra maneira, todas as modas são identificadas.

1ª maneira:

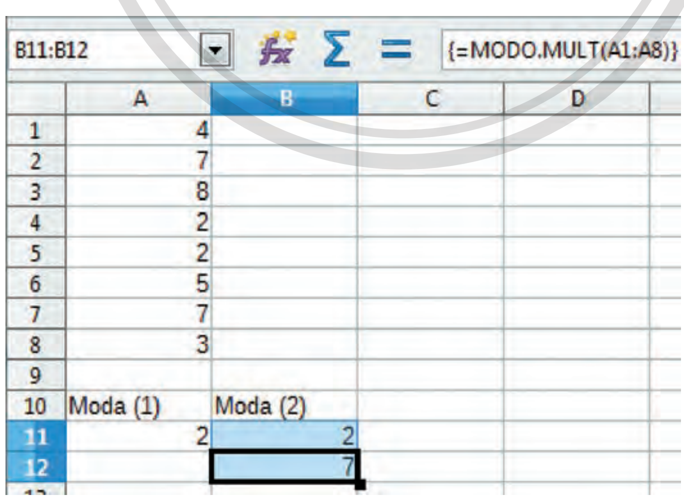
A função **MODO( )** serve para obter a menor moda de um conjunto de dados. Com o conjunto de dados inserido no intervalo de células **A1 : A8**, digite na célula **A10** o texto **Moda (1)** e, na célula de baixo, digite a fórmula **=MODO(A1 : A8)**.



Apesar de o conjunto de dados ser bimodal, com modas 2 e 7, o valor exibido foi a menor delas, ou seja, o número 2.

2ª maneira:

A função **MODO.MULT( )** serve para obter todas as modas de um conjunto de dados, porém, para que todas elas sejam exibidas nesse programa, deve ser usada a **fórmula de matriz**. Para isso, digite na célula **B10** o texto **Moda (2)** e, na célula de baixo, após digitar a fórmula **=MODO.MULT(A1 : A8)**, tecle **ENTER** com as teclas **SHIFT** e **CTRL** pressionadas.



Imagens: The Document Foundation/Acervo da produtora

A característica de uma fórmula de matriz é que o seu resultado pode ocupar mais de uma célula. No caso da fórmula que utilizamos, foram obtidos dois valores porque o conjunto de dados é bimodal.

Nesse programa, toda fórmula de matriz é exibida na linha de entrada entre chaves, porém não é possível inserir uma fórmula desse tipo digitando as chaves manualmente, pelo teclado.

Leitura e pesquisa

A seguir, apresentamos algumas sugestões de leitura e pesquisa em livros e *sites*. Os livros indicados abordam direta ou indiretamente os assuntos desenvolvidos no volume, e os *sites* podem fornecer informações valiosas para enriquecer seus conhecimentos.

Boa leitura e uma ótima pesquisa!

Livros:

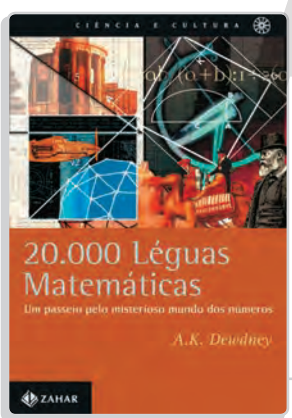
BARRELLA, Elaine Spisso; MARTINS, Laura Maria Runau (Orgs.).
A matemática nas profissões. São Paulo: Portal, 2010.
Esse livro apresenta diversas pesquisas e entrevistas de profissionais de variadas áreas que relatam como e para que utilizam a Matemática em suas profissões.

BENTLEY, Peter.
O livro dos números: uma história ilustrada da Matemática. Rio de Janeiro: Zahar, 2010.
Por meio de gravuras históricas, fotos e pinturas, esse livro mostra a presença da Matemática nas diversas áreas. Com linguagem acessível, o autor desvenda os segredos e os mistérios dessa área do conhecimento.

BERLINSKI, David.
O advento do algoritmo: a ideia que governa o mundo.
Tradução de Leila Ferreira de Souza Mendes. São Paulo: Globo, 2002.
Em capítulos curtos, o autor desse livro apresenta como a História, as Ciências e a Matemática contribuíram para o surgimento intrigante do algoritmo, antecipando ferramentas para o surgimento da era digital.

Record/Arquivo da editora

COLE, K. C. *O Universo e a xícara de chá*.
Tradução de Elizabeth Leal. Rio de Janeiro: Record, 2006.
Nesse livro, é possível enxergar a lógica matemática que passa despercebida em situações cotidianas. Com essa percepção, o autor convida o leitor a melhorar sua aptidão e lucidez para tomar importantes decisões.



Zahar/Arquivo da editora

DEWDNEY, Alexander Keewatin.
20 000 *léguas matemáticas*: um passeio pelo misterioso mundo dos números.
Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Zahar, 2000 (Ciência & cultura).
O livro é uma odisseia pela História da matemática, na busca de resposta para a questão "Por que tudo que existe, dos átomos ao próprio Universo, é regido por leis matemáticas?". Além disso, traz aplicações claras para mostrar o surpreendente poder da Matemática.

Editora 34/Arquivo da editora

DOXIADIS, Apostolos.
Tio Petros e a conjectura de Goldbach: um romance sobre os desafios de Matemática.
Tradução de Cristiane Gomes de Riba. São Paulo: Editora 34, 2001.
O livro narra a história de Petros Papachristos, que enlouqueceu depois de dedicar sua vida para solucionar o enigma "Todo número inteiro par maior do que 2 pode ser representado como a soma de dois números primos.". O problema, nomeado conjectura de Goldbach, ainda hoje, depois de 250 anos, é um dos mais intrigantes da matemática.

ENZENSBERGER, Hans Magnus.
O diabo dos números. Tradução de Sérgio Tellaroli. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.
Nesse livro, um menino descobre, durante doze sonhos, que os números não são monstros como ele imaginava, e o vilão da história é o medo que ele tem da Matemática. Nessa narrativa, a única ação diabólica do personagem Teplotaxl é desfazer a ideia de que matemática é apenas para gênios.

Garbi, Gilberto Geraldo.
A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
O livro relata de maneira simples e clara quatro milênios da História da matemática, sem preocupação com a linguagem matemática das fórmulas, pois podem ser entendidas no próprio contexto.

Guedj, Denis.
O teorema do papagaio.
Tradução de Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.
Nessa narrativa, o autor desafia a compreensão do pensamento matemático tanto para os personagens da história, uma família inusitada com seu papagaio, quanto para o leitor. Em seu contexto, ele apresenta alguns personagens históricos importantes para a matemática, como Tales, Pitágoras, Fermat, Euler e Tartaglia.

Companhia das Letras/Arquivo da editora

Mlodinow, Leonard.
A janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. Tradução de Enézio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2004.
De maneira clara e divertida, o livro mostra como a geometria intervém em tudo à nossa volta, mostrando que ela faz parte da arte, da música, da pintura, da escultura, da arquitetura e até mesmo do corpo humano.

Singh, Simon.
O último teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 7. ed. Tradução de Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Record, 2000.
O livro conta a história de diversos matemáticos que tentaram resolver o teorema que Fermat deixou sem descrever a solução. Nele também é apresentada a importância desse teorema para o desenvolvimento da matemática e como ele confundiu e frustrou mentes brilhantes por mais de 350 anos.

Smullyan, Raymond.
A dama ou o tigre? E outros problemas lógicos. Tradução de Helena Martins. Rio de Janeiro: Zahar, 2004.
O livro narra a história fictícia de uma princesa que soluciona diversos problemas lógicos matemáticos para que seu namorado não fosse morto. Seu pai, um rei semibárbaro, após descobrir o romance ordenou que o rapaz fosse julgado em sua arena, onde deveria escolher entre duas portas que decidiriam seu destino.

Zahar/Arquivo da editora

Smullyan, Raymond.
Alice no país dos enigmas: incríveis problemas lógicos no país das maravilhas. Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Zahar, 2000.
O livro insere os personagens do original *Alice no país das maravilhas* em situações de jogos, problemas lógicos e paradoxos, propondo enigmas que convidam o leitor a refletir sobre a vida e as dificuldades de saber o que é real ou não e diferenciar o certo do errado.

Smullyan, Raymond.
O enigma de Sherazade: e outros incríveis problemas das mil e uma noites à lógica moderna. Tradução de Sérgio Flaksman. Rio de Janeiro: Zahar, 1998.
Nesse livro, a partir da milésima segunda noite, a jovem Sherazade desafia o sultão com charadas, enigmas matemáticos e lógicos, distraindo-o para não ter sua cabeça decaptada.

Strathern, Paul.
Pitágoras e seu teorema de 90 minutos. Tradução de Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Zahar, 1998 (Cientistas em 90 minutos).
Pitágoras, considerado o primeiro gênio da cultura ocidental, é apresentado nesse livro por meio de textos divertidos, citações e cronologia que integram um panorama de sua vida, suas descobertas e excentricidades.

Zahar/Arquivo da editora

Difel/Arquivo da editora

SZIPIRO, George.
A vida secreta dos números: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos. Tradução de J. R. Souza. Rio de Janeiro: Difel, 2008.
O livro mostra por meio de particularidades curiosas como a matemática afeta os mais diversos aspectos de nossas vidas, que vão do direito até a botânica. Ele busca desmistificar a Matemática como uma "ciência inatingível" e apresentar os prazeres que ela pode proporcionar no dia a dia de qualquer pessoa.

TAHAN, Malba.
Os números governam o mundo: folclore da Matemática. Rio de Janeiro: Ediouro, 1998.
O livro apresenta simbologias, mistérios e algumas origens místicas envolvendo os números, com base na citação de Pitágoras de que "os números governam o mundo".

TAHAN, Malba.
O homem que calculava. 40. ed. Rio de Janeiro: Record, 1995.
O livro narra a história de um sábio calculista persa que, durante suas viagens, resolve problemas e enigmas aparentemente sem solução. As respostas que ele encontra para os problemas deixam os expectadores maravilhados.


Arte & Matemática/Fac-símile: ID/BR

Sites

Todos os *sites* foram acessados em: 30 abr. 2016.

Arte & Matemática. Disponível em: <http://linkte.me/e19di>.
O *site* traz explicações sobre conceitos matemáticos de acordo com períodos e/ou temas, associando-os à arte em geral.

Banco Internacional de Objetos Educacionais. Disponível em: <http://linkte.me/jgfz7>.
O *site* contém áudios, experimentos práticos, animações, vídeos e *softwares* educacionais de diversos conteúdos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

Brasil Escola. Disponível em: <http://linkte.me/vj7c1>.
O *site* fala sobre o que é a matemática e para que ela é utilizada. Em uma coluna denominada "canais da matemática", há uma série de temas, com explicações e exercícios.


Banco Internacional de Objetos Educacionais/Fac-símile: ID/BR

ENEM. Disponível em: <http://linkte.me/q28ny>.
Nesse *site* é possível acessar as provas e os gabaritos do ENEM de anos anteriores, além de obter informações a respeito de resultados do candidato.

Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: <http://linkte.me/c39d3>.
Nesse *site* é possível acessar as provas e os gabaritos da OBM de anos anteriores. Também há tópicos sobre como se preparar para as competições, quem são os organizadores, o calendário das provas, os regulamentos, entre outros.

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Disponível em: <http://linkte.me/dpo1a>.
Nesse *site* é possível acessar as provas e as soluções, o banco de questões, as apostilas e os vídeos. Também há tópicos sobre as escolas inscritas, as cerimônias nacionais de premiação, o calendário, os regulamentos, as dúvidas sobre o regulamento e a competição, entre outros.

Olimpíada Brasileira de Matemática/Fac-símile: ID/BR

Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio. Disponível em: <http://linkte.me/q5rik>.
O *site* possui experimentos, vídeos, áudios e *softwares* que podem ser acessados tanto por essas categorias quanto por temas específicos.

Gabarito

unidade 1

capítulo 1 Conjuntos

1. a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.
c) $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$
d) $D = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

2. a) Possíveis respostas:
I) $P = \{x \mid x \text{ é inteiro negativo e } x > -10\}$
II) $Q = \{4y \mid y \text{ é natural e } 5 \leqslant y \leqslant 10\}$
b) Os conjuntos P e Q são finitos.

4. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $B = \{1, -2, 4, -8, 16\}$
c) $C = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$
d) $D = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

5. a) $333 \notin A$; $333 \notin B$
b) $80 \notin A$; $80 \in B$
c) $55 \in A$; $55 \in B$
d) $\sqrt{225} \notin A$; $\sqrt{225} \in B$
e) $99 \in A$; $99 \notin B$
f) $7 \notin A$; $7 \notin B$

6. a) Falsa.
b) Verdadeira.
c) Falsa.
d) Verdadeira.

7. a) $\{1\}, \{4\}, \{9\}, \{1, 4\}, \{1, 9\}, \{4, 9\}, \{1, 4, 9\}$
b) $\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 8\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 8\}, \{2, 6, 8\}, \{4, 6, 8\}, \{2, 4, 6, 8\}$

8. a) Falsa. b) Verdadeira. c) Falsa. d) Verdadeira. e) Falsa. f) Falsa.

9. Alternativa **b**.

10. a) $A \cap B \cap C$
b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
c) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

11. 16 famílias.

12. a) 48 pessoas.
b) 9 pessoas.
c) 15 pessoas.

13. a) $B \cup C = \{-1, 0, 3, 6, 7, 9, 11\}$
b) $A \cap B = \{6, 11\}$
c) $(C \cap A) \cup B = \{-1, 0, 3, 6, 7, 11\}$
d) $B \cap (C \cup A) = \{0, 6, 11\}$
e) $A - C = \{4, 11\}$
f) $C - (B \cup A) = \{9\}$

14. a) $A - B = \{1, 4\}$
b) $A - C = \varnothing$
c) $(B - C) \cup A = \{1, 4, 16, 24, 32, 40\}$
d) $\complement_C^A = \{2, 8\}$

15. a) $\{-3, 3\}$
b) $\{-3, -1, 0, 2\}$
c) $\{-3, -2, -1, 0, 2\}$
d) $\{-2, -1, 0\}$

16. a) Item **I**.
b) • Possíveis respostas: trapézio; losango.
• Possível resposta: trapézio.
• Possível resposta: quadrado.

17. Alternativa **b**.

18. a) $n(B) = 6$ b) $n(B - A) = 3$ c) $n(A \cap C) = 0$

19. a) $A \times A = \{(-2, -2), (-2, 1), (1, -2), (1, 1)\}$
b) $B \times A = \{(1, -2), (1, 1), (3, -2), (3, 1), (4, -2), (4, 1)\}$

20. a) 33 clientes. b) R$ 99 165,00

21. Alternativa **b**.

22. Alternativa **c**.

23. 18 pessoas.

24. Alternativa **e**.

26. a) Número inteiro: 2. Possíveis respostas para um número racional: $\frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{11}{5}$.
b) Número inteiro: -5. Possíveis respostas para um número racional: $-\frac{51}{10}, -\frac{9}{2}, -\frac{21}{5}$.

27. $A = -\frac{15}{4}$; $B = -1{,}5$; $C = 0{,}\overline{3}$; $D = \sqrt{2}$; $E = \sqrt{5}$; $F = \pi$; $G = 4$

28. Possíveis respostas:
a) $\mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}^c$
b) $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
c) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z}_-$ ou $\mathbb{Z}_- \not\subset \mathbb{N}$
d) $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Q}^*$ ou $\mathbb{Q}^* \not\subset \mathbb{Z}^*$
e) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$

29. a) 3 elementos: 0,1 e 2.
b) 5 elementos: -2, -1, 0, 1 e 2.
c) Infinitos elementos.
d) Infinitos elementos.

30. a) 5; 1 004; $\frac{88}{11}$
b) -4; 5; 1 004; $(-2)^7$; $\frac{88}{11}$
c) -4; $\frac{1}{3}$; 5; $24{,}\overline{75}$; 1 004; $-15{,}5$; $(-2)^7$; $\frac{88}{11}$
d) $\sqrt{2}$; π

31. a) $h = \sqrt{5}$
b) Respostas esperadas: $\mathbb{Q}^c$ ou $\mathbb{R}$.
c) Sim.

32. a) $\frac{312}{5}$ b) $\frac{45}{99}$ c) $\frac{211}{22}$

33. a) $0,\overline{84}$
b) $13,58\overline{6}$
c) $16,\overline{6}$

34. Alternativa **e**.

35. $x = 11$

36. a) Aos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.
b) O conjunto $\mathbb{N}$.
c) Não.

37. $A = [-5, -2]$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 21\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0\}$; $D =]-2, 0[$; $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$; $F =]0, +\infty[$

39. a) 3, 4 e 5 c) 0, 1 e 2
b) 6, 7, 8, 9, 10 d) -4, -3 e -2

40. Alternativa **a**.

41. a) $A \cup B =]-\infty, 6]$; $A \cap B = [-1, 2[$
b) $A \cup B = [0, 5[$; $A \cap B = [1, 4]$
c) $A \cup B =]\sqrt{2}, \pi]$; $A \cap B = [2, 3]$
d) $A \cup B = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$; $A \cap B = \left[\frac{2}{3}, 4\right]$

42. a) $A - C = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq 5\}$
b) $A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq 3\}$
c) $B - C = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 5 \text{ ou } x > 7\}$
d) $B - A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$

43. a) coeficientes: $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$; incógnita: x
b) coeficientes: $a = 1$, $b = 5$, $c = 0$; incógnita: y
c) coeficientes: $a = 2$, $b = -4$, $c = -6$; incógnita: x
d) coeficientes: $a = 2$, $b = -5$, $c = 2$; incógnita: z

44. a) $S = \{-3\}$
b) $S = \{2\}$
c) $S = \left\{\frac{5}{6}\right\}$
d) $S = \{5 + \sqrt{7}\}$
e) $S = \{8\}$

45. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 18\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0,5\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -11\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{6}\right\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4\}$

46. a) $5 + 2 + x < 3 + 5x$; $x > 1$ b) 1 kg

47. Alternativa **d**.

48. a) $6 + 5x + (6 - x) = (1 + 2x) + 4x + 5 + 3$; $x = \frac{3}{2}$; 18 m
b) $4(y - 2) = 2\left(\frac{y}{2} + 1\right) + 2 \cdot 7$; $y = 8$; 24 m

49. a-III, b-II; c-I

50. a) $k < 4$ b) $k = 4$ c) $k > 4$

51. a) $A_s = 2x^2 + 50x$
b) Para $x_1 = 10$, a base possui 30 cm e a altura 20 cm.
Para $x_2 = 15$, a base possui 20 cm e a altura 30 cm.

52. a) Verdadeira.
b) Falsa.
c) Verdadeira.

53. $m = 14$ ou $m = 2$

54. a) $S = \{-8, 3\}$
b) $S = \{-10, 2\}$
c) $S = \varnothing$
d) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$
- Conjunto solução unitário: item **d**;
- conjunto solução vazio: item **c**.

55. 196 m^2

56. a) 6 trabalhadores. b) R$ 1 800,00

57. Alternativa **a**.

capítulo 2 Funções

1. a) Variável dependente: salário da vendedora (S); variável independente: valor total arrecadado (v). $S(v) = 0,1v$
b) Variável dependente: valor gasto com ligações locais (V); variável independente: quantidade de minutos utilizados com ligações locais (t). $V(t) = 0,30t$
c) Variável dependente: quantidade de tinta (T); variável independente: área da parede a ser pintada (a). $T(a) = 100a$

2. a) $y(x) = 18x$
b)
- 5 potes: R$ 90,00
- 6 potes: R$ 108,00
- 8 potes: R$ 144,00
- 9 potes: R$ 162,00

3. a) $V(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
b)
- $V(1) = 27$ m^3;
- $V(13) = 3\,375$ m^3;
- $V(52) = 157\,464$ m^3;
- $V(41) = 79\,507$ m^3

c) Sim. $V(0) = 8$ m^3
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

4. Alternativa **c**.

5. a) Variável dependente: quantia a ser paga pelo proprietário ao recuperar o automóvel guinchado (P); variável independente: tempo de permanência do automóvel no pátio do Detran (q).

b) R$ 1 281,78

c) 36 dias

8. Itens **a**, **c**.

9. Alternativa **c**.

10. $Im(f) = \{0, 1, 4, 9, 16\}$

11. a) Falsa.

b) Falsa.

c) Verdadeira.

d) Falsa.

12. a) $Im(h) = \left[\frac{1}{2}, 4\right]$

b) $h(-1) = \frac{1}{2}$

c) $h(0) = 1$

d) $h(2) = 4$

13. a) $A = \mathbb{R}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\}$

d) $A = \mathbb{R}$

14. P: 3º quadrante; Q: 1º quadrante; R: 4º quadrante; S: 2º quadrante

15. Os pontos $C(1, -2)$, $E(1, 0)$ e $J(-4, 0)$.

16. $B(-10, 1)$ e $C(-2, 7)$

18. Alternativa **a**.

19. $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\text{Im}(f) = [-1, 1]$

20. a) R$ 21,90

b) 50 m

c) Gráfico **III**.

21. Alternativa **d**.

22. Possíveis respostas:

a) crescente: $[-4, 0]$ e $[3, 4]$; decrescente: $[0, 3]$; constante: $[4, 6]$

b) crescente: $[0, 2]$, constante: $[-4, 0]$

c) crescente: $[-3, 0]$, decrescente: $[0, 3]$

d) crescente: $[-2, 3]$

23. a) 1 e -1 são zeros da função f.

b) 2 é zero da função g.

c) -2, 0 e 2 são zeros da função h.

d) Nenhum elemento de D é zero da função p.

24. a) É injetora e sobrejetora, logo é bijetora.

b) É injetora mas não é sobrejetora, logo não é bijetora.

c) É injetora e sobrejetora, logo é bijetora.

25. a) É injetora e sobrejetora, logo é bijetora.

b) É sobrejetora, mas não é injetora, logo não é bijetora.

c) É injetora, mas não é sobrejetora, logo não é bijetora.

26. a) Falsa.

b) Verdadeira.

c) Verdadeira.

d) Falsa.

27. a) É injetora e sobrejetora, logo é bijetora.

b) É sobrejetora, mas não é injetora, logo não é bijetora.

c) É injetora, mas não é sobrejetora, logo não é bijetora.

d) Não é injetora e nem sobrejetora, logo não é bijetora.

28. Alternativa **e**.

29. a) $g(f(x)) = -x^2 + 5x - 4$

b) $f(g(x)) = x^2 - 3x + 4$

c) $f(f(10)) = 10$

d) $g(f(10)) = -54$

30. $x = -\frac{3}{2}$

31. -1

32. a) $g(x) = -2x + 5$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

33. a) $q(x) = 2x$; $p(q) = 40q$

b) $(p \circ q)(x) = 80x$

c) R$ 320,00

34. a) Não é bijetora, pois não é sobrejetora.

b) Não é bijetora, pois não é injetora.

c) A função $f \circ g$ é bijetora.

35. a) $L(q(t)) = 1\,250t^2 - 75t - 10$

b) R$ 30 865,00

36. Alternativa **b**.

capítulo 3 Função afim

1. As leis de formação **II** e **III** não podem ser escritas na forma $f(x) = ax + b$, com a, $b \in \mathbb{R}$.

b) **I**: decrescente; **IV**: decrescente.

2. a) $q(t) = 10\ 000 - 5t$

b) $p(q) = 3{,}25q$

c) $c(m) = 60 + 12m$

3. a) $v(t) = 1{,}6t$

b) $D(v) = [0,\ 12]$

c) Aproximadamente em 10 segundos.

4. a) 6 km: R$ 21,00; 10 km: R$ 32,00

b) $p(q) = 4{,}5 + 2{,}75q$

5. Alternativa **e**.

6. a) empresa **A**: $800\,000 + 220\,000x$; empesa **B**: $400\,000 + 240\,000x$

b) empresa **A:**

- 10 km: R$ 3 000 000,00
- 5 km: R$ 1 900 000,00
- 70 km: R$ 16 200 000,00

empresa **B:**

- 10 km: R$ 2 800 000,00
- 5 km: R$ 1 600 000,00
- 70 km: R$ 17 200 000,00.

c) Sim. R$ 5 200 000,00.

d) A empresa **A**.

7. a) $v(q) = 500 + 0{,}35q$

b)
- 70 km: R$ 524,50
- 10 km: R$ 503,50
- 150 km: R$ 552,50
- 65 km: R$ 522,75

8. crescente: **a**; decrescente: **c**, **d**; constante: **b**.

9. a) zero da função f: -3; ordenada do ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Oy: 3

b) zero da função g: $\frac{1}{5}$; ordenada do ponto de intersecção do gráfico de g com o eixo Oy: 1

c) zero da função h: 12; ordenada do ponto de intersecção do gráfico de h com o eixo Oy: -8

d) zero da função m: 6; ordenada do ponto de intersecção do gráfico de m com o eixo Oy: 12

10. b) eixo Ox: $(-2, 0)$, $(6, 0)$; eixo Oy: $(0, 4)$

c) Possíveis respostas: crescente: $[-3{,}0]$; decrescente: $[4{,}8]$; constante: $[0{,}4]$

11. a) compra: $c(x) = 3{,}2094x$; venda: $c(x) = 3{,}2088x$

b) Crescentes.

12. Sim.

13. a) $f(x) = \begin{cases} 0{,}08x, \text{ se } x \leqslant 1\,399{,}12 \\ 0{,}09x, \text{ se } 1\,399{,}13 \leqslant x \leqslant 2\,331{,}88 \\ 0{,}11x, \text{ se } 2\,331{,}89 \leqslant x \leqslant 4\,663{,}75 \\ 513{,}01, \text{ se } x > 4\,663{,}75 \end{cases}$

b) Para R$ 1 550,89: R$ 139,58; Para R$ 890,13: R$ 71,21; Para R$ 3 340,56: R$ 367,46; Para R$ 6 133,03: R$ 513,01.

14. a) $n(x) = -\frac{2}{3}x + 4$

b) $p(x) = -\frac{2}{3}x - 1$

15. Alternativa **c**.

16. a) Aproximadamente 531 872 t.

b) Sim.

c) 2,6

17. a) $f(x) = 150x$

b) 12 meses.

18. a) 5

b) $\frac{3}{5}$

c) 0

19. a) $f(x) = 6{,}5x$

b) R$ 650,00

c) $a = 6{,}5$

20. a) $f(x) > 0$ para $x > \frac{3}{2}$; $f(x) = 0$ para $x = \frac{3}{2}$; $f(x) < 0$ para $x < \frac{3}{2}$

b) $f(x) > 0$ para $x > -2$; $f(x) = 0$ para $x = -2$; $f(x) < 0$ para $x < -2$

c) $f(x) > 0$ para $x < -4$; $f(x) = 0$ para $x = -4$; $f(x) < 0$ para $x > -4$

d) $f(x) > 0$ para $x > -6$; $f(x) = 0$ para $x = -6$; $f(x) < 0$ para $x < -6$

21. a) Crescente.

b) $x = -4$

d) $f(x) > 0$ para $x > -4$; $f(x) = 0$ para $x = -4$; $f(x) < 0$ para $x < -4$

22. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leqslant 5\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leqslant 9\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\}$

23. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{2} \leqslant x < 4\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant 9\}$

24. a) 7

b) $a = \frac{1}{2}$

25. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -2 < x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5 \text{ ou } x > 13\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -1 \text{ ou } x > 2\}$

26. a) R$ 1 488,00

b) R$ 1 260,00

c) R$ 1 227,00

27. 3 anos.

28. 7% ao ano.

29. a) r: $y = 3x + 2$

b) s: $y = \frac{1}{2}x - 1$

c) t: $y = \frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$

30. a) $f(t) = -\frac{1}{2}t + 100$; $g(t) = -\frac{1}{3}t + 80$

b) bateria A_1: 200 min; bateria A_2: 240 min

31. $x = 3$; $y = 3$

32. Possíveis respostas:

a) $\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ -\frac{1}{3}x + y = \frac{4}{3} \end{cases}$

33. a) SPD

b) SI

c) SPD

d) SPI

34. x: preço da bermuda

y: preço da camisa

a) $\begin{cases} 2y + 3x = 230 \\ y + 4x = 240 \end{cases}$

b) preço da bermuda R$ 50,00; preço da camisa R$ 40,00

35. a) 75 pontos.

b) Acertou 13 questões e errou ou não respondeu 12 questões.

capítulo 4 Função modular

1. a) 9

b) 5

c) 12

d) 9

2. a) $S = \{-7, -3\}$

b) $S = \{-4{,}8; 4{,}8\}$

c) $S = \{4, 12\}$

d) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$

3. a) $S = \{8\}$

b) $S = \{-3, 3\}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \{-14, 14\}$

4. a) $f(0) = 3$; $f(-1) = 1$; $f\left(-\frac{3}{4}\right) = 0$; $f(5) = 23$

b) $f(x) = \begin{cases} 4x + 3, \text{ se } x \geqslant -\frac{3}{4} \\ -4x - 3, \text{ se } x < -\frac{3}{4} \end{cases}$

c) $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$

5. a) $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$

b) $D(h) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(h) = \mathbb{R}_+$

c) $D(g) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(g) = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 1\}$

6. Alternativa **b**.

7. Alternativa **c**.

8. Alternativa **a**.

capítulo 5 Função quadrática

1. a) Não é função quadrática.

b) É função quadrática.

c) Não é função quadrática.

d) É função quadrática.

2. a) $a = 1$, $b = -4$ e $c = 8$

b) $a = 2$, $b = -3$ e $c = 5$

c) $a = 1$, $b = -6$ e $c = 3$

d) $a = -1$, $b = 10$ e $c = -25$

3. a) $k \in \mathbb{R}^*$

b) $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 2$

c) $k \in \mathbb{R}^*$

d) $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq -5$

4. a) 64

b) 34

c) 175

d) 119

5. $f(x) = x^2 - 2x - 15$; zeros: $x_1 = 5$ e $x_2 = -3$.

6. a) As funções g e q.

b) As funções f e h.

c) As funções p e t.

7. a) 9 e 11; soma 20

b) $f(x) = x^2 - 20x + 99$

8. $f(x) = x^2 + 17x - 84$

9. a) $A(x) = \frac{x^2 + 7x}{2}$

b) $x = 3$ m

c) $A = 39$ m^2

10. a) $x_1 = 2$; $x_2 = -2$

b) Não possui zero.

c) $x_1 = 6$; $x_2 = 2$

d) $x_1 = 5$; $x_2 = -4$

11. Alternativa **a**.

12. Alternativa **a**.

13. $k = 7$; raízes: 3 e 6.

14. a) $f(x) = (x - 2)^2 - 1$

b) $f(x) = -2(x - 2)^2 + 2$

c) $f(x) = -\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$

d) $f(x) = \frac{(x - 5)^2}{3} - \frac{10}{3}$

15. a) $f(x) = x^2 + 4x + 43$

b) $f(x) = -5x^2 + 20x - 8$

c) $f(x) = 2x^2 - 28x$

d) $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$

16. Alternativa **c**.

17. Alternativa **a**.

18. a) $V(0, 0)$; eixo de simetria: $x = 0$

b) $V(1, 1)$; eixo de simetria: $x = 1$

19. a) Concavidade voltada para baixo.

b) Concavidade voltada para cima.

c) Concavidade voltada para cima.

d) Concavidade voltada para baixo.

20. a) O módulo do coeficiente a.

b) Maior abertura: gráfico da função $p(x) = \frac{1}{10}x^2$; menor abertura: gráfico da função $f(x) = 10x^2$

21. Alternativa **e**.

22. Possível resposta: maior abertura: $g(x) = -x^2$; menor abertura: $g(x) = -5x^2$.

23. $g(x) = (x - 3)^2 + 2$; $h(x) = (x + 3)^2 - 2$

a) $m = -3$; $k = -2$

b) $V_f(0, 0)$; $V_g(3, 2)$; $V_h(-3, -2)$

c) Os valores m e k correspondem, respectivamente, ao x_v e ao y_v.

24. $f(-3) = 4$; $f(2) = 9$

25. a) $(0, 3)$

b) $(0, -1)$

c) $(0, -16)$

d) $(0, 0)$

26. 3

27. a) O gráfico de g corresponde ao gráfico de f transladado horizontalmente uma unidade para a direita e o gráfico de h corresponde ao gráfico de f transladado horizontalmente uma unidade para a esquerda.

b) O gráfico de q corresponde ao gráfico de p transladado verticalmente duas unidades para cima e o gráfico de r corresponde ao gráfico de p transladado verticalmente três unidades para baixo.

c) $g(x) = (x - 1)^2$; $h(x) = (x + 1)^2$; $q(x) = -x^2 + 2$; $r(x) = -x^2 - 3$

28. a) $f(x) = x^2 - 8x + 18$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 14$

c) $f(x) = 2x^2$

29. a) $V_f(1, -2)$

b) $V_g(-5, 0)$

c) $V_h(-1, 9)$

d) $V_p(3, -2)$

30. a) Falsa.

b) Falsa.

c) Verdadeira.

d) Falsa.

31. a) Concavidade voltada para cima: f e h.

Concavidade voltada para baixo: g e p.

b) f: não possui zero; $V_f = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

g: $x_1 = -\sqrt{3}$ e $x_2 = \sqrt{3}$; $V_g(0, 3)$

h: $x_1 = 4$ e $x_2 = -6$; $V_h\left(1, -\frac{25}{2}\right)$

p: $x_1 = x_2 = 5$ e $V_p(5, 0)$

c) Gráfico de f: não intersecta o eixo Ox e intersecta o eixo Oy em $(0, 1)$; gráfico de g: intersecta o eixo Ox em $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ e $\left(\sqrt{3}, 0\right)$ e o eixo Oy em $(0, 3)$; gráfico de h: intersecta o eixo Ox em $(-6, 0)$ e $(4, 0)$ e o eixo Oy em $(0, -12)$; gráfico de p: intersecta o eixo Ox em $(5, 0)$ e o eixo Oy em $(0, -5)$.

32. a) $x_v = \frac{1 + (-3)}{2} = -1$

b) $x_v = \frac{3 + 3}{2} = 3$

c) $x_v = \frac{0 + (-7)}{2} = -\frac{7}{2}$

d) $x_v = \frac{4 + 28}{2} = 16$

33. a) Em um ponto.

b) Em dois pontos.

c) Em nenhum ponto.

d) Em dois pontos.

34. $(5, 7)$; $(3, 1)$

35. a) $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{5}{2}\right\}$

b) $Im(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -3\right\}$

c) $Im(h) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\right\}$

d) $Im(p) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 5\right\}$

36. Alternativa **d**.

37. a) $a < 0$; $\Delta > 0$

b) $a > 0$; $\Delta < 0$

c) $a > 0$; $\Delta = 0$

d) $a < 0$; $\Delta = 0$

38. Admite valor máximo: item **c**; admitem valor mínimo: itens **a**, **b** e **d**.

39. A função f possui valor mínimo quando $k > -\frac{1}{3}$ e valor máximo quando $k < -\frac{1}{3}$.

40. Alternativa **b**.

41. a) $f(x) > 0$ para $x < -5$ e $x > -1$; $f(x) = 0$ para $x = -5$ e $x = -1$; $f(x) < 0$ para $-5 < x < -1$

b) $g(x) > 0$ para $-1 < x < 2$; $g(x) = 0$ para $x = -1$ e $x = 2$; $g(x) < 0$ para $x < -1$ e $x > 2$

c) $h(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

d) $p(x) = 0$ para $x = 1$; $p(x) < 0$ para $x \neq 1$

42. a) • 1 s após o lançamento: 75 m.
• 2 s após o lançamento: 140 m.
b) 320 m
c) 16 s

43. $k < \frac{5}{3}$

44. a) 13 clientes.
b) 26 clientes.

45. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 3\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leqslant x < -1 \text{ ou } x > 1\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \text{ ou } x > 3\right\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 1\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0\}$

46. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

unidade 3

capítulo 6 Função exponencial

1. a) 81
b) 64
c) 125
d) 144
e) 343
f) 1 000 000

2. a) 2^5
b) 2^{-7}
c) 2^2
d) 2^{-3}

3. $\frac{1}{729}$

4. Alternativa **a**.

5. a) $3^{-2}, 3^{-1}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, 3^2$
b) $4^{-3}, 4^{-\frac{1}{2}}, 4^{\frac{1}{2}}, 4^2$

6. a) 4
b) 243
c) 3
d) 0

7. a) 2
b) 27
c) 5
d) -15

8. Aproximadamente 2 000 000 grãos.

9. $\frac{1}{49}$

10. Alternativa **a**.

11. 10^{11}

12. Alternativa **c**.

13. a) $4 \cdot 10^{-4}$
b) $5{,}348 \cdot 10^3$
c) $4 \cdot 10^8$
d) $5{,}6 \cdot 10^{-6}$

14. São exponenciais as funções dos itens **a**, **c**, **d**, **e**.

15. a) 1
b) $\frac{1}{16}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}$

16 Alternativa **d**.

17. Alternativa **c**.

18. $D(f) = \{1, 2, 3\}$; $CD(f) = \{2, 4, 8\}$; $f(x) = 2^{4-x}$

19. crescente: **a**, **c**, **f**; decrescente: **b**, **d**, **e**

20. Alternativa **d**.

21. Os gráficos **I** e **III**.

23. Gráfico **III**.

24. Alternativa **c**.

25. a) $x = \frac{1}{2}$
b) $x = \frac{3}{10}$
c) $x = 4$
d) $x = \frac{1}{3}$

26. a) $x = \frac{4}{5}$; $y = -\frac{16}{5}$; $S = \left\{\left(\frac{4}{5}, -\frac{16}{5}\right)\right\}$
b) $x = 1$; $y = 2$; $S = \{(1, 2)\}$

27. Alternativa **b**.

28. a) $x = \frac{1}{2}$; $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
b) $x = -2$; $S = \{-2\}$
c) $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = 1$; $S = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$

29. $A(1, 7)$

30. A equação apresenta duas soluções reais.

31. Alternativa **c**.

32. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geqslant -\frac{3}{2}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < -\frac{9}{2}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 6\}$

33. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geqslant -\frac{11}{5}\right\}$

34. Alternativa **d**.

35. Alternativa **a**.

36. a) $x = 15$

b) 10º dia

37. a-III

b-I

c-IV

d-II

38. a) R$ 110 000,00

b) R$ 27 500,00

39. a) R$ 4 158,04

b) R$ 4 435,43

40. a) 1º mês: R$ 1 005,00; 2º mês: R$ 1 110,53; 3º mês: R$ 1 216,58

b) R$ 1 218,09

41. a) $p(t) = 900 \cdot (1{,}03)^t$

b) 2020: aproximadamente 938 bilhões de dólares; 2035: aproximadamente 1 532 bilhões de dólares

42. a) Resposta pessoal.

b) Aplicação A: aproximadamente R$ 3 943,89

Aplicação B: aproximadamente R$ 3 932,60

Aplicação C: aproximadamente R$ 3 920,00

O investidor teria o maior montante com a aplicação A.

43. Alternativa **c**.

capítulo 7 Função logarítmica

1. a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{4}$

c) -3

d) -8

2.
- O ponto A corresponde ao $\log_{\frac{1}{3}} 3$.
- O ponto B corresponde ao $\log_{16} 4$.
- O ponto C corresponde ao $\log 10$.
- O ponto D corresponde ao $\log_7 49$.
- O ponto E corresponde ao $\log_4 64$.

3. a) 2

b) $-\frac{15}{2}$

c) 7

4. a) $x > -1$

b) $-3 < x < 1$

c) $x > 0$ e $x \neq \frac{1}{8}$

d) $x > 3$

5. Alternativa **e**.

6. a) $\log_6 40$

b) $\log_2 \left(\frac{3}{4}\right)$

c) $\log_{\sqrt{2}} \left(\frac{7^2}{9^5}\right)$

d) $\log 32\,805$

7. a) Aproximadamente 1,38.

b) Aproximadamente 1,653.

c) Aproximadamente 1,176.

d) Aproximadamente 0,778.

8. Aproximadamente 0,391.

9. a) $\frac{\log 9}{\log 5}$

b) $\frac{\log 7}{\log 3}$

c) $\frac{\log 3}{\log 2}$

10. a) Aproximadamente 3,907.

b) Aproximadamente 3,169.

c) Aproximadamente 1,893.

d) Aproximadamente 2,047.

11. Alternativa **b**.

12. Alternativa **a**.

13. a) Chile: aproximadamente 9,5; Estados Unidos: aproximadamente 9,2; Haiti: aproximadamente 7; Indonésia: aproximadamente 9,1

b) Chile, Estados Unidos e Indonésia.

14. a) $f^{-1}(x) = \frac{x - 2}{3}$

b) $f^{-1}(x) = x^3 + 4$

c) $f^{-1}(x) = 8 - \frac{7}{x}$

d) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x - 5}{4}}$

e) $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x - 3^2}{2}}$

f) $f^{-1}(x) = \frac{5}{x^2} + 6$

16. a-**III**; b-**II**; c-**IV**; d-**I**

17. a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \dfrac{3}{2}\right\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ e } x \neq 5\}$

d) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > 1 \text{ e } x \neq \dfrac{3}{2}\right\}$

18. a) 5

b) 2

c) 3

d) 6

e) -1

f) 4

19. Alternativa **d**.

20. Alternativa **a**.

21. a) Crescente.

b) Decrescente.

c) Decrescente.

d) Crescente.

22. a) Crescente.

b) Descrescente.

24. Alternativa **c**.

25. a) $S = \{60\}$

b) $S = \{10\}$

c) $S = \{1{,}7\}$

d) $S = \{5\}$

26. a) $S = \{5\}$

b) $S = \{2^{27}\}$

c) $S = \left\{\dfrac{1}{2}, 4\right\}$

27. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{2}{5} < x < \dfrac{6}{5}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

28. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \dfrac{9}{16}\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 8 < x < 24\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \dfrac{32}{3}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 1 < x \leqslant \dfrac{9}{8}\right\}$

29. Alternativa **c**.

30. $t \simeq 1{,}71$ h

capítulo 8 Sequências e progressões

1. a) 3, 4, 5, 6 e 7

b) 3, 5, 7, 9 e 11

c) 8, 16, 32, 64 e 128

d) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}$ e $\dfrac{1}{5}$

2. a) $a_n = n$, com $n \in \mathbb{N}^*$

b) $a_n = 4n$, com $n \in \mathbb{N}^*$

c) $a_n = 2n - 2$, com $n \in \mathbb{N}^*$

3. 45

4. a) 10

b) 8

c) $\dfrac{1}{6}$

d) 96

e) 32

f) 4

5. a) $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) 36 pontos.

c) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 e 36

6. a) 27 triângulos.

b) $a_n = 3^{n-1}$

7. Alternativa **d**.

8. a) 4 discos: 15; 5 discos: 31

b) $a_n = 2^n - 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$

9. As sequências dos itens **a**, **c**, **e**.

10. a) $r = 4$; crescente

b) $r = -8$; decrescente

c) $r = 0$; constante

d) $r = 7$; crescente

e) $r = \dfrac{1}{2}$; crescente

11. 5, 16, 27, 38, 49 e 60

12. 48 cm

13. 190

14. 12

15. 2

16. 7

17. 179 múltiplos.

18. 6 meios.

19. Alternativa **b**.

20. Alternativa **c**.

21. a) $x + (n - 1)y$

b) $x =$ R$ 48,00; $y =$ R$ 72,00

c) R$ 1 848,00

22. a) 215

b) 540

c) 80

d) 120

23. a) $x = 3$; $S_5 = 50$

b) $x = 2$; $S_5 = 20$

c) $x = 9$; $S_6 = 48$

d) $x = -1$; $S_5 = -10$

24. $S_{25} = 1700$

25. 61 termos.

26. R$ 1 480,00

27. $n^2 + n$

28. n^2

29. Alternativa **d**.

30. a) 210 alunos.

b) 12 fileiras.

31. a) 11 semanas.

b) 500 m

32. a) $(14, 30, 46, 62, \ldots)$

b) $a_n = 14 + (n - 1) \cdot 16$

33. Alternativa **b**.

34. $a_n = 2n - 1$; $f(x) = 2x - 1$

35. a) 10

b) $-\frac{1}{5}$

c) -2

d) -1

e) 3

f) $\frac{3}{5}$

36. a) Para $q = 2$: $x = 1$ e $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.
Para $q = -2$: $x = -5$ e $a_n = (-3) \cdot (-2)^{n-1}$.

b) $x = 7$; $a_n = 2^n$

c) $x = 9$; $a_n = (-3) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

37. $125, 25, 5, 1, \frac{1}{5}$ e $\frac{1}{25}$ ou $125, -25, 5, -1, \frac{1}{5}$, e $-\frac{1}{25}$

38. 11 termos.

39. a) 3

b) $\frac{1}{2}$

40. $a_1 = -8$; $a_2 = -2$; $a_3 = -\frac{1}{2}$

41. $a_{11} = 81$

42. a) $(65, 130, 260, 520)$

b) $\left(\frac{1}{2}, -3, 18\right)$

c) $\left(1000, 100, 10, 1, \frac{1}{10}\right)$

43. 5,2 UA

44. a) início da segunda semana: 500 insetos; início da quarta semana: 2 000 insetos

b) $(250, 500, 1000, 2000, 4000, 8000)$; $a_n = 250 \cdot 2^{n-1}$

45. Alternativa **e**.

46. Alternativa **e**.

47. Aproximadamente R$ 262 350,94.

48. $P_n = P_0 \cdot (1{,}07)^{n-1}$, com $1 \leqslant n \leqslant 24$

49. a) Representam uma PG.

b) Não representam uma PG.

c) Representam uma PG.

d) Representam uma PG.

50. 30

51. $Q_t = N_0 \cdot (0{,}96)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant n \leqslant 20$

52. $(a_{k+1})^2 = (a_k \cdot q)^2 = (a_k)^2 \cdot q^2 = a_k \cdot (a_k \cdot q^2) = a_k \cdot a_{k+2}$

53. $a_3 = a_3 \Rightarrow a_1 + 2r = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a_1 + 2r}{a_1} = q^2 \Rightarrow q^2 = 1 + \frac{2r}{a_1} \Rightarrow q = \pm\sqrt{1 + \frac{2r}{a_1}}$

54. a) 341

b) 255

c) 3 600

d) $\frac{21}{16}$

55. a) 1 093

b) $\frac{315}{16}$

c) 5 456

d) 513

e) 8 191

56. $(47, 235, 1175, 5875, 29375, 146875)$

57. a) 81 pontos.

b) 121 pontos.

58. $n = 7$

59. $q = \frac{1}{2}$

60. Os valores são aproximadamente: R$ 1100,00, R$ 1232,00, R$ 1379,84, R$ 1545,42, R$ 1730,87 e R$ 1938,58.

61. Alternativa **d**.

62. a) 24

b) $\frac{5}{4}$

c) $-\frac{80}{3}$

d) $\frac{64}{5}$

e) $\frac{50\,000}{49}$

63. $a_1 = 3$

64. 9 cm

65. a) $0,\overline{5}$

b) $\frac{5}{9}$

66. Alternativa **c**.

67. a) $\frac{13}{18}$

b) $\frac{34}{99}$

c) $\frac{53}{9}$

68. R$ 378,00

69. b) Os valores na coluna Quantidade de novos galhos formam uma PG. Os valores nas colunas Tempo e Altura formam uma PA.

c) PA na coluna Tempo: $r = 1$

PA na coluna Altura: $r = 40$

PG na coluna Quantidade de novos galhos: $q = 2$

d) 64 galhos; 280 cm

70. $q = 27$

71. a) $\frac{1}{4}; \frac{1}{128}; \frac{1}{4096}$

b) $\frac{1}{32}$

72. a) $D(f) = \mathbb{N}$; $\text{Im}(f) = \{1, 8, 64, \dots, 8^t, \dots\}$; $f(t) = 8^t$

b) $q = 8$

73. $a = 5$

74. Alternativa **b**.

75. a) $\frac{27}{125}$ u.a.

b) $\frac{3}{2}$ u.a.

76. I) Falsa.

II) Falsa.

II) Verdadeira.

capítulo 9 Estatística

1. a) População.

b) Amostra.

c) Amostra.

d) População.

2. a) Qualitativa ordinal.

b) Quantitativa discreta.

c) Qualitativa nominal.

d) Quantitativa contínua.

3. a) Jaquetas, camisetas, vestidos, calças.

b) Qualitativa nominal.

4. a) Nome, telefone, ano/série, turma, título do livro, autor do livro, data do empréstimo, data da devolução.

b) Quantitativa discreta: telefone; quantitativa contínua: data do empréstimo e data da devolução; qualitativa nominal: nome, título do livro, autor do livro; qualitativa ordinal: ano/série, turma.

5. Quantitativa discreta: idade, nível de satisfação do atendimento; qualitativa nominal: local de trabalho, preferência de comida; qualitativa ordinal: horário que frequenta o restaurante.

6. a) Universo estatístico: 400 alunos do cursinho; amostra: 150 alunos que responderam ao questionário.

b) 3 variáveis: curso de graduação, ofício e local de trabalho; qualitativa nominal.

c) Possíveis respostas: professor, advogado, administrador, educador físico.

7. a) Gráfico de barras.

b) Quantidade de brasileiros por cor ou raça no ano de 2010.

c) Branca e parda.

8. a) Falsa.

b) Falsa.

c) Verdadeira.

d) Falsa.

e) Verdadeira.

10. a) Gráfico de setores. Ele é mais adequado para representar a porcentagem e permite observar o todo e as partes.

b) 45,5 kg

11. Resposta pessoal.

12. a) Márcia.

b) Janeiro e fevereiro.

c) Maio.

13. a) Cavalo e lobo.

b) Aproximadamente 200 vezes.

c) Resposta pessoal.

14. 64, 70 e 73.

15. 149 600 000 km

16. 8,2 pontos.

17. $Mo = 1{,}62$; $Mo = 1{,}75$

18. Alternativa **e**.

19. Alternativa **e**.

20. 19

21. $\bar{x} = 231{,}3\bar{3}$; $Md = 214$; Amodal.

22. Alternativa **d**.

23. Cada gêmeo tem 10 anos.

24. Alternativa **a**.

capítulo 10 Trigonometria

1. $x = 6$; $y = 8$

2. $x = 6$

3. $x = 36$; $y = 54$; $z = 90$

4. $\overline{AB}$ mede 9 cm; $\overline{BC}$ mede 15 cm

5. 40 m

6. 2,5 m

7. a) Não é triângulo retângulo.

b) É triângulo retângulo.

c) Não é triângulo retângulo.

8. a) $h = 12$ cm

b) $m = 3$ cm; $a = 15$ cm

c) $n = 1{,}8$ u; $m = 3{,}2$ u; $h = 2{,}4$ u

9. Alternativa **d**.

10. a) $a = 12$ m; $b = 6\sqrt{3}$ m

b) $a \simeq 24{,}92$ m; $b \simeq 18{,}23$ m

c) $a \simeq 12{,}61$ m; $b \simeq 5{,}35$ m

11. a) Aproximadamente 52,7 m.

b) Aproximadamente 75,2 m.

12. a) 0,866

b) 0,9205

c) Aproximadamente 1,2349.

13. a) $\hat{x} = 60°$

b) Não, pois o ângulo de inclinação não está entre 70,5° e 75,5°.

14. a) 3 105,9 m

b) Aproximadamente 803,7 m.

15. $|\vec{b}| = 7{,}05$; $|\vec{c}| = 14{,}1$

16. 30,16 m

17. a) $x \simeq 18{,}79$ cm

b) $x = 5$ cm

c) $x \simeq 10{,}58$ cm

18. 131 m

19. Aproximadamente 9,7 cm.

20. Resposta esperada: Como os ângulos α e β e a distância entre os pontos de observação são conhecidos, podemos aplicar a lei dos senos.

21. $x \simeq 6{,}26$ m; $y \simeq 20{,}95$ m

22. Aproximadamente 1 034,6 m².

23. Alternativa **d**.

24. $c = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

25. Alternativa **c**.

26. $\left(210\sqrt{2} - 80\right)\text{m}^2$

27. 4 cm

28. Aproximadamente 75,95 m².

29. a) 77,175 m

b) 46,305 m

30. Resposta pessoal.

31. Aproximadamente 69,88 m².

32. a) $15\sqrt{3}$ cm²

b) 9 cm²

c) Aproximadamente $12{,}075\sqrt{2}$ cm².

Todos os *sites* foram acessados em: 5 abr. 2016.

- Cefet-MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
<http://linkte.me/e4dv4>.
- Enem/Inep – Exame Nacional do Ensino Médio/Instituto Nacional de Estudo e Pesquisa
<http://linkte.me/qwkgv>.
- EPCAr – Escola Preparatória de Cadetes do Ar
<http://linkte.me/b24ka>.
- EsPCEx – Escola Preparatória de Cadetes do Exército
<http://linkte.me/nrg66>.
- ESPM-SP – Escola Superior de Propaganda e Marketing de São Paulo
<http://linkte.me/j94zz>.
- ESPM-RJ – Escola Superior de Propaganda e Marketing do Rio de Janeiro
<http://linkte.me/j94zz>.
- Feevale – Universidade Feevale
<http://linkte.me/q0435>.
- FGV-SP – Fundação Getulio Vargas
<http://linkte.me/z3178>.
- Fuvest – Fundação Universitária para o Vestibular
<http://linkte.me/t26mh>.
- IFSC – Instituto Federal de Santa Catarina
<http://linkte.me/fjzt0>.
- IFSP – Instituto Federal de São Paulo
<http://linkte.me/y88p7>.
- PUC-PR - Pontifícia Universidade Católica do Paraná
<http://linkte.me/l7e33>.
- PUC-RJ – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
<http://linkte.me/i393k>.
- Udesc – Universidade do Estado de Santa Catarina
<http://linkte.me/utn7e>.
- UEA – Universidade do Estado do Amazonas
<http://linkte.me/w7299>.
- Uece – Universidade Estadual do Ceará
<http://linkte.me/qdxx7>.
- UEL – Universidade Estadual de Londrina
<http://linkte.me/v5v96>.
- Uepa – Universidade do Estado do Pará
<http://linkte.me/cf194>.
- Uerj – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
<http://linkte.me/k0pe4>.
- UFES – Universidade Federal do Espírito Santo
<http://linkte.me/ms87s>.
- UFG – Universidade Federal de Goiás
<http://linkte.me/ns1qq>.
- UFPB – Universidade Federal da Paraíba
<http://linkte.me/r7k67>.
- UFPR – Universidade Federal do Paraná
<http://linkte.me/fv181>.
- UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
<http://linkte.me/u4603>.
- UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
<http://linkte.me/pr5c7>.
- UFSM – Universidade Federal de Santa Maria
<http://linkte.me/qv8ra>.
- Unesp – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
<http://linkte.me/o00eo>.
- Unicamp – Universidade Estadual de Campinas
<http://linkte.me/g431m>.
- Unifor – Universidade de Fortaleza
<http://linkte.me/q61j8>.
- UPE – Universidade de Pernambuco
<http://linkte.me/z0256>.
- UPF – Universidade de Passo Fundo - Rio Grande do Sul
<http://linkte.me/rl8dq>.

- Barbosa, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006 (Coleção do Professor de Matemática).
- Boyer, C. B. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- Bussab, W. O.; Morettin, P. A. *Estatística Básica*. 4. ed. São Paulo: Atual, 1987.
- Castanheira, N. P. *Noções básicas de matemática comercial e financeira*. 2. ed. rev. e atual. Curitiba: IBPEX, 2008.
- Dolce, O.; Pompeo, J. N. *Fundamentos de matemática elementar*, 9: geometria plana. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- Eves, H. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.
- Fonseca, J. S. da; Martins, Gilberto de Andrade. *Curso de estatística*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 1996.
- Iezzi, G.; Dolce, O.; Murakami, C. *Fundamentos de matemática elementar*, 2: logaritmos. 8. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- __________; Murakami, C. *Fundamentos de matemática elementar*, 1: conjuntos, funções. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- __________. *Fundamentos de matemática elementar*, 3: trigonometria. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- __________; Hazzan, S. *Fundamentos de matemática elementar*, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- Lima, E. L. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).
- __________. et al. *A matemática no Ensino Médio*. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v. 1 (Coleção do Professor de Matemática).
- __________. *Meu professor de matemática e outras histórias*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006 (Coleção do Professor de Matemática).
- Morgado, A. C.; Wagner, E.; Zani, S. *Progressões e matemática financeira*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005 (Coleção do Professor de Matemática).
- Pickover, C. A. *O livro da matemática*: de Pitágoras à 57ª dimensão. Kerkdriel: Librero, 2011.
- Roque, T. *História da matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- Rooney, A. *A história da matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M.Books do Brasil Editora Ltda, 2012.
- Vieira, S. *Introdução à bioestatística*. 3. ed. rev. e ampl. Rio de Janeiro: Campus, 1980.

1 5 9 0 4 6
ISBN 978-85-418-1406-5
9 788541 814065